УДК 517.958

Ю.М.Сибіль

ЗАДАЧА НЕЙМАНА ДЛЯ РІВНЯННЯ ГЕЛЬМГОЛЬЦА НА ПЛОЩИНІ У ВИПАДКУ РОЗІМКНУТИХ ГРАНИЦЬ

1. Нехай $L=\bigcup_{j=1}^{n} L_j$, де $L_j=]a_j,b_j[$ – інтервал на осі Ox; $\bar{L}$ – замикання L. Точки R^2 позначимо через $x=(x_1,x_2)$, $y=(y_1,y_2)$ і т.д., $|x-y|$ – відстань між x і y.

Необхідно знайти $u(x)$, що задовольняє рівняння Гельмгольца в $R^2\setminus\bar{L}$

$$\Delta u+k^2u=0,\quad \operatorname{Im}k\le 0, \tag{1}$$

граничну умову на L

$$\left(\frac{\partial u}{\partial n}\right)^{\pm}=f_{\pm}, \tag{2}$$

де $f_{\pm}$ – неперервні за Гельдером функції, умову випромінювання на нескінченності

$$\lim_{R\to\infty}\int_{\Sigma_R}\left|\frac{\partial u}{\partial R}+iku\right|dS_x=0, \tag{3}$$

де Σ_R – коло радіуса R, та умову типу Майкснера на кінцях L

$$\lim_{\rho\to 0}\sum_{j=1}^{2n}\int_{C_j(\rho)}\left|\frac{\partial u}{\partial\rho}\right|dS_x=0, \tag{4}$$

де $C_j(\rho)$ – коло радіуса ρ навколо j-го кінця L.

Позначимо $Q(x,y)=\frac{1}{4i}H_0^{(2)}(k|x-y|)$ – фундаментальний розв"язок рівняння /1/, де $H_0^{(2)}$ – функція Ханкеля другого роду нульового порядку.

<u>Теорема 1</u>. Якщо розв"язок задачі /1/-/4/ існує, то він задається у вигляді

$$u(x)=-\int_L\frac{\partial Q(x,y)}{\partial n_y}\tau(y)\,dS_y+\int_L Q(x,y)\{f_-(y)-f_+(y)\}dS_y. \tag{5}$$

Тут τ – розв"язок наступного сингулярного інтегро-диференціального рівняння першого роду

$$H\tau=\int_L \tau'(S)\frac{\partial Q(S,S_0)}{\partial S_0}dS+k^2\int_L \tau(S)Q(S,S_0)dS=g(S_0),\ S_0\in L \qquad /6/$$

з умовою

$$\tau(a_i)=\tau(b_i)=0,\quad i=\overline{1,n}, \qquad /7/$$

де $g(S_0)=-\frac{1}{2}\left\{\underset{+}{f}(S_0)+\underset{-}{f}(S_0)\right\}+\int_L \frac{\partial Q(S,S_0)}{\partial n_0}\left\{\underset{-}{f}(S)-\underset{+}{f}(S)\right\}dS.$

І навпаки, функція задана через /5/, де τ – розв"язок рівняння /6/ з умовою /7/, є розв"язком задачі /I/–/4/.

Доведення. Функцію, що задовольняє /I/, /3/, /4/, можна записати як [3]

$$U(x)=-\int_L \frac{\partial Q(x,y)}{\partial n_y}\left\{\overset{-}{U}(y)-\overset{+}{U}(y)\right\}dS_y+\int_L Q(x,y)\left\{\left(\frac{\partial U(y)}{\partial n_y}\right)^{-}-\left(\frac{\partial U(y)}{\partial n_y}\right)^{+}\right\}dS_y.$$

Вважаємо, що $x=(S_0,x_2)$, $y=(S,0)$, $x_0=(S_0,0)$, а $\frac{\partial}{\partial n}$ і $\frac{\partial}{\partial n_0}$ – диференціювання по нормалі до L відповідно у точках y і x_0. Тоді, використовуючи властивості нормальної похідної потенціалів подвійного та простого шару, а також умову /2/, одержуємо

$$\int_L \tau'(S)\frac{\partial Q(S,S_0)}{\partial S_0}dS+k^2\int_L \tau(S)Q(S,S_0)dS-R(S_0)=g(S_0),\ S_0\in L, \qquad /8/$$

де $R(S_0)=\sum_{i=1}^{n}\tau(S)\frac{\partial Q(S,S_0)}{\partial S_0}\Big|_{a_i}^{b_i}$, а $\tau(S)=\overset{-}{U}(S)+\overset{+}{U}(S)$.

Оскільки $U(x)$ обмежена в $\mathbb{R}^2$, то й τ обмежена в кінцях L. Покажемо необхідність виконання умови /7/. Після деяких перетворень /8/

$$\int_L \tau(S)\frac{\partial Q(S,S_0)}{\partial S}dS=-G(S_0)-C, \qquad /9/$$

де $G(S_0)=-k^2\int_L \tau(S)\left\{\int Q(S,S_0)dS_0\right\}dS+\int g(S_0)dS_0$; C – довільна константа. Виділяючи в $Q(S,S_0)$ сингулярну частину, маємо

$$\frac{\partial Q(S,S_0)}{\partial S}=-\frac{1}{2\pi}\frac{1}{S-S_0}+\frac{\partial Q_1(S,S_0)}{\partial S},$$

де $Q_1(S,S_0)$ – неперервно-диференційована по S і S_0 .

Перепишемо /9/ як

$$\frac{1}{2\pi}\int_L\frac{\tau(S)}{S-S_0}dS=\int_L\tau(S)\frac{\partial Q_1(S,S_0)}{\partial S}dS+G(S_0)+C. \qquad /10/$$

Розглянемо рівняння

$$\frac{1}{\pi}\int_a^b\frac{\varphi(S)}{S-S_0}dS=\psi(S_0)+C,\quad S_0\in\,]a,b[, \qquad /11/$$

де $\psi(S_0)$ – неперервна за Гельдером функція; C – константа, не визначена заздалегідь. Тоді рівняння /11/ має розв"язок, обмежений на обох кінцях для довільної $\psi(S_0)$ [2] :

$$\varphi(S)=-\sqrt{(S-a)(b-S)}\frac{1}{\pi}\int_a^b\frac{\psi(S_0)}{\sqrt{(S_0-a)(b-S_0)}}\frac{dS_0}{S_0-S}, \qquad /12/$$

а константа C визначається єдиним чином:

$$C=\frac{1}{\pi}\int_a^b\frac{\psi(S_0)\,dS_0}{\sqrt{(S_0-a)(b-S_0)}}.$$

Застосовуючи вищенаведені міркування до /10/, одержуємо таку лему.

<u>Лема</u>. Розв"язок $\tau(S)$ рівняння /8/ задовольняє в околі C_i умову

$$\tau(S)=\sigma(S)\cdot|S-C_i|^{1/2}, \qquad /13/$$

де $C_i=a_i$ чи b_i, $i=\overline{1,n}$, $\sigma(S)$ – неперервно диференційована за Гельдером на L, причому $\sigma(C_i)\neq 0$. З /13/ випливає виконання умови /7/, і $R(S_0)=0$.

Доведемо достатність. Очевидно, функція, задана формулою /5/, задовольняє /1/ і /3/, а також /4/ /внаслідок обмеженості в околі кінців L /. Використовуючи /6/ і /7/, а також властивості потенціалів простого і подвійного шару, переконуємось, що $U(x)$ задовольняє /2/.

2. Теорема 2. Якщо $\tau(S)$ – розв"язок рівняння $H\tau=0$ з умовою /7/, то $\tau\equiv 0$ на L.

Доведення. Аналогічно [3] можна довести теорему єдиності для задачі /I/–/4/. Нехай $\tau_0 S \not\equiv 0$ на L і $H\tau_0=0$. Тоді за теоремою I, $V(x)=-\int\limits_L \frac{\partial Q(x,y)}{\partial n_y}\tau_0(y)\,dS_y$ – розв"язок задачі /I/–/4/ з умовою $f_\pm=0$. Але $\tau(S)=U^-(S)-U^+(S)$. Отже, за теоремою єдиності $\tau(S)\equiv 0$ на L.

Теорема 2 доводить існування оберненого оператора H^{-1}, неперервного в сенсі такої теореми.

Теорема 3. Якщо $H\tau=g$, то $\forall\varepsilon>0\,\exists\,\delta>0$:

$$\|g\|_L=\max_{S\in L}|g(S)|<\delta \Rightarrow \|\tau\|_L<\varepsilon.$$

Теорема 3 має важливе значення для аналізу чисельних методів розв"язування рівняння /6/.

3. Теорема 4. Задача /I/–/4/ має єдиний розв"язок.

Доведення. Застосовуючи /II/ і /I2/ до /I0/, одержуємо інтегральне рівняння Фредгольма другого роду

$$\tau(S)-\int\limits_L \tau(t)M(S,t)\,dt=F(S),\quad S\in L, \qquad /I4/$$

яке разом з умовою /7/ еквівалентне задачі /I/–/4/. Розглянемо однорідне рівняння

$$\tau(S)-\int\limits_L \tau(t)M(S,t)\,dt=0. \qquad /I5/$$

З теореми 2 випливає, що /I5/ має лише тривіальний розв"язок. Тому альтернатива Фредгольма дасть нам, що рівняння /I4/, а отже, і задача /I/–/4/ має єдиний розв"язок.

4. Для чисельного розв"язання рівняння /6/ доцільно застосувати метод колокації, розкладаючи невідому густину $\tau(S)$ по поліномах Чебишева другого роду. При цьому автоматично задовольняються умови на $\tau(S)$ і $\tau'(S)$, що випливають з леми. Для обчислення коефіцієнтів системи лінійних алгебраїчних рівнянь, які мають логарифмічну особливість в ядрі, зручно використати метод виділення особливостей [I].

Список літератури: I. Людкевич И.В., Сибиль Ю.Н. Численное решение граничных задач для разомкнутых поверхностей методом выделения особенностей. - Львов, 1982. - 26 с. - Рукопись деп. в ВИНИТИ № 4935-82. 2. Мусхелишвили Н.И. Сингулярные интегральные уравнения. - М.: Наука, 1968. - 512 с. 3. J. Hayashi. The Dirichlet problem for the two-dimensional Helmholtz equation for an open boundary.- J. Math. Anal. Appl., 1973, vol. 44, p. 489-530.

Стаття надійшла до редколегії 24.02.84

УДК 518:517.944/947

С.М.Левицька

ПРО ТРЕТЮ ПРОСТОРОВУ ЗАДАЧУ ДЛЯ РІВНЯННЯ ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ

Відома методика розв"язування першої просторової задачі для рівняння теплопровідності [I]. Третя плоска задача для цього рівняння у випадку скінчених областей складної конфігурації розв"язана у праці [2].

Розглянемо третю просторову задачу для рівняння нестаціонарної теплопровідності

$$\Delta T=\frac{\partial T}{\partial \tau};\quad T\Big|_{\tau=0}=0;\quad \left(\alpha(Q)+\beta(Q)\frac{\partial}{\partial n}\right)T(Q,\tau)=\varphi(Q,\tau),\ Q\in S, \qquad /I/$$

де $S=\bigcup_{j=1}^{N} S_j$ - сукупність розімкнутих поверхонь; $\varphi(Q,\tau)$ - задана умова на краю. Розв"язок задачі /I/ шукаємо у вигляді