4. Для чисельного розв"язання рівняння /6/ доцільно застосувати метод колокації, розкладаючи невідому густину $\tau(S)$ по поліномах Чебишева другого роду. При цьому автоматично задовольняються умови на $\tau(S)$ і $\tau'(S)$, що випливають з леми. Для обчислення коефіцієнтів системи лінійних алгебраїчних рівнянь, які мають логарифмічну особливість в ядрі, зручно використати метод виділення особливостей [I].

Список літератури: I. Л ю д к е в и ч И.В., С и б и л ь Ю.Н. Численное решение граничных задач для разомкнутых поверхностей методом выделения особенностей. - Львов, 1982. - 26 с. - Рукопись деп. в ВИНИТИ № 4935-82. 2. М у с х е л и ш в и л и Н.И. Сингулярные интегральные уравнения. - М.: Наука, 1968. - 512 с. 3. J. Hayashi. The Dirichlet problem for the two-dimensional Helmholtz equation for an open boundary.- J. Math. Anal. Appl., 1973, vol. 44, p. 489-530.

Стаття надійшла до редколегії 24.02.84

УДК 518:517.944/947

С.М.Левицька

ПРО ТРЕТЮ ПРОСТОРОВУ ЗАДАЧУ ДЛЯ РІВНЯННЯ ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ

Відома методика розв"язування першої просторової задачі для рівняння теплопровідності [I]. Третя плоска задача для цього рівняння у випадку скінчених областей складної конфігурації розв"язана у праці [2].

Розглянемо третю просторову задачу для рівняння нестаціонарної теплопровідності

$$\Delta T=\frac{\partial T}{\partial \tau};\ T\Big|_{\tau=0}=0;\ \Big(\alpha(Q)+\beta(Q)\frac{\partial}{\partial n}\Big)T(Q,\tau)=\varphi(Q,\tau),\ Q\in S, \qquad /I/$$

де $S=\bigcup\limits_{j=1}^{N} S_j$ - сукупність розімкнутих поверхонь; $\varphi(Q,\tau)$ - задана умова на краю. Розв"язок задачі /I/ шукаємо у вигляді потенціалу простого шару

$$T(\bar{X},t)=\int_0^t d\tau \iint_S q(S,\tau)\delta(R,t-\tau)dS,\ \bar{X}\in\mathbb{R}^3, \qquad /2/$$

де $q(S,\tau)$ – невідома густина; $\delta(R,t-\tau)=\exp\left(-\frac{R^2}{4(t-\tau)}\right)/[4\pi(t-\tau)]^{3/2}$ – функція впливу теплового джерела; $R^2=|X-\bar{X}|^2=\sum_{i=1}^{3}(x_i-\bar{x}_i)^2$ – відстань між змінною точкою $X=(x_1,x_2,x_3)$ поверхні S і фіксованою точкою $\bar{X}=(\bar{x}_1,\bar{x}_2,\bar{x}_3)$ простору.

Задача зводиться до відшукання густини $q(S,\tau)$. Область зміни параметру τ розбиваємо на $(p-1)$ частин точками $\tau_k=(k-1)h_1$ $(k=\overline{1,p})$ і на кожному частинному проміжку $[\tau_{k-1},\tau_k]$ $(k=\overline{1,p})$ невідому густину $q(S,\tau)$ зобразимо у вигляді лінійної функції за часовою змінною

$$q(S,\tau)=\frac{1}{h_1}\left\{q^{(k-1)}(S)(\tau_k-\tau)+q^{(k)}(S)(\tau-\tau_{k-1})\right\},\ q^{(0)}(S)=0. \qquad /3/$$

Підставляючи /3/ у /2/ і обчислюючи інтеграли за часом, одержуємо

$$T(\bar{X},t)=\frac{1}{2^3\pi}\left\{\iint_S q^{(p)}(S)\left[I_0^{(-1)}-\frac{1}{h_1}I_1^{(-1)}\right]dS+\sum_{k=1}^{p-1}\iint_S q^{(k)}(S)\left[\nabla^2\left(jI_0^{(j)}\right)-\frac{1}{h_1}\nabla^2 I_1^{(j)}\right]dS\right\}, \qquad /4/$$

де

$$I_0^{(j)}=\frac{2}{R}\,\mathrm{erfc}\left(\frac{R}{2\sqrt{h_1 j}}\right);\ I_1^{(j)}=\frac{2\sqrt{h_1 j}}{\sqrt{\pi}}e^{-\frac{R^2}{4h_1 j}}-R\,\mathrm{erfc}\left(\frac{R}{2\sqrt{h_1 j}}\right); \qquad /5/$$

$j=p-k-1$, $\mathrm{erfc}(x)=1-\mathrm{erf}(x)$, $\mathrm{erf}(x)$ – інтеграл ймовірності.

Задовольняючи крайову умову, для визначення невідомої густини запишемо послідовність рекурентних інтегральних рівнянь:

$$\frac{1}{2^3\pi}\iint_S q^{(p)}(S)\left\{\alpha(Q)\left[I_0^{(-1)}-\frac{1}{h_1}I_1^{(-1)}\right]+\beta(Q)\left[I_2^{(-1)}-\frac{1}{h_1}I_3^{(-1)}\right]\right\}dS=$$

$$=\varphi(Q,t)-\frac{1}{2^3\pi}\sum_{k=1}^{p-1}\iint_S q^{(k)}(S)\left\{\alpha(Q)\left[\nabla^2\left(jI_0^{(j)}\right)-\frac{1}{h_1}\nabla^2 I_1^{(j)}\right]+\right.$$

$$\left.+\beta(Q)\left[\nabla^2\left(jI_2^{(j)}\right)-\frac{1}{h_1}\nabla^2 I_3^{(j)}\right]\right\}dS; \qquad /6/$$

де

$$I_2^{(j)}=\frac{\partial}{\partial n}I_0^{(j)}=-2T(n_0,X,\overline{X})\left\{\frac{1}{\sqrt{\pi h_1 j}}\cdot\frac{e^{-\frac{R^2}{4h_1 j}}}{R^2}+\frac{erbc\left(\frac{R}{2\sqrt{h_1 j}}\right)}{R^3}\right\}; \qquad /7/$$

$$I_3^{(j)}=\frac{\partial}{\partial n}I_1^{(j)}=-T(n_0,X,\overline{X})\frac{erbc\left(\frac{R}{2\sqrt{h_1 j}}\right)}{R}; \qquad /8/$$

$T(n_0,X,\overline{X})=\sum_{i=1}^{3}(x_i-\overline{x}_i)\cdot\cos\gamma_i$, $\cos\gamma_i$ – напрямні косинуси нормалі n_0.

Нехай нам відоме параметричне представлення поверхні S :
$X=X(u,v)$, $(u,v)\in\Delta$, $\Delta=\{U_2\le u\le U_1,\ V_2\le v\le V_1\}$.
В інтегральному рівнянні /6/ перейдемо від поверхневого інтегралу до повторного

$$\frac{1}{2^3\pi}\iint_\Delta q^{(p)}(u,v)\mathcal{J}(u,v)\{\alpha(Q)C_1^{(-1)}(R)+\beta(Q)C_2^{-1}(R)\}du\,dv=$$

$$=\varphi(Q,t)-\frac{1}{2^3\pi}\sum_{K=1}^{p-1}\iint_\Delta q^{(K)}(S)\mathcal{J}(u,v)\{\alpha(Q)C_1^{(j)}(R)+\beta(Q)C_2^{(j)}(R)\}du\,dv \qquad /9/$$

де $\mathcal{J}(u,v)=\sqrt{\left(\sum_{i=1}^{3}x_{i_u}'^2\right)\left(\sum_{i=1}^{3}x_{i_v}'^2\right)-\sum_{i=1}^{3}x_{i_u}'\,x_{i_v}'}$ – якобіан переходу.

Задача звелась до відшукання деякої двовимірної функції $q^{(K)}(u,v)$. Розіб"емо прямокутник Δ на $(L+1)\,(M+1)$ частин точками (u_m,v_ℓ), $m=\overline{1,M+1}$, $\ell=\overline{1,L+1}$, де $u_m-u_{m-1}=h_2$, $m=\overline{2,M}$; $v_\ell-v_{\ell-1}=h_3$, $\ell=\overline{2,L}$; $u_1-u_0=u_{M+1}-u_M=v_1-v_0=v_{L+1}-v_L=\overline{h}_2$; $\overline{h}_2\ll h_2$, $\overline{h}_2\ll h_3$.
У кожному внутрішньому прямокутнику густину зобразимо у вигляді білінійної комбінації

$$q^{(K)}(u,v)=\frac{1}{h_2h_3}\delta(u,v)\{[q_{m,\ell}^{(K)}(u_{m+1}-u)+q_{m+1,\ell}^{(K)}(u-u_m)](v_{\ell+1}-v)+$$

$$+[q_{m,\ell+1}^{(K)}(u_{m+1}-u)+q_{m+1,\ell+1}^{(K)}(u-u_m)](v-v_\ell)\},\ m=\overline{1,M-1}, \qquad /10/$$

$\ell=\overline{1,L-1}$.

для крайових прямокутників маємо

$$q^{(K)}(u,v)=\begin{cases}\frac{\delta(u,v)}{h_3}\left[q^{(K)}_{\varkappa,l}(v_{l+1}-v)+q^{(K)}_{\varkappa,l+1}(v-v_l)\right], & l=\overline{1,L-1},\ \varkappa=1VM\\ \frac{\delta(u,v)}{h_2}\left[q^{(K)}_{m,\eta}(u_{m+1}-u)+q^{(K)}_{m+1,\eta}(u-u_m)\right], & m=\overline{1,M-1},\ \eta=1VL\end{cases} \qquad /11/$$

і, врешті, кутових:

$$q^{(K)}(u,v)=\delta(u,v)q^{(K)}_{\varkappa,\eta}, \quad \varkappa=1VM,\ \eta=1VL. \qquad /12/$$

Множник $\delta(u,v)$ враховує особливості густини на краях області S

$$\delta(u,v)=\delta_1(u)\cdot\delta_2(u)\cdot\delta_3(v)\cdot\delta_4(v)$$

$$\delta_1(u)=\sqrt{\frac{h_2}{u-u_0}};\ \delta_2(u)=\sqrt{\frac{h_2}{u_{M+1}-u}};\ \delta_3(v)=\sqrt{\frac{h_3}{v-v_0}};\ \delta_4(v)=\sqrt{\frac{h_3}{v_{L+1}-v}}.$$

Підставляючи /10/–/12/ в /9/, одержуємо послідовність інтегральних рівнянь першого роду

$$\frac{1}{2^3\pi}\sum_{l=1}^{L}\sum_{m=1}^{M}q^{(K)}_{m,l}A^{(-1)}_{m,l}=\varphi(Q,t)-\frac{1}{2^3\pi}\sum_{K=1}^{p-1}\sum_{l=1}^{L}\sum_{m=1}^{M}q^{(K)}_{m,l}A^{(j)}_{m,l}, \qquad /13/$$

де

$$A^{(j)}_{m,l}=\frac{1}{h_2h_3}\Bigg\{\iint\limits_{\Delta_{m,l}}\delta(u,v)\Phi^{(j)}_{m-1,l+1}(u,v,\bar u,\bar v)\,du\,dv-\iint\limits_{\Delta_{m+1,l}}\delta(u,v)\Phi^{(j)}_{m+1,l-1}(u,v,\bar u,\bar v)\,du\,dv-$$

$$-\iint\limits_{\Delta_{m,l+1}}\delta(u,v)\Phi^{(j)}_{m-1,l+1}(u,v,\bar u,\bar v)\,du\,dv+\iint\limits_{\Delta_{m+1,l+1}}\delta(u,v)\Phi^{(j)}_{m+1,l+1}(u,v,\bar u,\bar v)\,du\,dv\Bigg] \text{ і т.д.}, \qquad /14/$$

$$\Phi^{(j)}_{m,l}(u,v,\bar u,\bar v)=J(u,v)\left[\alpha(Q)\zeta^{(j)}_1(R)+\beta(Q)\zeta^{(j)}_2(R)\right](u-u_m)(v-v_l).$$

Інтегральне рівняння /13/ розв"язується методом колокації. Задовольняючи крайові умови в точках $(\bar u_\nu, \bar v_\mu)\in S$, одержуємо систему лінійних алгебраїчних рівнянь, з яких можна визначити невідомі $q^{(p)}_{m,l}$, вважаючи, що $q^{(K)}_{m,l}$ $(K=\overline{1,p-1})$ знайдені.

Нехай точки спостереження $(\bar u_\nu, \bar v_\mu)$ збігаються з точками розбиття області (u_m, v_l). Інтегруючи особливості ядра інтегрального рівняння, записуємо матрицю системи лінійних алгебраїчних рівнянь з явним діагональним переважанням. Можна показати [2], що коефіцієнти правих частин систем довизначаються в особливій точці виразом $-\alpha(Q)\frac{4}{\sqrt{4h_1}}\nabla^2 V_j$.

Використовуючи ідею методу В.Л.Канторовича і беручи до уваги результати праці [3] у лівій частині /13/ усуваємо особливості типу $1/R$ і $T(n_0, X, \bar{X})/R^3$. В особливій точці маємо

$$\iint_{\Delta_{m,l}} \delta(u,v)\Phi^{(j)}_{m,l}(u,v,\bar{u}_\nu,\bar{v}_\mu)\,du\,dv = \beta_{m,l}(\bar{u}_\nu,\bar{v}_\mu,\bar{u}_\nu,\bar{v}_\mu)\left(\frac{|X''_{uu}|}{|X'_u|^2}+G_1\right)+$$

$$+\bar{\bar{\beta}}_{ml}(\bar{u}_\nu,\bar{v}_\mu,\bar{u}_\nu,\bar{v}_\mu)\left(\frac{n_0\cdot X'''_{uuu}}{6|X'_u|^3}+G_2\right)+\Omega_{m,l}(\bar{u}_\nu,\bar{v}_\mu,\bar{u}_\nu,\bar{v}_\mu), \qquad /15/$$

де $\bar{\beta}_{ml}(\bar{u}_\nu,\bar{v}_\mu,\bar{u}_\nu,\bar{v}_\mu)$, $\bar{\bar{\beta}}_{ml}(\bar{u}_\nu,\bar{v}_\mu,\bar{u}_\nu,\bar{v}_\mu)$, $\Omega_{m,l}(\bar{u}_\nu,\bar{v}_\mu,\bar{u}_\nu,\bar{v}_\mu)$ - деякі скінчені величини або нулі.

У послідовності систем лінійних алгебраїчних рівнянь /13/ коефіцієнти $A^{(j)}_{1,1}$, $A^{(j)}_{M,1}$, $A^{(j)}_{M,L}$, $A^{(j)}_{1,L}$; $A^{(j)}_{M,l}$, $A^{(j)}_{1,l}$, $l=\overline{1,L-1}$; $A^{(j)}_{m,1}$, $A^{(j)}_{m,L}$, $m=\overline{1,M-1}$ мають ще один тип особливостей за рахунок представлення густини /10/–/12/. Ці особливості усуваються спеціальними замінами змінних:

$$u^{(1)}=\bar{h}_2\zeta^2+u_0, \qquad v^{(1)}=\bar{h}_2\xi^2+v_0,$$
$$u^{(2)}=u_{M+1}-\bar{h}_2\zeta^2, \qquad v^{(2)}=v_{L+1}-\bar{h}_2\xi^2,$$
$$u^{(3)}=-\zeta h_2+u_m, \qquad v^{(3)}=-\xi h_2+v_l,$$
$$u^{(4)}=\zeta h_2+u_m, \qquad v^{(4)}=\xi h_2+v_l, \qquad \zeta,\xi\in[0,1].$$

Тоді коефіцієнти системи /13/ дещо перетворяться. Наприклад,

$$A^{(j)}_{1,1}=\int_0^1\!\!\int_0^1\Big\{4\bar{h}_2\delta_2(u^{(1)})\delta_4(v^{(1)})\Phi^{(j)}(u^{(1)},v^{(1)},\bar{u}_\nu,\bar{v}_\mu)-$$
$$-2\bar{h}_2\delta_1(u^{(4)})\delta_2(u^{(4)})\delta_4(v^{(1)})\bar{\Phi}^{(j)}_{m+1}(u^{(4)},v^{(1)},\bar{u}_\nu,\bar{v}_\mu)-$$
$$-2\bar{h}_2\delta_2(u^{(1)})\delta_3(v^{(3)})\delta_4(v^{(3)})\Phi_{l+1}(u^{(1)},v^{(3)},\bar{u}_\nu,\bar{v}_\mu)+\delta(u^{(4)},v^{(4)})\times$$
$$\times\Phi^{(j)}_{m+1,l+1}(u^{(4)},v^{(4)},\bar{u}_\nu,\bar{v}_\mu)\Big\}\,d\zeta\,d\xi$$

$$A^{(j)}_{m,1} = \int_0^1\int_0^1 \{2\bar{h}_2(\delta_1(u^{(3)})\delta_2(u^{(3)})\delta_4(v^{(1)})\bar{\Phi}^{(j)}_{m-1}(u^{(3)},v^{(1)},\bar{u}_\nu,\bar{v}_\mu) -$$
$$- \delta_1(u^{(4)})\delta_2(u^{(4)})\delta_4(v^{(1)})\bar{\Phi}^{(j)}_{m+1}(u^{(4)},v^{(4)},\bar{u}_\nu,\bar{v}_\mu)) - \delta(u^{(3)},v^{(4)}) \times$$
$$\times \Phi^{(j)}_{m-1,\ell+1}(u^{(3)},v^{(4)},\bar{u}_\nu,\bar{v}_\mu) + \delta(u^{(4)},v^{(4)})\Phi^{(j)}_{m+1,\ell+1}(u^{(4)},v^{(4)},\bar{u}_\nu,\bar{v}_\mu)\}\,d\eta\, d\xi,$$

де $\Phi^{(j)}(u,v,\bar{u}_\nu,\bar{v}_\mu) = J(u,v)[\alpha(Q)C_1^{(j)}(R)+\beta(Q)C_2^{(j)}(R)],$

$$\bar{\Phi}^{(j)}_m(u,v,\bar{u}_\nu,\bar{v}_\mu) = \Phi^{(j)}(u,v,\bar{u}_\nu,\bar{v}_\mu)(u-u_m),\quad \bar{\bar{\Phi}}^{(j)}_\ell(u,v,\bar{u}_\nu,\bar{v}_\mu) = \Phi^{(j)}(u,v,\bar{u}_\nu,\bar{v}_\mu)(v-v_\ell).$$

Розв"язавши на кожному кроці за часом систему лінійних алгебраїчних рівнянь /13/, визначимо невідомі величини $q^{(p)}_{m,\ell}$. Тоді температура у будь-якій точці простору визначатиметься за формулою

$$T(\bar{x},t) = \sum_{k=1}^{P}\sum_{\ell=1}^{L}\sum_{m=1}^{M} q^{(k)}_{m\ell}\cdot A^{(j)}_{m\ell} \qquad \text{при } \beta(Q)\equiv 0.$$

Список літератури: 1. Бережанская З.С., Людкевич И.В., Шинкаренко Г.А. Решение нестационарной задачи теплопроводности для пространства со щелями методом интегральных уравнений. – В кн.: Обобщенные функции в термоупругости. К.: Наукова думка, 1980, с.76–80. 2. Левицкая С.М., Бережанская З.С. Плоская смешанная задача для уравнения теплопроводности. – Львов, 1982. – 16 с. – Рукопись деп. в ВИНИТИ № 5939–82. 3. Фрейкман Б.Г. Выделение особенностей в интегральных уравнениях трехмерного электромагнитного поля. Журн. техн. физики, 1980, 50, вып.2, с.425–427.

Стаття надійшла до редколегії 23.02.84