УДК 517.947:534

О.А.Музичук

ЧИСЕЛЬНЕ РОЗВ"ЯЗУВАННЯ ОСЕСИМЕТРИЧНОЇ ЗАДАЧІ ДІРІХЛЕ ДЛЯ ХВИЛЬОВОГО РІВНЯННЯ

Нехай в евклідовому просторі R^3 задана область D, обмежена поверхнею обертання S з віссю симетрії OZ. У циліндрі $Ц = D_e \times (0,\infty)$, $D_e = R^3 \setminus D$ потрібно знайти розв"язок $u(M,t) \in C^2(Ц) \cap C^1(\bar{Ц})$ хвильового рівняння

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \qquad /1/$$

який задовольняє однорідні початкові умови

$$u\Big|_{t=0} = \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = 0 \qquad /2/$$

та граничні умови типу Діріхле

$$u\Big|_S = f(M,t), \quad M \in S, \ t \geq 0 \qquad /3/$$

й обмежений на нескінченності. Задача /1/–/3/ записана у безрозмірних величинах $x = x'/a$, $y = y'/a$, $z = z'/a$, $t = ct'/a$, де c – швидкість звуку в середовищі; a – характерний розмір області D. Вважаємо, що функція f симетрична відносно осі OZ.

Застосуємо до поставленої задачі інтегральне перетворення Чебишева–Лагерра за змінною t. Тоді у просторі зображень одержимо нескінченну трикутну систему задач Діріхле для неоднорідного рівняння Гельмгольца [2]

$$\Delta u_n - \varkappa^2 u_n = \varkappa^2 \sum_{m=0}^{n-1} (n-m+1)\, u_m; \qquad /4/$$

$$u_n\Big|_S = f_n, \quad n = 0,1,\ldots, \qquad /5/$$

де $\varkappa$ – параметр інтегрального перетворення,

$$U_n(M)=\int_0^\infty U(M,t)e^{-\varkappa t}L_n(\varkappa t)dt - \qquad /6/$$

зображення розв"язку вихідної задачі;

$$f_n(M)=\int_0^\infty f(M,t)e^{-\varkappa t}L_n(\varkappa t)dt - \qquad /7/$$

зображення граничного значення /3/; L_n - поліноми Чебишева - Лагерра.

Розв"язок n -го рівняння системи /4/ шукаємо у вигляді

$$U_n(M)=\iint_S \sum_{m=0}^{n} q_m(P)\varphi_{n-m}(M,P)dS_p, \qquad /8/$$

де q_m - невідомі густини; φ_k - фундаментальні розв"язки диференціальних рівнянь

$$\varphi_k(M,P)=exp(-\varkappa R_{MP})L_k(\varkappa R_{MP})/R_{MP}.$$

Зауважимо, що оскільки система /4/ трикутна, то при обчисленні розв"язку U_n невідома тільки густина q_n, а решта густин q_m $(m=\overline{0,n-1})$ вже визначені на попередніх етапах. Враховуючи крайові умови /5/, для визначення густини q_n одержуємо інтегральне рівняння типу Фредгольма першого роду

$$\iint_S q_n(P)\varphi_0(M,P)dS_p=F_n(M), \quad M\in S, \qquad /9/$$

де

$$F_n(M)=f_n(M)-\iint_S \sum_{m=0}^{n-1} q_m(P)\varphi_{n-m}(M,P)dS_p. \qquad /10/$$

Очевидно, що у випадку осьової симетрії межової поверхні і граничного значення розв"язки вихідної задачі, а також крайової задачі у просторі зображень осесиметричні, тобто не залежать від кута обертання і густини q_n $(n=0,1,\ldots)$, а формули /8/ і /9/ значно спростяться.

Введемо циліндричну систему координат (r, z, φ). Розглянемо розв"язок задачі тільки у півплощині $\varphi=0$. Нехай твірна

L поверхні S задається параметричними рівняннями

$$\left.\begin{array}{l} r = r(\tau) \\ z = z(\tau) \end{array}\right\}, \ \tau \in [T_1, T_2].$$

Тоді з врахуванням симетрії розв"язок U_n у довільній точці $(\bar{r}, \bar{z})$ набере вигляду

$$U_n(\bar{r}, \bar{z}) = \int_{T_1}^{T_2} \sum_{m=0}^{n} q_m(\tau) G_{n-m} D(\tau) d\tau, \qquad /11/$$

де

$$G_k = \int_0^{2\pi} exp(-\varkappa R) L_k(\varkappa R)/R d\varphi;$$

$$R = \left[r^2(\tau) + \bar{r}^2 - 2r(\tau)\bar{r}\cos\varphi + (z(\tau) - \bar{z})^2 \right]^{1/2}; \ D(\tau) = [r'^2 + z'^2]^{1/2}.$$

Відповідно перепишемо й /9/:

$$\int_{T_1}^{T_2} q_m(\tau) G_0 D(\tau) d\tau = F_n(\bar{r}, \bar{z}), \qquad /12/$$

де

$$F_n(\bar{r}, \bar{z}) = f_n(\bar{r}, \bar{z}) - \int_{T_1}^{T_2} \sum_{m=0}^{n-1} q_m(\tau) G_{n-m} D(\tau) d\tau.$$

До /12/ застосуємо методику з праці [3]. Невідому густину запишемо як

$$q_n(\tau) = \sum_{k=1}^{\bar{N}} a_k^{(n)} \psi_k(\tau), \qquad /13/$$

де $a_k^{(n)}$ – невідомі коефіцієнти; $\psi_k(\tau) = b_k/[b_k^2 + (\tau - \tau_k)^2]$ – дробово-раціональні функції; τ_k – точки побудови густини; b_k – нелінійні параметри. Граничні умови задовольняємо в точках колокації на допоміжній твірній L', достатньо близькій до твірної L. Одержуємо систему лінійних алгебраїчних рівнянь /СЛАР/

$$QA^{(n)} = F^{(n)}, \qquad /14/$$

де $A^{(n)}$ – вектор коефіцієнтів апроксимації густини q_n; $F^{(n)}$ – вектор значень функції $F^{(n)}$ в точках колокації $(\bar{r}_j, \bar{z}_j)$, $j = \overline{1, N}$.

Матриця СЛАР має вигляд

$$Q_{jk}^{(n)} = \int_{T_1}^{T_2} \psi_k(\tau) G_0 D(\tau) d\tau, \; j = \overline{1,N}, \; k = \overline{1,N}. \qquad /15/$$

З огляду на працю [3] завжди можна отримати добре зумовлену матрицю.

Зауважимо, що для кожної густини q_n вибрано однаковий вид апроксимації. Це дає змогу при визначенні густин користуватися однією матрицею. Більше того, якщо цю матрицю звести до трикутного виду, то для обчислення коефіцієнтів кожної з густин потрібно тільки перерахувати вектор $F^{(n)}$, застосувати до нього матричне перетворення, яке використовували при триангуляції матриці, і провести зворотній хід для розв"язання трикутної СЛАР.

Після того, як коефіцієнти апроксимації густини q_n визначені, значення розв"язку u_n у довільній точці $(\bar{r}, \bar{z})$ обчислюємо за формулою /11/. Точність одержаних розв"язків задачі у просторі зображень контролюємо шляхом задоволення граничних умов /5/ у контрольних точках, розміщених між точками колокації.

Як відомо [2], зв"язок між розв"язком задачі /1/-/3/ і розв"язками задачі у просторі зображень виражається рядом

$$U(\bar{r}, \bar{z}, t) = \varkappa \sum_{n=0}^{\infty} u_n(\bar{r}, \bar{z}) L_n(\varkappa t). \qquad /16/$$

При практичних розрахунках ряд /16/ обриваємо і користуємося його частинною сумою

$$U_N(\bar{r}, \bar{z}, t) = \varkappa \sum_{n=0}^{N} u_n(\bar{r}, \bar{z}) L_n(\varkappa t). \qquad /17/$$

Критерієм вибору числа N членів ряду /17/ є його практична збіжність. При цьому додавання нових членів не змінює значення розв"язку в заданих межах.

Описаний підхід до розв"язування нестаціонарної задачі /1/-/3/ реалізований у виді комплексу програм на мові ФОРТРАН і апробований на ряді прикладів.

Приклад I. Розглянемо модельну задачу, коли граничне значення не залежить від просторових координат і на поверхні сфери одиничного радіусу задається формулою

$$f(t) = t^3 \exp(3-3t).$$

Відомо, що аналітичний розв"язок такої задачі має вид [I]

$$u_a(r_0, t) = \frac{1}{r_0} f(t - r_0 + 1) H(t - r_0 + 1),$$

де r_0 $(r_0 \geq 1)$ – відстань від центра сфери, H – функція Хевісайда. Чисельний розв"язок одержуємо при N =I8 і $\bar{N}$ =20 для точок спостереження на осі Oz. На рис. I суцільними лініями

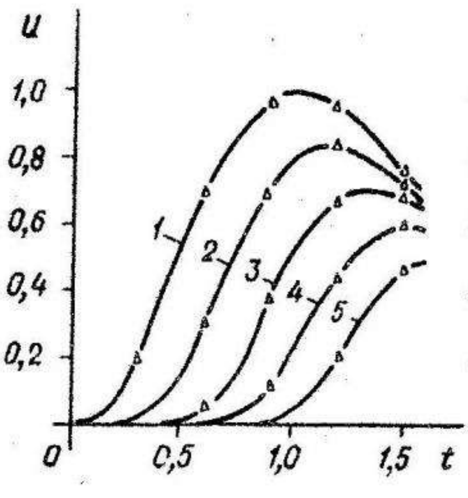

Рис. I.

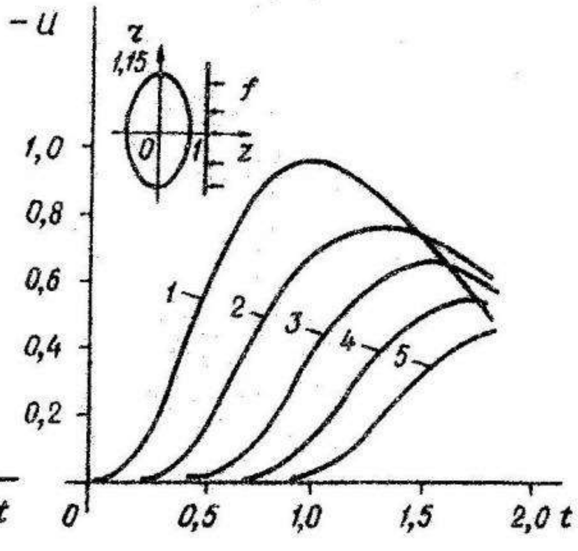

Рис. 2.

зображено аналітичний розв"язок поставленої задачі, а значком ▾ – значення чисельного розв"язку. Номер кривої p відповідає точці спостереження з координатою z = I,0I + 0,2 $(p-1)$. Абсолютна похибка чисельного розв"язку в розглянутих точках не перевищує 0,0I.

Приклад 2. Обчислимо тиск в імпульсі, відбитому від акустично м"якого еліпсоїда обертання. Припустимо, що в падаючому вздовж осі обертання плоскому імпульсі тиск змінюється за тим же законом, що й у попередньому випадку. Тоді на поверхні еліпсоїда тиск у відбитому імпульсі

$$f(r,z,t)=-(t-z+1)^3 \exp(3-3(t-z+1))H(t-z+1).$$

При чисельному розв"язуванні задачі у /I6/ збережено $N=20$ членів, а густини апроксимували $\bar{N}=20$ базисними функціями. У контрольних точках на межі значення розв"язків u_n відрізнялись від граничних значень менше, ніж на 0,0004. Графіки тиску в тих же точках спостереження, що й в прикладі 1, зображено на рис. 2.

Таким чином, запропоновано новий комбінований метод розв"язування нестаціонарних задач на основі поєднання методів інтегральних перетворень Чебишева – Лагерра й інтегральних рівнянь. Його застосування знижує розмірність вихідної задачі на дві одиниці. При цьому можна розв"язувати задачі для широкого класу поверхонь складної форми.

Список літератури: I. Владимиров В.С., Михайлов В.П., Вашарин В.Л. и др. Сборник задач по уравнениям математической физики. – М.: Наука, 1982. – 256 с. 2. Галазюк В.А. Метод поліномів Чебишева – Лагерра в змішаній задачі для лінійного диференціального рівняння другого порядку з постійними коефіцієнтами. – Доп. АН УССР. Сер. А, 1981, № I, с.3–6. 3. Людкевич И.В., Музычук А.Е. Численное решение граничных задач для уравнения $\Delta u - \varkappa^2 u = 0$ в случае незамкнутых поверхностей. – Львов, 1982. – 23 с. – Рукопись деп. в ВИНИТИ, № 3658–82.

Стаття надійшла до редколегії 22.02.84