УДК 517.958:519.6

Г.А.Шинкаренко

ПОБУДОВА АПОСТЕРІОРНИХ ОЦІНОК ЧИСЕЛЬНОГО РОЗВ"ЯЗКУ КРАЙОВИХ ЗАДАЧ ДЛЯ РІВНЯННЯ ШТУРМА - ЛІУВІЛЛЯ

1. Нехай потрібно знайти розв"язок $u(x)$ рівняння Штурма - Ліувілля

$$-\frac{d}{dx}\left(p\frac{du}{dx}\right)+qu=f,\quad x\in\Omega=(0,1) \qquad /1/$$

з крайовими умовами

$$u(0)=0,\quad \frac{du(1)}{dx}=0, \qquad /2/$$

де функції $0<\underset{0}{p}\le p(x)\le\hat{p}$, $q(x)\ge 0$ і неперервні на відрізку $\Omega=(0,1)$, а $f(x)\in L_2(\Omega)$. Тоді існує єдиний розв"язок крайової задачі /1/, /2/.

2. Крайовій задачі /1/, /2/ можна поставити у відповідність декілька еквівалентних варіаційних задач [1, 2]. Відзначимо деякі з них.

Нехай $W_2^k(\Omega)=\left\{u:\frac{d^iu}{dx^i}\in L_2(\Omega), 0\le i\le k\right\}$ зі скалярним добутком $(u,v)_k=\sum_{i=0}^{k}\left(\frac{d^iu}{dx^i},\frac{d^iv}{dx^i}\right)$ і нормою $\|u\|_k=\sqrt{(u,u)_k}$, де $(\cdot,\cdot)$ - скалярний добуток в $L_2(\Omega)$. Побудуємо наступні гільбертові простори функцій

$$\mathcal{U}=\{u: u(0),\ u\in W_2^1(\Omega)\}, \qquad /3/$$

$$\Sigma=\{\sigma:\sigma(1)=0,\ \sigma\in W_2^1(\Omega)\} \qquad /4/$$

зі скалярними добутками

$$a(u,v)=\int_0^1\left(p\frac{du}{dx}\frac{dv}{dx}+quv\right)dx,$$

$$b(\sigma,\tau)=\int_0^1\left(q^{-1}\frac{d\sigma}{dx}\frac{d\tau}{dx}+p^{-1}\sigma\tau\right)dx \qquad /5/$$

і відповідно нормами $\|u\|_u=\sqrt{a(u,u)}$, $\|\sigma\|_\Sigma=\sqrt{b(\sigma,\sigma)}$.

На просторах $\mathcal{U}$ і Σ визначимо лінійні функціонали

$$\ell(u)=(f,u),\quad k(\sigma)=\left(q^{-1}f,\frac{d\sigma}{dx}\right), \qquad /6/$$

а також квадратичні функціонали

$$L(u) = a(u,u) - 2l(u) \qquad u \in \mathcal{U}, \qquad /7/$$

$$\mathcal{K}(\sigma) = -b(\sigma,\sigma) + 2k(\sigma) - (\bar{q}^{1} f, f) \qquad \sigma \in \Sigma. \qquad /8/$$

Якщо більшою мірою цікавлять значення розв"язку $u^*(x)$ задачі /I/, /3/, то при чисельному знаходженні наближеного розв"язку доцільно користуватись варіаційною постановкою задачі /I/, /2/. Знайти $u^* \in \mathcal{U}$ таким, що

$$L(u^*) \leq L(u) \qquad \forall u \in \mathcal{U}. \qquad /9/$$

На практиці часто важливо визначити похідну $\sigma^*(x) = du^*/dx$, а не сам розв"язок задачі /I/, /2/. У цьому випадку варіаційна задача формулюється таким чином. Знайти $\sigma^* \in \Sigma$ таку, що

$$\mathcal{K}(\sigma) \leq \mathcal{K}(\sigma^*) \qquad \forall \sigma \in \Sigma. \qquad /I0/$$

Важливо відзначити, що кожна з поставлених задач /9/ і /I0/ має єдиний розв"язок u^* і σ^*, причому для них справедлива нерівність

$$\mathcal{K}(\sigma) \leq \mathcal{K}(\sigma^*) = L(u^*) \leq L(u) \qquad \forall u \in \mathcal{U}, \forall \sigma \in \Sigma. \qquad /II/$$

3. Варіаційні задачі про відшукання екстремальних значень функціоналів $L(u)$ і $\mathcal{K}(\sigma)$ ефективно розв"язують чисельно методом Рітца з вибором базисних функцій методом скінченних елементів /МСЕ/. При цьому, якщо u^h і σ^h – наближені розв"язки задач /9/ і /I0/, то неважко встановити апріорні оцінки похибки апроксимації $u^* - u^h$ та $\sigma^* - \sigma^h$ у нормі простору $W_2^1(\Omega)$ [2].

Відзначимо, що властивість /II/ дає змогу ефективно побудувати апостеріорні оцінки для похибки $u^* - u^h$ і $\sigma^* - \sigma^h$ в нормах просторів $\mathcal{U}$ і Σ. Справді, оскільки

$$\| u^* - u^h \|^2_{\mathcal{U}} = a(u^* - u^h, u^* - u^h) \leq L(u^h) - \mathcal{K}(\sigma^h),$$

$$\| \sigma^* - \sigma^h \|^2_{\Sigma} = b(\sigma^* - \sigma^h, \sigma^* - \sigma^h) \leq L(u^h) - \mathcal{K}(\sigma^h),$$

то дістаємо наступні оцінки відносної похибки

$$e(u^h)=\frac{\|u^*-u^h\|_u}{\|u^*\|_u}\leq\sqrt{\frac{L(u^h)-\mathcal{K}(\sigma^h)}{-L(u^h)}},\quad e(\sigma^h)=\frac{\|\sigma^*-\sigma^h\|_\Sigma}{\|\sigma^*\|_\Sigma}\leq\sqrt{\frac{L(u^h)-\mathcal{K}(\sigma^h)}{\mathcal{K}(\sigma^h)+(q^{-1}f,f)}} \qquad /12/$$

<u>Приклад I</u>. Візьмемо $p(x)=q(x)\equiv 1$, $f(x)=x$ і скористаємось кусково-лінійними апроксимаціями на скінченних елементах.

Наближені розв"язки та апостеріорні оцінки похибок на різних сітках скінченних елементів

x	0	0,25	0,5	0,75	I,0	$10^5[L(u^h)-\mathcal{K}(\sigma^h)]$	$10^2 e$
$10^4 u^h$	0	864	I625	2I73	2386	3I46	I0,2
	0	863	I624	2I72	2385	I497	4,86
$10^4 \sigma^h$	3523	33I9	2695	I6II	0	3I46	6,45
	352I	33I7	2694	I6I0	0	I497	3,[illegible]7

Результати обчислень з таблиці свідчать, що алгоритм знаходження $u^*(x)$ – розв"язку задачі /9/, $\sigma^*=du^*/dx$ – розв"язку задачі /I0/, дає змогу обчислювати згадані величини достатньо точно, причому їх похибки мають один і той же порядок малості. Тут перший рядок кожної графи – розв"язок МСЕ на сітці з восьми, другий – на сітці з шістнадцяти елементів.

4. Особливої уваги заслуговує випадок, коли $q(x)\equiv 0$. При цьому задача /I0/ замінюється задачею про максимум функціоналу

$$\mathcal{K}_0(\sigma)\equiv-\int_0^1 p^{-1}\sigma^2\,dx \qquad /I3/$$

на просторі функцій

$$\Sigma_0=\left\{\sigma:\sigma(1)=0;\ \frac{d\sigma}{dx}+f=0,\ x\in\Omega;\ \Omega\in W_2^1(\Omega)\right\} \qquad /I4/$$

Ця ситуація типова при розв"язуванні крайових задач теорії пружності. Необхідно відзначити, що стандартна процедура методу скінченних елементів не справляється з обмеженнями типу диференціальних рівнянь /рівнянь рівноваги/, що входять у визначення Σ_0.

Розглянемо побудову алгоритму, який дає змогу позбутись обмежень типу рівнянь рівноваги з тим, щоб задача розв"язувалась стандартною методикою МСЕ.

5. Замінимо задачу про відшукання максимума $\mathcal{K}_0(\sigma)$ на просторі /I4/ іншою. Знайти $\sigma_\lambda^* \in \Sigma$ таку, що

$$\mathcal{F}(\sigma_\lambda^*) \leq \mathcal{F}(\sigma) \quad \forall \sigma \in \Sigma, \qquad /I5/$$

де

$$\mathcal{F}(\sigma) = -\mathcal{K}_0(\sigma) + \lambda \int_0^1 \left(\frac{d\sigma}{dx} + f\right)^2 dx, \qquad /I6/$$

$0 < \lambda = const < \infty$ достатньо велике і відіграє роль параметра штрафу. Позначивши

$$b_\lambda(\sigma,\tau) = \int_0^1 \left(\lambda \frac{d\sigma}{dx}\frac{d\tau}{dx} + \rho^{-1}\sigma\tau\right)dx, \quad k_\lambda(\sigma) = \lambda\int_0^1 f\frac{d\sigma}{dx}dx,$$

запишемо $\mathcal{F}(\sigma)$ у вигляді

$$\mathcal{F}(\sigma) = b_\lambda(\sigma,\sigma) + 2k_\lambda(\sigma) + \lambda(f,f). \qquad /I7/$$

Відзначимо такі фактори:

1/ $b_\lambda(\cdot,\cdot)$ – симетрична неперервна білінійна форма на $\Sigma \times \Sigma$ причому нерівність

$$m_0 \|\sigma\|_1^2 \leq b_\lambda(\sigma,\sigma) \leq M_0 \|\sigma\|_1^2 \quad \forall \sigma \in \Sigma \qquad /I8/$$

з $m_0 = min(\lambda, \rho^{-1})$, $M_0 = max(\lambda, \rho_0^{-1})$ вказує, що $b_\lambda(\cdot,\cdot)$ породжує новий скалярний добуток на Σ. Позначимо цей новий гільбертів простір через Σ_λ і визначимо в ньому норму $\|\sigma\|_\lambda = \sqrt{b_\lambda(\sigma,\sigma)}$. Нерівність /I8/ вказує на топологічну еквівалентність просторів Σ_λ і $W_2^1(\Omega)$;

2/ $k_\lambda(\sigma)$ – обмежений лінійний функціонал на Σ_λ;

3/ З огляду на 1/, 2/ задача /I5/ має єдиний розв"язок $\sigma_\lambda^* \in \Sigma_\lambda$ причому

$$\mathcal{F}(\sigma_\lambda^*) = -\mathcal{K}_0(\sigma_\lambda^*) \leq -\mathcal{K}_0(\sigma) \quad \forall \sigma \in \Sigma_0, \qquad /I9/$$

тобто задачі /I3/ і /I5/ еквівалентні. Таким чином, $\sigma_\lambda^* = \sigma^*$, де σ^* – розв"язок задачі про максимум $\mathcal{K}_0(\sigma)$ на Σ_0;

4/ задача /I5/ ефективно розв"язується стандартними алгоритмами МСЕ;

5/ нерівність /I9/ дає змогу знову будувати апостеріорні оцінки похибок згідно 3/;

6/ Нехай S^h – скінченновимірний підпростір Σ_λ, базу якого формують кусково-визначені поліноми $\varphi_1(x), \dots, \varphi_N(x)$ порядку K, причому $S^h \xrightarrow[h\to 0]{} \Sigma_\lambda$. Визначено також оператор ортогонального проектування $\Pi : \Sigma_\lambda \to S^h$ з властивістю; існує константа $C>0$ така, що для всіх $0 \leq n \leq K$

$$\|\sigma - \Pi\sigma\|_n \leq Ch^{K-n} \|\sigma\|_{K+1} \qquad \forall \sigma \in \Sigma_\lambda . \qquad /20/$$

Якщо $\varphi_i(x)$ побудовані за МСЕ, то h – діаметр сітки і функція $\sigma - \Pi\sigma$ описує фактично похибку інтерполювання. Наступна теорема доводить збіжність процедури 5/ до точного розв"язку.

Теорема. Нехай σ_λ^h – апроксимація розв"язку σ^* в просторі $S^h \subset \Sigma_\lambda$. Тоді похибка апроксимації $\epsilon = \sigma^* - \sigma_\lambda^h$ має такі властивості:

$$(I) \quad b_\lambda(\epsilon, \tau) = 0 \qquad \forall \tau \in S^h, \qquad /2I/$$

$$(II) \quad \|\epsilon\|_\lambda \leq \|\sigma^* - \tau\|_\lambda \qquad \forall \tau \in S^h,$$

$$(III) \quad \|\epsilon\|_1 \leq C_1 h^K \|\sigma^*\|_{K+1}, \qquad /22/$$

де $C_1 = const > 0$ не залежить від h і σ^*.

Доведення. Властивості /I/, /II/ очевидні. На основі /I8/, /2I/ і нерівності Буняковського – Шварца дістаємо

$$m_0 \|\epsilon\|_1^2 \leq b_\lambda(\epsilon, \epsilon) = b_\lambda(\sigma^* - \tau + \tau - \sigma_\lambda^h, \epsilon)$$
$$= b_\lambda(\sigma^* - \tau, \epsilon) \leq M_0 \|\sigma^* - \tau\|_1 \|\epsilon\|_1 \quad \forall \tau \in S^h.$$

Звідси

$$\|\epsilon\|_1 \leq \frac{M_0}{m_0} \|\sigma^* - \tau\|_1 \qquad \forall \tau \in S^h. \qquad /23/$$

Прийнявши в /23/ $\tau = \Pi\sigma^*$ і використавши /20/, дістаємо /22/.

Приклад 2. Розглянемо задачу $-d^2u/dx^2=x,\ 0\le x\le 1,\ u(0)=0=u(1)$. У цьому випадку функціонал $\mathcal{F}(\sigma)=\int_0^1\sigma^2dx+\lambda\int_0^1\left(\frac{d\sigma}{dx}+x\right)^2dx$ мінімізується на просторі $\Sigma_\lambda={}^{\circ}W_2^1(\Omega)$. Розіб"ємо область Ω на N скінченних елементів діаметра $h=1/N$ і візьмемо

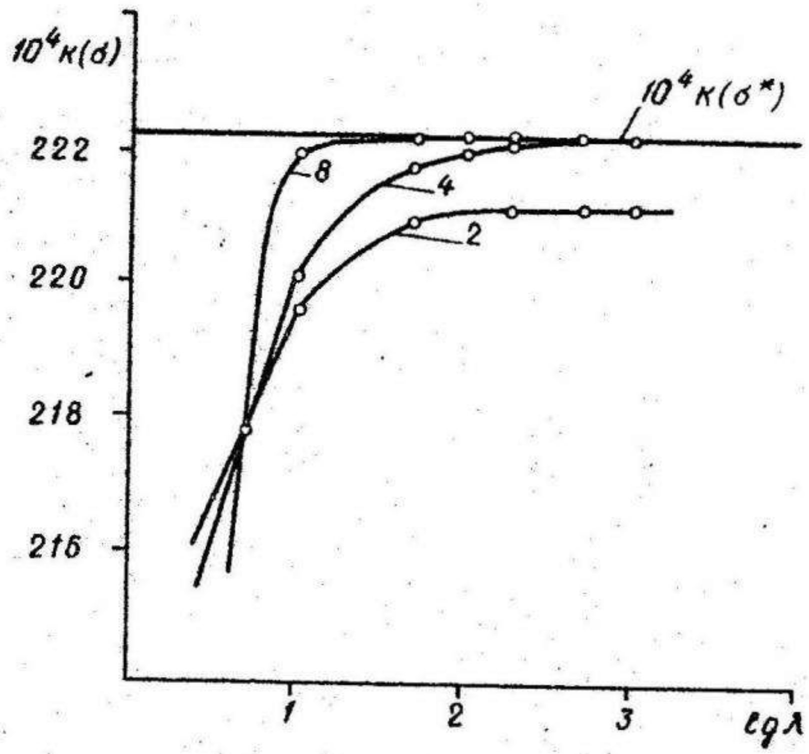

Рис. I.

лінійну апроксимацію / $K=1$ / функції $\sigma(x)$ на кожному з них. Рис. I демонструє монотонну збіжність знизу до точного значення $-\mathcal{K}_0(\sigma^*)$ з ростом параметра λ /номери кривих одночасно означають кількість скінченних елементів, на яких здійснювався розрахунок/. На рис. 2 показано залежність відхилення

$$\eta(\lambda)=\left\{\sum_{i=0}^{N}\left[\sigma^*(ih)-\sigma_\lambda^h(ih)\right]^2\right\}^{1/2}$$

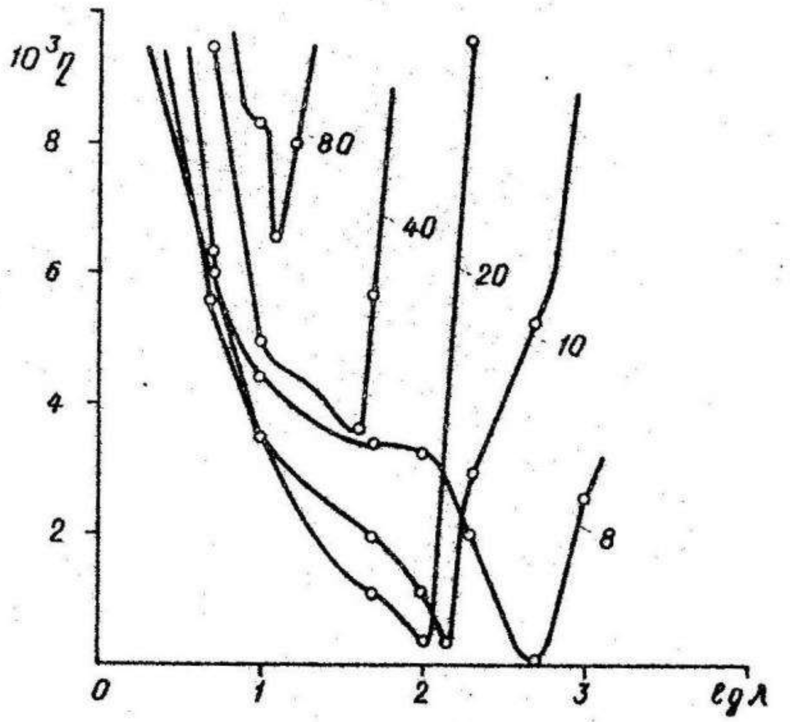

Рис. 2.

від λ . Відзначимо, що наявність різко визначених мінімумів $\eta(\lambda)$ ставить задачу про відшукання оптимальних значень λ. З нашого експерименту випливає, що $\lambda_{опт} = ch$, де $c = 10^3 \div 10^4$.

Список літератури: 1. М и х л и н С.Г. Вариационные методы в математической физике. – М.: Наука, 1970. – 512 с. 2. С т р е н г Г., Ф и к с Дж. Теория метода конечных элементов. – М.: Мир, 1977. – 349 с.

Стаття надійшла до редколегії 23.03.81