УДК 536.24

Й.З.Піскозуб

ТЕМПЕРАТУРНЕ ПОЛЕ В ПЛАСТИНІ З ТЕПЛОАКТИВНИМИ ВКЛЮЧЕННЯМИ ПРИ НАЯВНОСТІ ТЕПЛООБМІНУ НА БІЧНИХ ПОВЕРХНЯХ

Відомі різні підходи до розв"язування двовимірних задач теплопровідності для тіл з тонкими лінійними дефектами типу включень [2-9]. Досить ефективний підхід, пов"язаний з введенням функцій стрибка температури і теплового потоку на осі включень з наступним визначенням цих функцій з умов взаємодії включення з середовищем.

Використаємо результати праці [6] для визначення квазістаціонарної взаємодії температурних полів у пластині з тепловиділенням. Ці поля породжуються джерелами тепла потужності q_k в точках (x_k, y_k) $(k=\overline{1,M})$ і наявністю системи N симетричних теплоактивних включень малої ширини $2h(x)$, розташованих на осі абсцис $L=L' \cup L''$, де $L'=\bigcup\limits_{n=1}^{N}[a_n, b_n]$.

Нехай теплообмін на бічних поверхнях пластини симетричний відносно серединної площини і підпорядковується закону $q_n=\varphi(x,y,t,t_e,\alpha,\beta,\ldots)$. Тоді [6] температура в пластині задовольняє рівняння

$$\Delta t(x,y)-\frac{\varphi(x,y,t,t_e,\alpha,\beta,\ldots)}{\lambda\delta}+\frac{1}{\lambda}\sum_{k=1}^{M}q_k\,\delta(x-x_k)\delta(y-y_k)=0, \quad /1/$$

де λ – коефіцієнт теплопровідності; δ – товщина пластини; t_e – температура зовнішнього середовища; $\alpha, \beta, \ldots$ – параметри зовнішнього середовища. У частковому випадку, коли $\varphi(x,y,t,t_e,\alpha,\beta,\ldots)=$ $=\alpha[t(x,y)-t_e]$ /теплообмін за законом Ньютона/, /1/ збігається з рівнянням теплопровідності для пластин з тепловіддачею при симетричному відносно серединної площини температурному полі [8]

$$\Delta t(x,y)-\frac{\alpha}{\lambda\delta}\left[t(x,y)-t_e\right]=-\frac{1}{\lambda}\sum_{k=1}^{M}q_k\,\delta(x-x_k)\delta(y-y_k). \quad /2/$$

Природно зобразити температуру пластини у вигляді $t(x,y)=t_1(x,y)+$ $+t_2(x,y)$, де $t_1(x,y)$ – основне поле, що відповідає задачі для пластини без включень

$$t_1(x,y)=\frac{1}{2\pi\lambda}\sum_{k=1}^{M} q_k K_0\left(\sqrt{\frac{\alpha}{\lambda\delta}}\sqrt{(x-x_k)^2+(y-y_k)^2}\right)+t_e, \qquad /3/$$

а $t_2(x,y)$ – збурення температурного поля, викликане наявністю включень, яке є загальним розв"язком однорідного рівняння Гельмгольца

$$\Delta t_2(x,y)-\frac{\alpha}{\lambda\delta}t_2(x,y)=0. \qquad /4/$$

Вважаємо ширину включень настільки малою, що їх можна моделювати стрибками температури та теплового потоку на серединній лінії. Введемо у розгляд функції стрибків збуреного температурного поля та теплового потоку

$$f_1(x)=t_2^+(x)-t_2^-(x), \quad f_2(x)=\lambda\frac{\partial t_2^+}{\partial y}(x)-\lambda\frac{\partial t_2^-}{\partial y}(x), \qquad /5/$$

причому $f_1(x)=f_2(x)\equiv 0$ при $x\in L''$.

Застосовуючи до /4/, /5/ інтегральне перетворення Фур"є і враховуючи, що збурене поле з огляду на локальність заникає на нескінченності, одержуємо

$$t_2(x,y)=\sqrt{\frac{\alpha}{\lambda\delta}}\frac{y}{2\pi}\int_{L'} f_1(\xi)\frac{K_1\left(\sqrt{\frac{\alpha}{\lambda\delta}}\sqrt{y^2+(\xi-x)^2}\right)}{\sqrt{y^2+(\xi-x)^2}}d\xi-$$

$$-\frac{1}{2\pi\lambda}\int_{L'} f_2(\xi)K_0\left(\sqrt{\frac{\alpha}{\lambda\delta}}\sqrt{y^2+(\xi-x)^2}\right)d\xi. \qquad /6/$$

Підставляючи /3/, /6/ у рівняння математичної моделі включення [6], одержуємо такі сингулярні інтегральні рівняння /СІР/:

$$\int_{-1}^{\tilde{x}}\tilde{f}_1'(\xi)d\xi-\frac{\sqrt{\eta B_i}\,\omega\psi(x)}{\gamma\pi}\int_{-1}^{1}f_1'(\xi)\int_{\xi}^{1}\frac{K_1(\eta Bi\,|\rho-\tilde{x}|)}{|\rho-\tilde{x}|}d\rho d\xi=\Phi_1(x). \qquad /7/$$

$$\int_{-1}^{\tilde{x}}\hat{f}_2(\xi)d\xi-\frac{\sqrt{\eta Bi}\,\gamma\omega\psi(x)}{\pi}\int_{-1}^{1}\tilde{f}_2(\xi)\,\mathrm{sgn}(\xi-\tilde{x})K_1(\sqrt{\eta Bi}\,|\xi-\tilde{x}|)d\xi+$$

$$+\frac{\eta Bi_0\omega}{\pi}\int_{-1}^{\tilde{x}}\psi(\xi)\int_{-1}^{1}\tilde{f}_2(\rho)K_0(\sqrt{\eta Bi}\,|\rho-\xi|)d\rho d\xi=\Phi_2(x)+Q_n^-, \qquad /8/$$

$$x\in[a_n,b_n]$$

з додатковими умовами

$$\int_{-1}^{1} \tilde{f}_1'(\xi)\, d\xi = 0, \qquad /9/$$

$$\int_{-1}^{1} \tilde{f}_2(\xi)\left[1+\frac{\eta Bi_0 \omega}{\pi}\int_{-1}^{1}\psi(\rho) K_0\left(\sqrt{\eta Bi}\,|\rho-\xi|\right)d\rho\right]d\xi = Q_1 - Q_n^{+} + Q_n^{-}, \qquad /10/$$

де $\tilde{x} = \frac{x}{a}$, $\eta = \frac{a}{\delta}$, $\omega = \frac{h_0}{a}$, $Bi = \frac{\alpha a}{\lambda}$, $Bi_0 = \frac{\alpha_0 a}{\lambda_0}$, $\gamma = \frac{\lambda_0}{\lambda}$,

$\tilde{f}_1(x) = \frac{a\lambda}{q_1} f_1(x)$, $\tilde{f}_2(x) = \frac{a}{q_1} f_2(x)$ – безрозмірні величини.

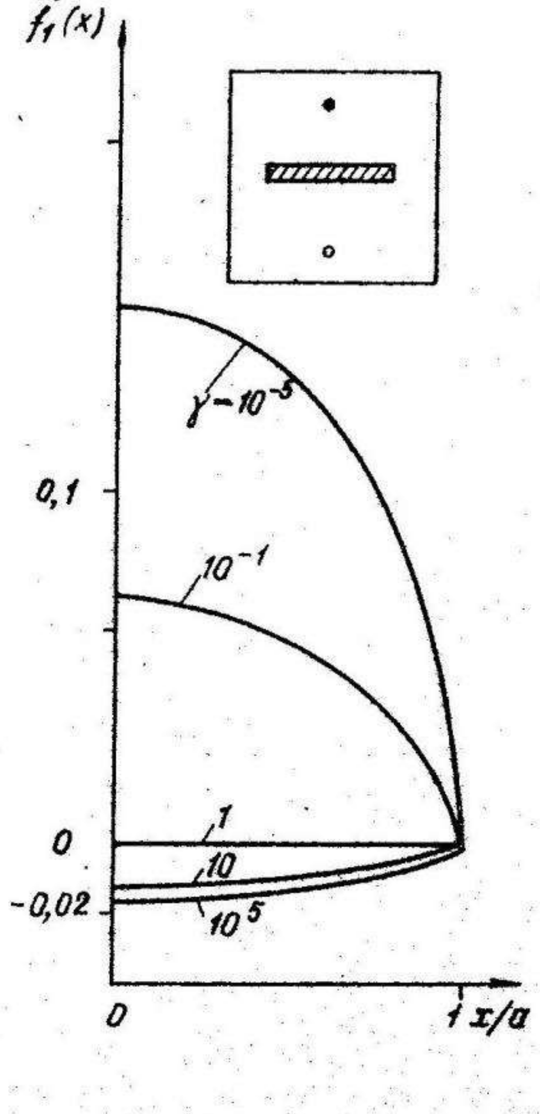

Рис. I.

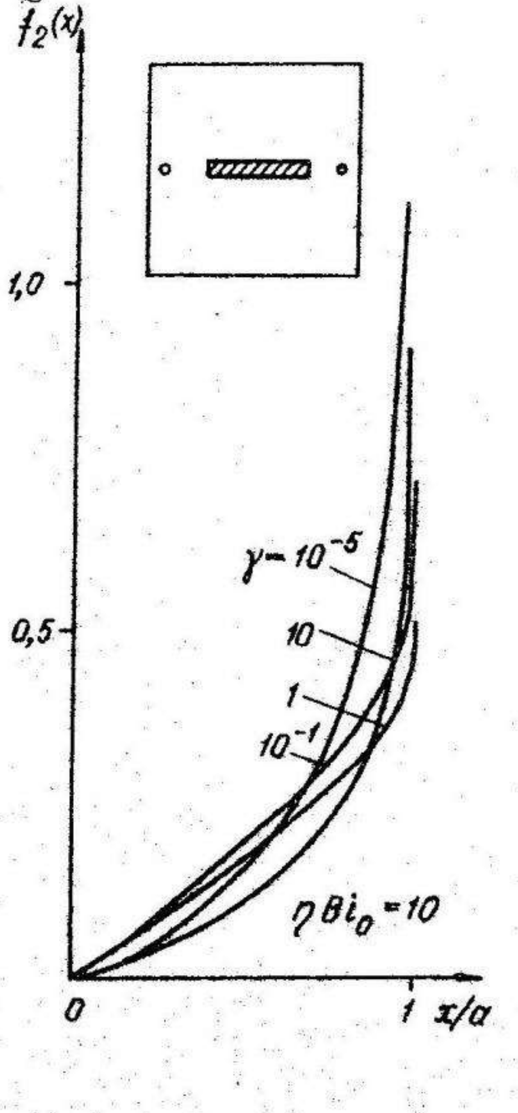

Рис. 2.

Для визначення торцьових констант $Q_n^{\pm}$ застосовано методику праці [I]

$$Q_n^{+}=\frac{1}{q_1}\int_{-h}^{h}\lambda\frac{\partial t}{\partial x}(b_n,y)\,dy,\quad Q_n^{-}=\frac{1}{q_2}\int_{-h}^{h}\lambda\frac{\partial t}{\partial x}(a_n,y)\,dy. \qquad /II/$$

СІР /7/, /8/ з додатковими умовами /9/, /I0/ розв"язуємо числово-аналітично із застосуванням методу колокацій [I0]. На ЕОМ ЕС-I022 проведені розрахунки стрибків $f_1(x),\ f_2(x)$ збуреного поля на одному включенні $L'=[-a_1,a]$ при таких значеннях параметрів: $\omega=0{,}1,\ Bi=0,\ \eta Bi_0=10^{-5}\div10^{5},\quad \gamma=10^{-5}\div10^{5}$ для двох схем навантаження: а/ джерело q у точці $(0,2a)$, стік q у точці $(0,-2a)$ /рис. I/; б/ джерело q у точці $(2a,0)$, стік $-q$ у точці $(-2a,0)$ /рис. 2/. Зауважимо, що при розрахунку для першої схеми навантаження маємо $f_2(x)=0$, а для другої $f_1(x)=0$.

Список літератури: I. А л е к с а н д р о в В.М., М х и т а р я н С.М. Контактные задачи для тел с тонкими покрытиями и прослойками. - М.: Наука, I983. - 488 с. 2. Г р и л и ц к и й Д.В., Д р а г а н М.С., О п а н а с о в и ч В.К. Температурное поле и термоупругое состояние пластинки с тонкостенным упругим включением. - Прикл. мат. и механика, I980, т.44, № 2, с.338-345. 3. К и т Г.С., К р и в ц у н М.Г. Плоские задачи термоупругости для тел с трещинами. - К.: Наукова думка, I983, - 278 с. 4. П і с к о з у б Й.З., С у л и м Г.Т. Вплив лінійного включення на температурне поле від джерела тепла. - Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат., I979, вип.I6, с.5. 5. П і с к о з у б Й.З., С у л и м Г.Т. Вплив лінійного включення на температурне поле від диполя тепла. - Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат., I98I, вип. I7, с.82-87. 6. П и с к о з у б И.З С у л и м Г.Т. Температурные условия взаимодействия среды с тонким включением. - Инж.-физ. журн., I983, т.44, с. № 6, с.977-983. 7. П о д с т р и г а ч Я.С. Температурное поле в системе твердых тел, сопряженных с помощью тонкого промежуточного слоя. - Инж. физ. журн., I963, т.6, № I0, с.I29-I36. 8. П о д с т р и г а ч Я.С., К о л я н о Ю.М. Неустановившиеся температурные поля и напряжения в тонких пластинках. - К.: Наукова думка, I972. - 308 с. 9. С у л и м Г.Т. Влияние формы тонкого включения на распределение температуры в кусочно-однородной плоскости. – Инж.-физ. журн., 1979, т.37, № 6, с.1124-1139. 10. Theocaris P.S. Numerical Solution of Singular Integral Equations: Methods.- Journal of the Eng. Mech. Div., Proc. of the Amer. Soc. of Civil Eng., 1977, vol. 107, No Em 5, p. 733-752.

Стаття надійшла до редколегії 29.02.84

УДК 517.9

В.А.Галазюк, Г.О.Гірняк

ДОСЛІДЖЕННЯ НЕСТАЦІОНАРНОГО ТЕМПЕРАТУРНОГО ПОЛЯ В БЕЗМЕЖНОМУ ШАРІ З КОЛОВОЮ ЛІНІЄЮ РОЗДІЛУ КРАЙОВИХ УМОВ МЕТОДОМ ПОЛІНОМІВ ЧЕБИШЕВА-ЛАГЕРРА

Лінійні задачі теплопровідності для напівобмежених областей зі змішаними граничними умовами ефективно розв"язують методом парних інтегральних рівнянь [2]. Однак під час розв"язування нестаціонарних задач за допомогою інтегрального перетворення Лапласа за часовою змінною ядра отриманих парних інтегральних рівнянь залежать від комплексного параметра перетворення, внаслідок чого розв"язування цих рівнянь числовими методами практично неможливе.

Пропонуємо інший метод розв"язування нестаціонарних задач теплопровідності зі змішаними крайовими умовами для напівобмежених областей, що базується на методі поліномів Чебишева-Лагерра [1]. Розглянемо нестаціонарну задачу теплопровідності для безмежного шару з коловою лінією розділу крайових умов. Нехай на верхній площині цього шару товщини $2h$, віднесеного до циліндричної системи координат (r, φ, z), у крузі радіуса $r = R$ задана температура $T_0(r,t)\, S_+(t)$, а поза ним відбувається теплообмін за законом Ньютона з зовнішнім середовищем, температура якого $T_1(r,t)\, S_+(t)$. На нижній площині шару відбувається теплообмін за законом Ньютона з середовищем з нульовою температурою. Темпе-