ратуры в кусочно-однородной плоскости. – Инж.-физ. журн., 1979, т.37, № 6, с.1124-1139. 10. Theocaris P.S. Numerical Solution of Singular Integral Equations: Methods.- Journal of the Eng. Mech. Div., Proc. of the Amer. Soc. of Civil Eng., 1977, vol. 107, No Em 5, p. 733-752.

Стаття надійшла до редколегії 29.02.84

УДК 517.9

В.А.Галазюк, Г.О.Гірняк

ДОСЛІДЖЕННЯ НЕСТАЦІОНАРНОГО ТЕМПЕРАТУРНОГО ПОЛЯ В БЕЗМЕЖНОМУ ШАРІ З КОЛОВОЮ ЛІНІЄЮ РОЗДІЛУ КРАЙОВИХ УМОВ МЕТОДОМ ПОЛІНОМІВ ЧЕБИШЕВА-ЛАГЕРРА

Лінійні задачі теплопровідності для напівобмежених областей зі змішаними граничними умовами ефективно розв"язують методом парних інтегральних рівнянь [2]. Однак під час розв"язування нестаціонарних задач за допомогою інтегрального перетворення Лапласа за часовою змінною ядра отриманих парних інтегральних рівнянь залежать від комплексного параметра перетворення, внаслідок чого розв"язування цих рівнянь числовими методами практично неможливе.

Пропонуємо інший метод розв"язування нестаціонарних задач теплопровідності зі змішаними крайовими умовами для напівобмежених областей, що базується на методі поліномів Чебишева-Лагерра [1]. Розглянемо нестаціонарну задачу теплопровідності для безмежного шару з коловою лінією розділу крайових умов. Нехай на верхній площині цього шару товщини $2h$, віднесеного до циліндричної системи координат (r, φ, z), у крузі радіуса $r = R$ задана температура $T_0(r,t) S_+(t)$, а поза ним відбувається теплообмін за законом Ньютона з зовнішнім середовищем, температура якого $T_1(r,t) S_+(t)$. На нижній площині шару відбувається теплообмін за законом Ньютона з середовищем з нульовою температурою. Температурне поле в шарі визначаємо, розв"язуючи осесиметричну задачу:

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial T}{\partial\rho}\right)+\frac{\partial^2 T}{\partial\gamma^2}=\frac{\partial T}{\partial\tau}; \qquad /\text{I}/$$

$$T(\rho,\gamma,\tau)=0, \quad \tau=0; \qquad /2/$$

$$\left\{\frac{\partial T}{\partial\gamma}-Bi^-(T-T_1(\rho,\tau)S_+(\tau))-(T-T_0(\rho,\tau)S_+(\tau))\right\}\times$$

$$\times S_+(R/h-\rho)-\frac{\partial T}{\partial\gamma}+Bi^-(T-T_1(\rho,\tau)S_+(\tau))=0,\ \gamma=-1; \qquad /3/$$

$$\frac{\partial T}{\partial\gamma}+Bi^+T=0, \quad \gamma=1 \qquad /4/$$

$$\lim_{\rho\to\infty}T(\rho,\gamma,\tau)=0, \qquad /5/$$

де $\tau=F_0=at/h^2$ – безрозмірний час; t – час; $\rho=r/h,\ \gamma=z/h$ – відповідно радіальна й осьова безрозмірні координати; $Bi^+,\ Bi^-$ – коефіцієнти Біо середовищ; $S_+(x)=\{1,x>0;\ 0,\ x\leq 0\}$.

Зобразимо шукану функцію температури $T(\rho,\gamma,\tau)$ ортогональним рядом за поліномами Чебишева-Лагерра [I] :

$$T(\rho,\gamma,\tau)=\lambda\sum_{n=0}^{\infty}T_n(\rho,\gamma)L_n(\lambda\tau), \qquad /6/$$

де $\lambda>0,\ L_n(\lambda\tau)$ – поліноми Чебишева-Лагерра. При цьому, зважаючи на ортогональність $L_n(\lambda\tau)$, маємо

$$T_n(\rho,\gamma)=\int_0^{\infty}T(\rho,\gamma,\tau)e^{-\lambda\tau}L_n(\lambda\tau)d\tau \quad (n=0,1,2,\ldots). \qquad /7/$$

Очевидно, що рівність /7/ можна розглядати як інтегральне перетворення функції $T(\rho,\gamma,\tau)$, а ряд /6/-як формулу обернення цього перетворення.

Помножимо рівняння /I/ і крайові умови /3/-/5/ на ядро перетворення $e^{-\lambda\tau}L_n(\lambda\tau)$ і виконаємо інтегрування в межах $[0,\infty]$. Враховуючи рівність /7/, початкову умову /2/ і властивості поліномів Чебишева-Лагерра, із задачі /I/-/5/ дістаємо

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial T_n}{\partial\rho}\right)+\frac{\partial^2 T_n}{\partial\gamma^2}-\gamma T_n=\lambda\sum_{m=0}^{n-1}T_m \quad (n=0,1,2,\dots);$$

$$\left\{\frac{\partial T_n}{\partial\gamma}-B\bar{i}\,(T_n-T_{1n})-(T_n-T_{0n})\right\}\times S_+(R/h-\rho)-$$

$$-\frac{\partial T_n}{\partial\gamma}+B\bar{i}\,(T_n-T_{1n})=0,\quad \gamma=-1;$$

$$\frac{\partial T_n}{\partial\gamma}+B\overset{+}{i}\,T_n=0,\qquad \gamma=1;$$

$$\lim_{\rho\to\infty}T_n(\rho,\gamma)=0,$$

де T_{0n}, T_{1n} – перетворення функцій $T_0(\rho,\tau)$ і $T_1(\rho,\tau)$ за Чебишевим-Лагерром.

До отриманої задачі застосуємо інтегральне перетворення Ханкеля за змінною ρ. Якщо

$$T_n^H(\gamma)=\int_0^\infty T_n(\rho,\gamma)\rho J_0(\xi\rho)d\rho,$$

де $J_0(\xi,\rho)$ – функція Беселя нульового порядку; ξ – параметр перетворення, то одержимо

$$\frac{d^2T_n^H}{d\gamma^2}-(\lambda+\xi^2)T_n^H=\lambda\sum_{m=0}^{n-1}T_m^H \quad (n=0,1,2,\dots); \qquad /8/$$

$$B\bar{i}T_n^H-\frac{dT_n^H}{d\gamma}+\int_0^{R/h}\left\{\frac{\partial T_n}{\partial\gamma}-(B\bar{i}+1)T_n\right\}\rho J_0(\xi\rho)d\rho=$$

$$=B\bar{i}T_{1n}^H-\int_0^{R/h}(B\bar{i}\,T_{1n}+T_{0n})\rho J_0(\xi\rho)d\rho,\ \gamma=-1; \qquad /9/$$

$$\frac{dT_n^H}{d\gamma}+B\overset{+}{i}T_n^H=0,\ \gamma=1. \qquad /10/$$

Загальний розв"язок трикутної системи звичайних диференціальних рівнянь /8/ запишемо у вигляді

$$T_n^H(\gamma)=\sum_{p=0}^{n}A_{n-p}(\xi)G_p(\xi,\gamma) \qquad (n=0,1,2,\dots), \qquad /11/$$

де $A_{n-p}(\xi)$ – невідомі функції, які визначають із умови /9/; $G_p(\xi,\gamma)$ $(p=\overline{0,n})$ – повна система розв"язків спеціально побудованої задачі для рівняння

$$\frac{d^2G_p}{d\gamma^2}-(\lambda+\xi^2)G_p=\lambda\sum_{m=0}^{p-1}G_m. \qquad /12/$$

Враховуючи формулу обернення інтегрального перетворення Ханкеля, із /11/ маємо

$$T_n(\rho,\gamma)=\sum_{p=0}^{n}\int_0^\infty A_{n-p}(\xi)G_p(\xi,\gamma)\xi J_0(\xi\rho)d\xi. \qquad /13/$$

Нехай функції $G_p(\xi,\gamma)$ задовольняють умови

$$(1+Bi)G_p(\xi_1-1)-\frac{dG_p(\xi_1-1)}{d\gamma}=1;$$
$$\frac{dG_p(\xi,1)}{d\gamma}+Bi^{+}G_p(\xi,1)=0. \qquad /14/$$

Тоді /10/ виконується автоматично, а із умови /9/, враховуючи вирази /11/ і /13/, маємо

$$\sum_{p=0}^{n}\left\{A_{n-p}(\xi)(1-G_p(\xi_1-1))-\int_0^\infty A_{n-p}(u)\mathcal{K}(u,\xi)du\right\}=F_n(\xi)\ (n=0,1,\ldots),$$

де

$$\mathcal{K}(u,\xi)=u\int_0^{R/h}\rho J_0(u,\rho)J_0(\xi\rho)d\rho;$$
$$F_n(\xi)=Bi\,T_{1n}^{H}-\int_0^{R/h}(Bi\,T_{1n}+T_{0n})\rho J_0(\xi\rho)d\rho.$$

Послідовним відніманням цю систему зведемо до послідовності інтегральних рівнянь Фредгольма другого роду на безмежному інтервалі:

$$g(\xi)A_0(\xi)-\int_0^\infty A_0(u)\mathcal{K}(u,\xi)du=F_0(\xi),$$
$$g(\xi)A_n(\xi)-\int_0^\infty A_n(u)\mathcal{K}(u,\xi)du=F_n(\xi)-F_{n-1}(\xi)-$$
$$-\sum_{p=0}^{n-1}A_{n-p-1}(\xi)(G_{p+1}(\xi_1-1)-G_p(\xi_1-1))\ (n=1,2,3,\ldots), \qquad /15/$$

де

$$g(\xi)=1-G_0(\xi_1-1).$$

Для розв"язування інтегральних рівнянь /15/ розглянемо рівняння виду

$$g(\xi)A_n(\xi)-\int_0^\infty A_n(u)u\left\{\int_0^{R/h}\rho J_0(\xi\rho)J_0(u\rho)d\rho\right\}du=\varphi_n(\xi) \qquad /16/$$

Якщо

$$R_n(\rho)=\int_0^\infty A_n(u)u\,J_0(u\rho)du,$$

то

$$A_n(\xi)=\int_0^\infty R_n(\rho)\rho\,J_0(\xi\rho)d\rho, \qquad /17/$$

і з рівняння /16/ для функції $R_n(\rho)$ маємо

$$g(\xi)\int_0^\infty R_n(\rho)\rho\,J_0(\xi\rho)d\rho-\int_0^{R/h}R_n(\rho)\rho\,J_0(\xi\rho)d\rho=\varphi_n(\xi). \qquad /18/$$

Представимо функцію $\rho R_n(\rho)$ у вигляді ряду за поліномами Чебишева-Лагерра:

$$\rho R_n(\rho)=e^{-\mu\rho}\sum_{s=0}^\infty a_s^n L_s(\mu\rho),\ \mu>0. \qquad /19/$$

При цьому для коефіцієнтів a_s^n з рівняння /18/ отримаємо систему лінійних алгебраїчних рівнянь

$$\sum_{s=0}^\infty a_s^n b_{i,s}=g_i^n \qquad (i,n=0,1,2,\dots),$$

де

$$b_{i,s}=\int_0^\infty g(\xi)e^{-\beta\xi}L_i(\beta\xi)\left(\xi/\sqrt{\xi^2+\mu^2}\right)^{s+1}P_s\left(\xi/\sqrt{\xi^2+\mu^2}\right)d\xi-$$

$$-\int_0^{R/h}e^{-\mu\rho}L_s(\mu\rho)\left(\rho/\sqrt{\rho^2+\beta^2}\right)^{i+1}P_i\left(\rho/\sqrt{\rho^2+\beta^2}\right)d\rho;$$

$$g_i^n=\int_0^\infty e^{-\beta\xi}L_i(\beta\xi)F_n(\xi)d\xi-\sum_{p=0}^{n-1}a_s^{n-p-1}\int_0^\infty e^{-\beta\xi}L_i(\beta\xi)\times$$

$$\times P_s\left(\xi/\sqrt{\xi^2+\mu^2}\right)\left(\xi/\sqrt{\xi^2+\mu^2}\right)^{s+1}\left(G_{p+1}(\xi_1-1)-G_p(\xi_1-1)\right)d\xi;$$

$P_s\left(\xi/\sqrt{\xi^2+\mu^2}\right)$ – поліноми Лежандра; β,μ – масштабні множники.

Таким чином, на основі /17/ і /19/ одержимо зображення невідомої функції $A_n(\xi)\ (n=0,1,2,\dots)$ у вигляді ряду

$$A_n(\xi)=\sum_{s=0}^\infty a_s^n\left(\xi/\sqrt{\xi^2+\mu^2}\right)^{s+1}P_s\left(\xi/\sqrt{\xi^2+\mu^2}\right). \qquad /20/$$

Остаточно функцію температури з врахуванням /6/, /13/ і /20/ вобразимо у такому вигляді:

$$T(\rho,\gamma,\tau)=\lambda\sum_{n=0}^{\infty}L_n(\lambda\tau)\sum_{p=0}^{n}\sum_{s=0}^{\infty}a_s^n\int_0^{\infty}\left(\xi/\sqrt{\xi^2+\mu^2}\right)^{s+1}P_s\left(\xi/\sqrt{\xi^2+\mu^2}\right)\xi G_p(\xi,\gamma)J_0(\xi\rho)d\xi.$$

Функції $G_p(\xi,\gamma)$ знаходимо, розв"язуючи крайову задачу /I2/, /I4/. Записуємо

$$G_p(\xi,\gamma)=\sum_{m=0}^{\infty}\varphi_m(-1)\varphi_m(\gamma)(\xi^2+\varkappa_m^2)^p/(\xi^2+\varkappa_m^2+\lambda)^{p+1},$$

де $\varphi_m(\gamma)(m=0,1,\dots)$ – ортонормована система власних функцій задачі Штурма/Ліувілля; $\varkappa_m$ – власні значення цієї задачі

$$\varphi_m(\gamma)=D_m(\sin\delta_m\cdot\cos\varkappa_m\gamma+\cos\delta_m\cdot\sin\varkappa_m\gamma),$$

де

$$\sin\delta_m=(\varkappa_m\cos\varkappa_m+Bi^+\sin\varkappa_m)/\sqrt{\varkappa_m^2+Bi^{+2}};$$

$$\cos\delta_m=(\varkappa_m\sin\varkappa_m-Bi^+\cos\varkappa_m)/\sqrt{\varkappa_m^2+Bi^{+2}};$$

$$D_m=4(\varkappa_m/(\varkappa_m-2\sin(2\varkappa_m)+4\sin(2\varkappa_m)\sin\delta_m))^{1/2}.$$

Власні значення $\varkappa_m$ $(m=0,1,2\dots)$ знаходимо з рівняння

$$tg(2\varkappa_m)/\varkappa_m=(1+Bi^++Bi^-)/(\varkappa_m^2-Bi^+(1+Bi^-)).$$

Запропоновану методику легко узагальнити на задачу про нагрів шару по кільцю і періодичній системі кілець.

Список літератури: I. Г а л а з ю к В.А. Метод поліномів Чебишева-Лагерра в змішаній задачі для нелінійного диференціального рівняння II порядку з постійними коефіцієнтами. – Доп. АН УРСР. Сер. А, 1981, № I, с.3-6. 2. У ф л я н д Я.С. Метод парных уравнений в задачах математической физики. – Л.: Наука, 1977. – 157 с.

Стаття надійшла до редколегії 27.02.84