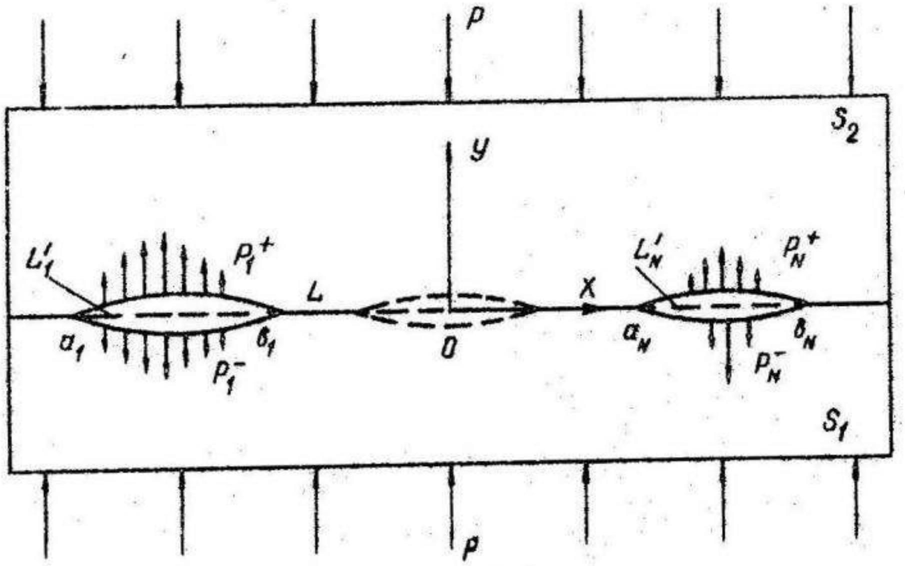
УДК 539.3

Г.Т.Сулим, Р.М.Мартиняк

ЗАДАЧА ПОРУШЕННЯ КОНТАКТУ ПРИ СТИСКУ ПРУЖНИХ ПІВПЛОЩИН

Розглянемо плоску задачу про пружну рівновагу двох півплощин S_1 і S_2, що контактують без тертя, при наявності зон розшарування на лінії розділу /див. рисунок/. На безмежності півплощини



стиснуті рівномірно розподіленим зусиллям p. Припускаємо, що на лінії L розділу матеріалів під дією зусиль P_n^+ і P_n^-, прикладених на L_n'' $(n=\overline{1,N})$ до верхнього і нижнього півпросторів, порушується механічний контакт – утворюються щілини вздовж відрізків $L'_n=[a_n,b_n]$ так, що $L''_n\subset L'_n$, $\bigcup\limits_{n=1} L_n = L$. Пружні сталі матеріалів верхньої та нижньої півплощин позначимо E_2,ν_2 та E_1,ν_1. Знайдемо зони порушення контакту L'_n і форму утворених щілин.

Запишемо граничні умови задачі на лінії L

$$\tau_{xy1}(x,0)=\tau_{xy2}(x,0)=0,\quad (x\in L); \qquad /1/$$

$$\sigma_{y1}(x,0)=-p_n^-(x),\ \sigma_{y2}(x,0)=-p_n^+(x),\quad (x\in L'); \qquad /2/$$

$$v_1'(x,0)=v_2'(x,0),\ \sigma_{y1}=\sigma_{y2}<0,\quad (x\in L/L'), \qquad /3/$$

причому $p_n^{\pm}(x)=0$ при $x\in L'/L''$. Крім того, $\sigma_{y1}(x,-\infty)=\sigma_{y2}(x,+\infty)=-p$. В /1/ – /3/ позначення напружень і переміщень загальноприйняті [2], індекси 1, 2 вказують відповідно на приналежність до нижньої та верхньої півплощини.

Напруження і переміщення виражаються через комплексні потенціали

$$\sigma_{yk}-i\tau_{xyk}=\Phi_k(z)-\Phi_k(\bar z)+(z-\bar z)\overline{\Phi_k'(z)}+A_k,$$

$$2\mu_k(u_k'+iv_k')=\varkappa_k\Phi_k(z)+\Phi_k(\bar z)-(z-\bar z)\overline{\Phi_k'(z)}+B_k,\quad (z\in S_k;\ k=1,2), \qquad /4/$$

де $A_1=A_2=-p$, $B_k=-p(\varkappa_k-3)/4$; голоморф[illegible] заникаючі на безмежності функції $\Phi_k(z)$, характеризують зб[illegible], що вносять у напружено-деформований стан щілини та їх навантаженням.

Умова /1/ відсутності тертя на лінії розділу [2]

$$\Phi_1(z)=-\bar\Phi_1(z),\quad \Phi_2(z)=-\bar\Phi_2(z). \qquad /5/$$

Розглянемо допоміжну задачу. Введемо функції стрибків нормальних зміщень і нормальних напружень на L

$$v_1'(x,0)-v_2'(x,0)=f_4(x),\quad \sigma_{y1}(x,0)-\sigma_{y2}(x,0)=f_1(x) \qquad /6/$$

такі, що $f_\tau(x)=f_{\tau,n}(x)$ $(x\in L'_n)$, $f_\tau(x)=0\ (x\in L/L';\ \tau=1,4)$.

У точках змикання повинні виконуватись умови

$$v_1(a_n,0)-v_2(a_n,0)=v_1(b_n,0)-v_2(b_n,0)=0\ \ (n=\overline{1,N}). \qquad /7/$$

Підставивши /4/ у /6/ і врахувавши /5/, прийдемо до задач лінійного спряження відносно певних комбінацій функцій $\Phi_1(z), \Phi_2(z)$. Їх розв"язки на L записуємо як

$$\Phi_1^{\pm}(x)=-\frac{1}{2(C_1+C_2)}\left[\pm C_1 f_1+f_4+\frac{1}{\pi i}\int_{L'}\frac{(C_1 f_1 \pm f_4)dt}{t-x}\right],$$

$$\Phi_2^{\pm}(x)=-\frac{1}{2(C_1+C_2)}\left[\pm C_2 f_1-f_4+\frac{1}{\pi i}\int_{L'}\frac{(C_2 f_1 \mp f_4)dt}{t-x}\right], C_k=(1+\varkappa_k)/4\mu_k \ (k=1,2). \qquad /8/$$

Задовольнимо з допомогою /4/, /8/ граничну умову /2/. Тоді одержимо сингулярне інтегральне рівняння для визначення невідомих стрибків зміщень

$$\frac{1}{\pi}\int_{L'}\frac{f_4(t)dt}{t-x}=F(x), \quad (x\in L_n,\ n=\overline{1,N}), \qquad /9/$$

де $F(x)=C_1 P_n^{+}(x)+C_2 P_n^{-}(x)-(C_1+C_2)P$.

Внаслідок /7/ функції $f_{4,n}(x)$ повинні задовольняти умови

$$\int_{L_n} f_{4,n}(t)dt=0, \qquad (n=\overline{1,N}). \qquad /10/$$

Ті ж рівняння можна отримати, виходячи з розв"язку задачі пружної рівноваги кусково-однорідної площини з тонкостінними включеннями [6], які моделюються функціями стрибків $f_1^*(x)=f_1(x)-if_2(x)$ напружень $f_3^*(x)=f_3(x)+if_4(x)$ і похідних від зміщень на їх серединних лініях. Тоді граничні умови

$$f_1(x)=P_n^{+}(x)-P_n^{-}(x)\ (x\in L');\ f_2(x)=0,\ \tau_{x_1y_1}(x)=0\ (x\in L);\ \sigma_{y_1}(x)=-P_n^{-}(x)\ (x\in L'). \qquad /11/$$

Підставивши в /11/ вирази /1.5/ із праці [6], дістанемо систему інтегральних рівнянь для функцій $f_3(x)$ та $f_4'(x)$. Виключаючи з них $f_3(x)$, прийдемо до /9/.

Розв"язок /9/, який з фізичних міркувань повинен бути обмеженим у точках a_n, b_n, записуємо у вигляді [3]

$$f_4(x)=\frac{X_0(x)}{\pi i}\int_{L'}\frac{F(t)dt}{X_0(t)(t-x)},\quad X_0(z)=\prod_{k=1}^{N}(z-a_k)^{\frac{1}{2}}(z-b_k)^{\frac{1}{2}}. \qquad /12/$$

Обмежений розв"язок /I2/ існує тоді і тільки тоді, коли права частина /9/ задовольняє умови [3]

$$\int_{L'} \frac{t^n F(t)dt}{X_0(t)} = 0, \quad (n=0,1,\dots,N-1). \qquad /I3/$$

Таким чином, /I2/ дає розв"язок поставленої задачі у квадратурах. Для визначення $2N$ наперед невідомих сталих a_n, b_n $(n=\overline{1,N})$ маємо $2N$ додаткових умов /I0/ і /I3/.

Подібні задачі, але в дещо іншій постановці, розглядали С.Г.Міхлін та І.А.Прусов [I, 4]. Проте вони, використовуючи дещо інші методи, розв"язки шукали в класі функцій, необмежених у заданих наперед точках a_n, b_n, тобто для щілин із затиснутими краями. Моделювання щілин стрибками зміщень дає змогу достатньо просто записати розв"язок задачі і надає йому більш зрозумілої фізичної інтерпретації.

Як приклад розглянемо випадок однієї щілини $(N=1)$, що утворюється під дією двох зосереджених сил Q_1 і Q_2, прикладених до границь нижньої і верхньої півплощин відповідно в точці з абсцисою $x=0$. Внаслідок симетрії приймемо $a_1=-a$, $b_1=a$. Рівняння /9/ набере вигляду

$$\frac{1}{\pi i}\int_{-a}^{a}\frac{f_4(t)dt}{t-x} = (c_1Q_1+c_2Q_2)\,\delta(x) - (c_1+c_2)P,$$

де $\delta(x)$ – дельта-функція, а його розв"язок згідно з /I2/ запишемо як

$$f_4(x) = i\sqrt{a^2-x^2}\,(c_1Q_1+c_2Q_2)/\pi a x.$$

Умова /I0/ задовольняється тотожно, а з /I3/ знаходимо півдовжину утвореної щілини $a=(c_1Q_1+c_2Q_2)/\pi(c_1+c_2)P$. У випадку однакових півплощин та $Q_1=Q_2$ це дає відомий результат [5].

Коли зовнішні навантаження повторюються вздовж осі Ox з періодом d, тобто у випадку періодичної задачі, ядро Коші $\frac{1}{z-x}$ у /8/ для комплексних потенціалів слід замінити ядром Гільберта $\frac{\pi}{d}ctg\frac{\pi(t-x)}{d}$. Тоді основне рівняння для стрибків зміщень набере вигляду

$$\frac{1}{\pi i}\int_{L}f_4(t)\,ctg\frac{\pi(t-x)}{d}\,dt=\frac{d}{\pi}F(x),\ (x\in L_n;\ n=\overline{1,N}),$$

розв"язок якого відомий [7]. Наведемо розв"язок аналогічної задачі про періодичне порушення контакту стиснутих півплощин системою сил Q_1 та Q_2, прикладених до країв півплощин у точках $x=\pm kd$ $(k=0,1,2,...)$:

$$f_4(x)=\frac{i}{d}(c_1Q_1+c_2Q_2)\frac{\sqrt{\sin\frac{\pi(a-x)}{d}\sin\frac{\pi(a+x)}{d}}}{\sin\frac{\pi a}{d}\cdot\sin\frac{\pi x}{d}},\ a=\frac{d}{\pi}\arcsin\frac{c_1Q_1+c_2Q_2}{pd(c_1+c_2)}.$$

Аналогічно будують розв"язки задач про неповний контакт півплощин, коли тіла взаємодіють із тертям. Використаний підхід можна застосувати до розв"язку контактних задач для тіл з виступами, задач розклинювання.

Список літератури: I. Михлин С.Г. Интегральные уравнения. - М.; Л.: Гостехиздат, 1949. - 380 с. 2. Мусхелишвили Н.И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. - М.: Наука, 1966. - 708 с. 3. Мусхелишвили Н.И. Сингулярные интегральные уравнения. - М.: Наука, 1968. - 511 с. 4. Прусов И.А. Некоторые задачи термоупругости. - Минск: Изд-во Белорусск. ун-та, 1972. - 200 с. 5. Седов Л.И. Механика сплошной среды. - М.: Наука, 1976. Т.2. - 584 с. 6. Сулим Г.Т. Концентрация напряжений возле тонкостенных линейных включений. - Прикладная механика, 1981, т.17, № 11, с.82-89. 7. Чибрикова Л.И. О решении некоторых полных сингулярных интегральных уравнений. - Уч. зап. Казанского ун-та, 1962, т.122, № 3, с.95-124.

Стаття надійшла до редколегії 14.09.82