

В.К.Оненасович, М.С.Драган
 ПЕРІОДИЧНА СИСТЕМА ПАРАЛЕЛЬНИХ
 ТОНКИХ ПРУЖНИХ ВКЛЮЧЕНЬ У ПЛАСТИНІ

Розглянемо періодичну систему тонких прямолінійних ізотропних пружних включень довільної орієнтації в ізотропній пластині, коли центри включень знаходяться на дійсній осі Ox /рис. 1/. Нехай $2l$ - довжина кожного включення; $2h$ - його ширина; α - кут, який утворює довільне включення з віссю Ox ; d - відстань між центрами сусідніх включень. Припускаємо, що на середину площину пластини діє зовнішнє силове навантаження, а на берегах включень має місце ідеальний механічний контакт.

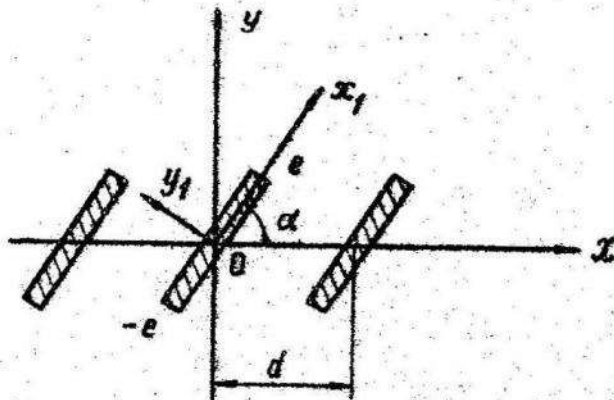


Рис. 1.

Центр кожного включення приймаємо за початок локальної системи координат з дійсною віссю, направленою вздовж включення. Величини, які характеризують тонкі включення, позначимо нульовим індексом, а сегмент дійсної осі $[-l, l]$ - через L .

Умови механічного контакту включень з матрицею матимуть виг-

ляд

$$(\epsilon_y - i\tau_{xy})_0^{\pm} = (\epsilon_y - i\tau_{xy})_0^{\pm}; (u + iv)_0^{\pm} - i\epsilon_0^{\pm} = (u + iv)^{\pm} \quad \text{на } L, \quad |I|$$

де знаку плюс відповідає граничне значення величини при прямуванні до локальної дійсної осі зліва, а знаку мінус - справа; ϵ_y , τ_{xy} - компоненти тензора напружень у локальній системі координат; u і v - компоненти вектора переміщення; ϵ_0 - поворот включення як жорсткого цілого.

Враховуючи відомі результати у випадку одного включення [3] і беручи до уваги метод суперпозиції, комплексні потенціали Колозова-Мусхелішвілі $\Phi(z)$ і $\Psi(z)$ для нашої задачі представимо таким чином:

$$\begin{aligned} \Phi(z) &= \pi h \gamma \alpha^{-1} e^{i\alpha} \int_{-l}^l (K'(t) + \beta M'(t)) \operatorname{ctg}[\pi \alpha^{-1}(te^{i\alpha} - z)] dt + \Phi_0(z), \\ \Psi(z) &= \pi h \gamma \alpha^{-1} \left\{ e^{i\alpha} \int_{-l}^l (\beta \overline{M'(t)} - \chi K'(t)) \operatorname{ctg}[\pi \alpha^{-1}(te^{i\alpha} - z)] dt - \right. \\ &\quad \left. - \int_{-l}^l [\pi \alpha^{-1}(ze^{i\alpha} + t(1 - e^{2i\alpha})) \operatorname{cosec}^2[\pi \alpha^{-1}(te^{i\alpha} - z)] + e^{i\alpha} \operatorname{ctg}[\pi \alpha^{-1}(te^{i\alpha} - z)]] \times \right. \\ &\quad \left. \times (K'(t) + \beta M'(t)) dt \right\} + \Psi_0(z), \end{aligned} \quad |2|$$

де $\beta = \mu/\mu_0$, $\chi = (3-\nu)/(1+\nu)$, $\gamma = 1/(\pi(1+\chi))$;

μ , ν - коефіцієнти Ляме і Пуассона; $\Phi_0(z)$ і $\Psi_0(z)$ - комплексні потенціали, що характеризують напружено-деформований стан пластини без включень при тому ж навантаженні; $K(t)$, $M(t)$ - невідомі функції, які визначаються зі системи інтегродиференціальних рівнянь

$$\begin{aligned} &\gamma_0 [(1-\chi_0) K(x) + 2M(x) + 2\overline{K(x)} + 2\overline{M(x)}] - \gamma \int_{-l}^l [(K'(t) + \beta M'(t)) \times \\ &\times R(t-x) + (-\chi K'(t) + \beta M'(t)) \overline{R(t-x)} + (\overline{K'(t)} + \beta \overline{M'(t)}) \times \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times L(t-x)] dt = a_1 \Phi_0(x) + a_2 \overline{\Phi_0(x)} + a_3 \Omega_0(x), \\
& q_0 [2x_0 K(x) + (x_0 - 1) M(x) - 2\overline{K(x)} - 2\overline{M(x)}] + \\
& + c_1 \int_{-e}^e [-x(K'(t) + \beta M'(t)) R(t-x) + (-xK'(t) + \beta M'(t)) \overline{R(t-x)} + \\
& + (\overline{K'(t)} + \beta \overline{M'(t)}) L(t-x)] dt = b_1 \Phi_0(x) + b_2 \overline{\Phi_0(x)} + \\
& + b_3 \Omega_0(x) + 2i\mu\delta_0, \quad x \in L,
\end{aligned}$$

13/

причому

$$\begin{aligned}
R(t-x) &= \pi e^{ia} d^{-1} \operatorname{ctg}[\pi e^{ia} d^{-1}(t-x)]; \quad L(t-x) = \pi d^{-1} (e^{-ia} - e^{-3ia}) \times \\
&\times [\operatorname{ctg}[\pi e^{-ia} d^{-1}(t-x)] - \pi e^{-ia} d^{-1}(t-x) \operatorname{cosec}^2[\pi e^{-ia} d^{-1}(t-x)]],
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\gamma_0 &= 1/(1+x_0); \quad q_0 = \beta\gamma_0; \quad c_1 = h\gamma_0; \quad a_1 = 1 - \omega\gamma_0(1-x_0+2x), \\
a_2 &= 2\omega\gamma_0(x_0-x); \quad a_3 = 1-\omega; \quad b_1 = x - \beta\omega(x+2-2\gamma_0(x+1)), \\
b_2 &= 2\beta\omega((x+1)\gamma_0-1); \quad b_3 = \beta\omega-1; \quad \omega = \min(1, 1/\beta).
\end{aligned}$$

Розв'язок системи /3/ повинен задовольняти умови рівноваги тонкого включення й умови однозначності зміщень при обході його контура, які набирають вигляду

$$\int_{-e}^e K'(t) dt = 0, \quad \int_{-e}^e t K'(t) dt = 0, \quad \int_{-e}^e M'(t) dt = 0$$

Зробивши у системі /3/ заміну $t = et_1$, $x = ex_1$ і зобразивши невідомі функції $K(x)$ і $M(x)$ як

$$K'(ex) = u(x)/\sqrt{1-x^2}; \quad M'(ex) = v(x)/\sqrt{1-x^2},$$

на основі методу механічних квадратур [5] можна записати таку систему лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$\sum_{m=1}^M \{ [(1-x_0)u(t_m) + 2v(t_m) + 2\overline{u(t_m)} + 2\overline{v(t_m)}] \gamma_0 \gamma(x_1 - t_m) - c_1 \} [u(t_m) +$$

$$\begin{aligned}
& + \beta v(t_m)] R(\ell(t_m - x_z)) + [-\alpha u(t_m) + \beta v(t_m)] \overline{R(\ell(t_m - x_z))} + [\overline{u(t_m)} + \\
& + \beta \overline{v(t_m)}] L(\ell(t_m - x_z)) \} \} = \frac{M}{\pi} [a_1 \Phi_{0,1}(\ell x_z) + a_2 \overline{\Phi_{0,1}(\ell x_z)} + a_3 \Omega_{0,1}(\ell x_z)], \\
& \sum_{m=1}^M \{ [2\alpha_0 u(t_m) + (\alpha_0 - 1)v(t_m) - 2\overline{u(t_m)} - 2\overline{v(t_m)}] q_0 \eta(x_z - t_m) - \\
& - C_{11} \{ \alpha (u(t_m) + \beta v(t_m)) R(\ell(t_m - x_z)) + (\alpha u(t_m) - \beta v(t_m)) \overline{R(\ell(t_m - x_z))} + \\
& - (\overline{u(t_m)} + \beta \overline{v(t_m)}) L(\ell(t_m - x_z)) \} \} = \frac{M}{\pi} [b_1 \Phi_{0,1}(\ell x_z) + b_2 \overline{\Phi_{0,1}(\ell x_z)} + \\
& + b_3 \Omega_{0,1}(\ell x_z) + 2i\epsilon_0 \mu],
\end{aligned}$$

$$t_m = \cos(\pi(2m-1)/(2M)), \quad x_z = \cos(\pi z/M), \quad (m = \overline{1, M}),$$

$$(z = \overline{1, M-1}),$$

де $C_{11} = C_1/\ell$; $\eta(x)$ - функція Хевісайда.

Коефіцієнти інтенсивності напружень /КІН/, які характеризують сингулярну частину напружень в околі вершини виключення, визначаємо за формулами

$$K_1^{\pm} - iK_2^{\pm} = \mp (2\pi\gamma h/\sqrt{\ell}) v(\pm 1),$$

$$K_3^{\pm} - iK_4^{\pm} = \mp (2\pi\gamma h/\sqrt{\ell}) u(\pm 1),$$

де

$$\begin{aligned}
\| \frac{u(\pm 1)}{v(\pm 1)} \| &= \frac{1}{M} \sum_{m=1}^M \left\| \frac{u(t_m)}{v(t_m)} \right\| (-1)^z \operatorname{ctg}^{\pm 1} \left(\frac{2m-1}{4M} \pi \right); \\
z &= m+1 + (M+1)(1 \mp 1)/2,
\end{aligned}$$

знак плюс належить до правої, а знак мінус до лівої величини включення.

Відзначимо, що коли в /3/ або /4/ зробити відповідний граничний перехід, то одержимо розв'язок періодичної задачі для тріщин [5] і коротких включень [1]. При $\alpha = 0$ і $\alpha = \pi/2$ в використаних інших моделях включення задача досліджена у працях [2, 4].

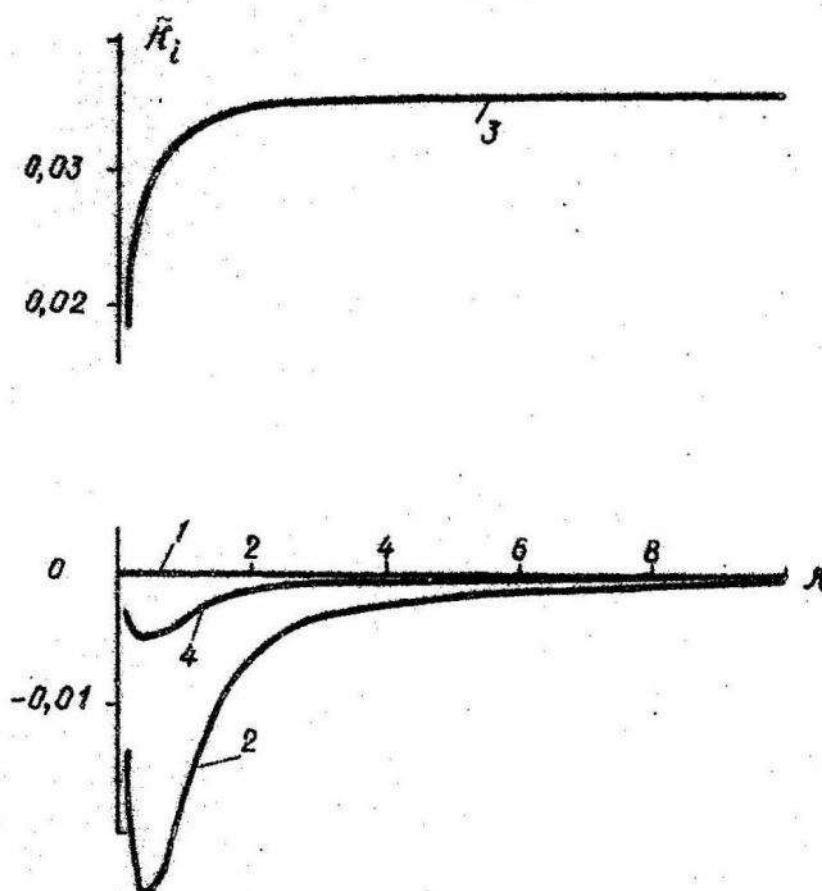


Рис. 2.

Проведено числовий аналіз задачі у випадку, коли пластина перебуває під дією рівномірно розподіленого на безмежності напруження інтенсивності P , напрям якого паралельний до осі OY . На рис. 2, 3 відповідною кривою показана графічна залежність K_{II}

$\tilde{K}_i = K_i / (\rho \sqrt{E})$, ($i = 1, 4$) від відносної відстані $\lambda = d/l$ між центрами включень. При цьому рис. 2 побудований при відносній жорсткості матриці і включення $\beta = 0,1$, а рис. 3 - при $\beta = 10$.

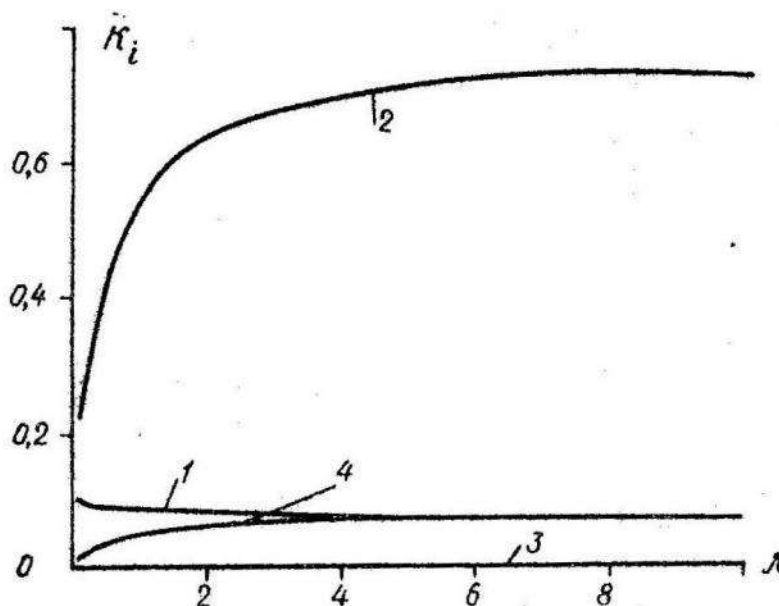


Рис. 3.

Обчислення проводили при таких значеннях параметрів $h/l = 0,01$, $\alpha = \pi/4$, $\chi = \chi_0 = 2$. Числовий аналіз показав, що для досягнення точності 2% потрібно у системі /4/ взяти 20 вузлів.

Як видно з рис. 2, КІН менший, ніж у випадку одного включення, тобто при відсутності взаємодії між включеннями. Трохи іншу картину спостерігаємо на рис. 3: антисиметричні КІН / R_2, R_4 / мають ці ж закономірності, а симетричний КІН / R_1 / - протилежну.

Список літератури: 1. Б е р е ж н и ц к и й Л.Т., С т а - ш у к Н.Г. Плоская периодическая задача теории жестких включений. - Физ.-хим. механика материалов, 1982, № 1, с.61-69. 2. Г р и - л и ц к и й Д.В., С у л и м Г.Т. Периодическая задача для кусоч-

но-однородной плоскости с тонкостенными упругими включениями. - Прикладная механика, 1975, т. II, № I, с. 74-81. 3. Драган М.С., Опанасович В.К. Напряженное состояние полосы /балки/ с прямолинейным тонкостенным включением. - Прикл. мат. и мех., 1979, т. 43, № 2, с. 342-348. 4. Мартиняк Р.М., Сулим Г.Т. Периодическая задача для системы линейных компланарных включений в изотропной плоскости. - Мат. методы и физ.-мех. поля, 1982, вып. 15, с. 113-117. 5. Панасюк В.В., Саврук М.П., Дацишин А.П. Распределение напряжений около трещин в пластинах и оболочках. - К.: Наукова думка, 1976. - 444с.

Стаття надійшла до редакції 08.02.83

УДК 541.124

Ю.А.Наздерський, В.Є.Юринець, В.П.Баран, О.О.Свтушенко

ДО МЕТОДУ ІНТЕГРУВАННЯ СИСТЕМ

ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ХІМІЧНОЇ КІНЕТИКИ

Розглянемо систему рівнянь хімічної кінетики, яка описує механізм термічного розкладання ацетилену. Така система рівнянь подібна до систем з праць [1, 2] і має вигляд

$$\frac{dy_e}{dt} = \sum_{m=1}^{M_e} K_{em} y_e y_e, \quad e, i, i = \overline{1, N}. \quad (1)$$

Причому

$$y(0) = (1, 0, \dots, 0)$$

$$K = \begin{pmatrix} 0,024, & 0,59, & 0,358 \cdot 10^6, & 0,59, & 0,966 \cdot 10^8, & 0,59, \\ 0,966 \cdot 10^8, & 0,59, & 0,966 \cdot 10^8, & 0,59, & 0,966 \cdot 10^8, & 0,59, \\ 0,966 \cdot 10^8, & 0,59, & 0,966 \cdot 10^8, & 0,59, & 0,966 \cdot 10^8, & 0,59, \\ 0,666 \cdot 10^8, & 0,666 \cdot 10^8, & 0,666 \cdot 10^8, & 0,666 \cdot 10^8, & 0,666 \cdot 10^8, & 0,666 \cdot 10^8, \\ 0,666 \cdot 10^8, & 0,666 \cdot 10^8, & 0,666 \cdot 10^8, & 0,459 \cdot 10^8, & 0,715 \cdot 10^8, & 0,715 \cdot 10^8, \\ 0,536 \cdot 10^6, & 0,402 \cdot 10^6, & 0,302 \cdot 10^6, & 0,226 \cdot 10^6, & 0,17 \cdot 10^6, & 0,127 \cdot 10^6 \end{pmatrix}$$