М.: Наука, 1967. – 368 с. 4. Р о у ч П. Вычислительная гидродинамика. – М.: Мир, 1980. – 616 с. 5. С т е п а н о в В.В. Курс дифференциальных уравнений.– М.: Гостехиздат, 1952. – 468 с. 6. Ф о р с а й т Дж., М а л ь к о л ь м М., М о у л е р К. Машинные методы математических вычислений. – М.: Мир, 1980. – 277 с. 7. Х о л л Дж., У а т т Дж. Современные численные методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений. – М.: Мир, 1979. – 312 с. 8. Gear C.W. Algorithm 407, DIFSUB for solution of ordinary differential equations.- Communs. Ass. comput. Mech., 1971, 14, p.185-190. 9. Curtiss G.F., Hirschfelder J.O. Integration of stiff equations.- Proc. Nat. Aeronavt. Soc. 1952, v. 38, p. 235-248. 10. Richardson L.F. The approximate arithmetical solution by finite differences of physical problems involving differential equations, with an application to the stresses in a masonry dam.- Trans. Roy. Soc. London Ser. A., 1910, v. 210, p. 307-357.

Стаття надійшла до редколегії 05.10.83

УДК 519.21

І.Д.Квіт

ДОВІРЧІ ІНТЕРВАЛИ ДЛЯ ПОРЯДКОВИХ СТАТИСТИК

Нехай

$$x_1, \dots, x_n \qquad /1/$$

ряд незалежних спостережень над абсолютно неперервною або дискретною випадковою змінною ξ з функцією розподілу ймовірностей $F(x)$. Запишемо варіаційний ряд для незалежних спостережень /1/ у вигляді

$$x_{1n}, \dots, x_{jn}, \dots, x_{nn} \qquad /2/$$

Потрібно визначити довірчий інтервал для порядкової статистики

x_{jn}, $(j=1,\dots,n)$.

Відомо [1], що коли вибірка /1/ взята з абсолютно неперервної популяції, то функція розподілу ймовірностей порядкової статистики x_{jn} виражається формулою

$$\mathcal{P}\{x_{jn}\le x\}=\frac{n!}{(j-1)!(n-j)!}\int_0^{F(x)} t^{j-1}(1-t)^{n-j}dt. \qquad /3/$$

За означенням квантилем порядку q j-ї порядкової статистики x_{jn} називається число $x_{jn;q}$, що задовольняє співвідношення

$$\mathcal{P}\{x_{jn}\le x_{jn;q}\}=q,\ 0<q<1 \qquad /4/$$

Отже,

$$\frac{n!}{(j-1)!(n-j)!}\int_0^{F(x_{jn;q})} t^{j}(1-t)^{n-j}dt=q,\ 0<q<1.$$

Але відомо також [2], що

$$\begin{aligned}F(x_{jn;q})&=\frac{j}{j+(n+1-j)F_q(2(n+1-j),2j)},\ 0<q\le 0{,}5;\\ &\approx\frac{j-0{,}3}{n+0{,}4},\ q=0{,}5;\\ &=\frac{j}{j+\dfrac{n+1-j}{F_{1-q}(2j,2(n+1-j))}},\ 0{,}5\le q<1,\end{aligned} \qquad /5/$$

де $F_\alpha(\nu_1,\nu_2)$ – процентні точки розподілу Фішера зі / ν_1,ν_2 / ступенями вільності. Позначаючи правий бік /5/ через γ, дістаємо співвідношення

$$F(x_{jn;q})=\gamma,\ 0<q<1,\ (j=1,\dots,n) \qquad /6/$$

для визначення квантиля $x_{jn;q}$ порядкової статистики x_{jn}. При q = 0,5 співвідношення /6/ визначає медіану j -ї порядкової статистики $x_{jn;0,5}$.

Із рівності /4/ дістаємо похідне співвідношення

$$\mathcal{P}\left\{x_{jn;q_1} < x_{jn} \le x_{jn;1-q_2}\right\} = 1-q_2-q_1,\ q_1>0,\ q_2>0,\ 0<q_1+q_2<1, \quad /7/$$

яке вказує $(1-q_2-q_1)$ 100 %-ний довірчий інтервал для абсолютно неперервної порядкової статистики x_{jn}. При $q_1=0$ маємо однобічний нижній довірчий інтервал з верхньою межею $x_{jn;1-q_2}$; при $q_2=0$ дістаємо однобічний верхній довірчий інтервал з нижньою межею $x_{jn;q_1}$; при q_1 = 0,5 або q_2 = 0,5 межею буде медіана порядкової статистики x_{jn}. За умовою $q_1=q_2=q$, $0<q<0,5$ одержуємо $(1-2q)$ · 100 %-ний довірчий інтервал імовірнісно симетричний. В імовірнісно симетричному випадку співвідношення /7/ набуває вигляду

$$\mathcal{P}\left\{x_{jn;q} < x_{jn;1-q}\right\} = 1-2q,\quad 0<q<0,5. \qquad /8/$$

Імовірнісно симетричний інтерквантильний довірчий інтервал, визначений точками $x_{jn;q}$ та $x_{jn;1-q}$ при q = 0,25; 0,10; 0,01; ... відповідно називають інтерквартильним, інтердецильним, інтерцентильним тощо.

У випадку n = 9 і $F(x)=1-e^{-x}$, $x>0$ дані про медіану $x_{j9;0,5}$ порядкової статистики x_{j9}, 95 %-ний довірчий інтервал $(x_{j9;0,025};\ x_{j9;0,975})$, інтерквартильний довірчий інтервал $(x_{j9;0,25};\ x_{j9;0,75})$, обчислені на основі формул /5/ і /6/, наведемо нижче:

j	$x_{j9;0,025}$	$x_{j9;0,25}$	$x_{j9;0,5}$	$x_{j9;0,75}$	$x_{j9;0,975}$
1	0,003	0,032	0,077	0,154	0,410
2	0,029	0,114	0,198	0,318	0,659
3	0,078	0,218	0,337	0,496	0,916
4	0,147	0,345	0,500	0,696	1,206
5	0,237	0,498	0,693	0,936	1,556

6	0,356	0,690	0,933	I,233	I,988
7	0,5II	0,938	I,250	I,63I	2,593
8	0,729	I,299	I,7I5	2,232	3,57I
9	I,090	I,946	2,60I	3,459	5,975

Відомо [4], що коли дискретна випадкова змінна ξ набуває в зростаючому порядку значення $x_{(1)}, x_{(2)}, \ldots$ відповідно з імовірностями $\gamma_1, \gamma_2, \ldots$, причому $\sum_i \gamma_i = 1$, і отже, має функцію розподілу

$$\mathcal{F}(x) = \begin{cases} 0, & x \leqslant x_{(1)}, \\ \sum_{k=1}^{i} \gamma_k, & x_{(i)} \leqslant x < x_{(i+1)}, \quad (i = 1, 2, \ldots), \end{cases} \qquad /9/$$

тоді

$$\mathcal{P}\left\{x_{jn} \leqslant x_{(i)}\right\} = \frac{n!}{(j-1)!\,(n-j)!} \int_0^{\mathcal{F}(x_{(i)})} t^{j} (1-t)^{n-j} dt,$$

$$(j = 1, \ldots, n), \ (i = 1, 2, \ldots). \qquad /\text{I}0/$$

Квантилем порядку q дискретної j-ї порядкової статистики x_{jn} називається число $x_{jn;\,q} = x_{(i)}$, що задовольняє нерівності

$$\mathcal{P}\left\{x_{jn} < x_{jn;q}\right\} \leqslant q, \ \mathcal{P}\left\{x_{jn} \leqslant x_{jn;q}\right\} \geqslant q, \ 0 < q < 1. \qquad /\text{II}/$$

Порівнюючи формули /I0/ і /II/ з формулами /3/ і /4/, приходимо до висновку, що у дискретному випадку квантиль $x_{jn,q} = x_{(i)}$ шукають за допомогою нерівностей

$$\mathcal{F}(x_{(i-1)}) \leqslant \gamma, \quad \mathcal{F}(x_{(i)}) \geqslant \gamma, \qquad /\text{I}2/$$

де функція $\mathcal{F}(x)$ задана виразом /9/, $\mathcal{F}(x_{(0)}) = 0$; γ позначає правий бік /5/. Довірчий інтервал для порядкової статистики x_{jn} складається тепер з окремих $x_{(i)}$ або й з однієї точки.

У випадку $n = 9$ та $\mathcal{F}(x) = \sum_{k=0}^{i} \frac{5^k}{k!} e^{-5}, \ i \leqslant x < i+1, \ (i = 0, 1, 2, \ldots)$, дані про медіану $x_{j,9;\,0,5}$ порядкової статистики $x_{j,9}$.

95 %-ний довірчий інтервал $(x_{j,9;0,025}; x_{j,9;0,975})$, інтерквартильний довірчий інтервал $(x_{j,9;0,025}; x_{j,9;0,75})$ обчислені на основі формул /5/ і /12/, наведемо нижче:

j	$x_{j,9;0,025}$	$x_{j,9;0,25}$	$x_{j,9;0,5}$	$x_{j,9;0,75}$	$x_{j,9;0,975}$
I	0	I	2	3	4
2	I	2	3	4	5
3	2	3	4	4	5
4	3	4	4	5	6
5	3	4	5	5	7
6	4	5	5	6	7
7	4	5	6	7	8
8	5	6	7	8	IO
9	6	7	8	9	II

Відзначимо, що процентні точки розподілу Фішера з формули /5/, можна взяти, наприклад, з довідника [3].

Список літератури: I. К в і т І.Д. Звужені до кінців інтерквантильні смуги довір"я. – Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат., I982, вип. I9, с.I8–2I. 2. К в і т І.Д. Методичні вказівки до курсу "Теорія надійності". Львів, I982. – 24 с. 3. Справочник по специальным функциям. – М.: Наука, I979. – 830 с. 4. Khatri C.J. Distributions of order statistics for discrete case. – Annals of the Institute of Statistical Mathematics, 1962, 14, p. 167–171.

Стаття надійшла до редколегії 3I.08.82