ISSN 0201-758X
ISSN 0460-0460

ВІСНИК ЛЬВІВСЬКОГО УНІВЕРСИТЕТУ

ЗАДАЧІ ПРИКЛАДНОЇ МАТЕМАТИКИ І МЕХАНІКИ

СЕРІЯ
МЕХАНІКО-МАТЕМАТИЧНА

ВИПУСК
23

1985

МІНІСТЕРСТВО ВИЩОЇ І СЕРЕДНЬОЇ
СПЕЦІАЛЬНОЇ ОСВІТИ УРСР

ВІСНИК

ЛЬВІВСЬКОГО УНІВЕРСИТЕТУ

СЕРІЯ

МЕХАНІКО-МАТЕМАТИЧНА

ВИПУСК 23

ЗАДАЧІ ПРИКЛАДНОЇ МАТЕМАТИКИ І МЕХАНІКИ

Виходить з 1965 р.

ЛЬВІВ
ВИДАВНИЦТВО ПРИ ЛЬВІВСЬКОМУ ДЕРЖАВНОМУ УНІВЕРСИТЕТІ
ВИДАВНИЧОГО ОБ'ЄДНАННЯ «ВИЩА ШКОЛА»
1985

УДК 518

В Вестнике помещены статьи по численным методам решения уравнений математической физики и задач оптимизации, статические и динамические задачи механики сплошной среды.

Для научных работников, преподавателей и студентов старших курсов.

Адреса редакційної колегії:
290000, Львів-центр, вул. Університетська, I.

Редакція науково-технічної літератури

Зав. редакцією М.П.П а р ц е й

В $\frac{1702050000-006}{М225/04/-85}$ Замовне

УДК 518:517

М.Я.Бартіш

ПРО ОДИН МЕТОД РОЗВ"ЯЗУВАННЯ СИСТЕМ НЕЛІНІЙНИХ АЛГЕБРАЇЧНИХ РІВНЯНЬ З НАДЛІНІЙНОЮ ШВИДКІСТЮ ЗБІЖНОСТІ

Нехай дана система нелінійних алгебраїчних рівнянь

$$P(x)=0, \tag{1}$$

де $x\in E^N$, $P(x)\in E^N$. Одним з ефективних методів розв"язування рівнянь /1/ є метод Ньютона-Канторовича [4], порядок збіжності якого дорівнює двом. Поряд з цим можна використовувати й інші методи Ньютона-Канторовича, наприклад метод з порядком збіжності $1+\sqrt{2}$ [1]. У випадку, коли $P(x)$ задано не аналітично, а відомо лише алгоритм визначення $P(x)$ при заданому значенні x, доцільно використовувати різницевий аналог методу Ньютона-Канторовича /в частинному випадку метод Стефенсена, $N+1$ точковий метод хорд/, різницевий аналог методу з порядком збіжності $1+\sqrt{2}$ [2], різницеві методи, одержані за допомогою рекурсій [3] та ін. Ці методи мають різний порядок збіжності. При їх використанні необхідно виконувати різне число елементарних алгебраїчних операцій для виконання однієї ітерації, що робить методи нееквівалентними за ефективністю в сенсі числа обчислень для розв"язування конкретної задачі.

Обчислювальний процес A ефективніший від процесу B, якщо виконується умова [I]

$$Q_A / Q_B < \log_{P_B} P_A , \qquad /2/$$

де Q_A, Q_B – число елементарних арифметичних операцій на одній ітерації; $P_A > 1$, $P_B > 1$ – порядок відповідних методів.

Треба відзначити, що величини Q_A і Q_B суттєво залежать від конкретного вигляду функції $P(x)$. Якщо для обчислення $P(x)$ потрібно виконати достатньо велике число елементарних операцій /наприклад, розв"язати задачу Коші/, достатньо ефективним є N + I точковий метод хорд, коли послідовність $\{x_n\}$ шукають за формулою

$$x_{n+1} = x_n - A_n^{-1} P(x_n), \quad n = 0,1,2,\ldots, \qquad /3/$$

де A_n /для $n \geqslant N$ / визначається зі співвідношення

$$A_n H_n = E_n ; \qquad /4/$$

$$H_n = (x_n - x_{n-1} \ldots x_{n-N+1} - x_{n-N});$$

$$E_n = (P(x_n) - P(x_{n-1}) \ldots P(x_{n-N+1}) - P(x_{n-N})).$$

Розглянемо модифікацію N + I точкового методу хорд, який побудований на основі різницевого методу з праці [3]. Послідовність $\{x_n\}$ знаходимо за формулами

$$x_{n+1/2} = x_n - [A_{n-1/2}]^{-1} P(x_n),$$
$$x_{n+1} = x_n - [A_{n+1/2}]^{-1} P(x_n), \qquad /5/$$
$$n = 0,1,2,\ldots,$$

де $A_{n+1/2}$ дістаємо для $n \geqslant \frac{N-1}{2}$ зі співвідношення

$$A_{n+1/2} H_n = E_n ; \qquad /6/$$

$$H_n = (x_{n+1/2} - x_n \ldots x_{n-\frac{N-2}{2}} - x_{n-\frac{N-1}{2}});$$

$$E_n = (P(x_{n+1/2}) - P(x_n) \ldots P(x_{n-\frac{N-2}{2}}) - P(x_{n-\frac{N-1}{2}})).$$

Для послідовності $\{x_n\}$, визначеної з /5/, має місце така теорема.

<u>Теорема</u>. Нехай в області $\Omega(x) = \{x \in E^N / \|x - x^*\| \leq R\}$.

а/ $P(x)$ двічі неперервно диференційована вектор-функція і друга похідна задовольняє умову Ліпшиця

$$\|P''(x') - P''(x'')\| \leq K\|x' - x''\|;\ x', x'' \in \Omega,\ K < \infty;$$

б/ існує $[P'(x)]^{-1}$ і має місце оцінка $\|[P'(x)]^{-1}\| \leq B < \infty;$

в/ початкове наближення x_0 вибрано достатньо близько до x^*.

Тоді $\{x_n\}$ збігається до розв"язку x^* рівняння /1/ і збіжність надлінійна

$$\|x_n - x^*\| \leq C\|x_{n-1} - x^*\|^{\tau},\quad C < \infty,$$

де τ - додатний корінь рівняння

$$\tau^2 = 2\tau + 1 \qquad \text{для } N = 1,$$

$$\tau^{N+1} = \tau^N + \tau^{\frac{N}{2}} + 1 \qquad \text{для } N \text{ - парного}, \qquad /7/$$

$$\tau^{\frac{N+1}{2}} = \tau^{\frac{N-1}{2}} + 1 \qquad \text{для } N \text{ - непарного}.$$

Для доведення теореми необхідно визначити оцінку величини $\|P(x_n)\|$, а саме:

$$\|P(x_n)\| = \|P(x_n) - P(x_{n-1}) - A_{n-1/2}(x_n - x_{n-1})\| =$$

$$= \|\tfrac{1}{2}P''(x_n)(x_n - x_{n-1})^2 + \{\tfrac{1}{2}[P''(x_{n-1})(x_{n-1/2} - x_{n-1})^2 +$$

$$+ P''(x_{n-\frac{N+1}{2}})(x_{n-\frac{N}{2}} - x_{n-\frac{N+1}{2}})^2] - [P''(x_{n-3/2})(x_{n-1} - x_{n-3/2})^2 +$$

$$+ P''(x_{n-\frac{N+1}{2}})(x_{n-1} - x_{n-\frac{N+1}{2}})(x_{n-\frac{N}{2}} - x_{n-\frac{N+1}{2}})]\}E_n^{-1}\| + O(\|x_{n-\frac{N}{2}} - x_{n-\frac{N+1}{2}}\|^2) \leq \varphi_n, \qquad /8/$$

де

$$\varphi_n = \begin{cases} K_1 \|x_n - x_{n-1}\|^2 \|x_{n-1} - x_{n-2}\| & N = 1, \\ K_2 \|x_n - x_{n-1}\| \|x_{n-\frac{N}{2}} - x_{n-\frac{N+2}{2}}\| \|x_{n-N} - x_{n-N-1}\|, & N \text{ – парне}, \\ K_3 \|x_n - x_{n-1}\| \|x_{n-\frac{N-1}{2}} - x_{n-\frac{N+1}{2}}\| & N \text{ – непарне}, \end{cases} \qquad /9/$$

$K_i < \infty \quad i = 1, 2, 3.$

Під час реалізації запропонованого методу виникає ряд питань: як будувати матрицю $A_{-1/2+n}$ при $n \leqslant \left[\frac{N}{2}\right]$, як вибрати добре початкове наближення, як уникнути нестійкості системи /6/.

На практиці можна вибрати $A_{-1/2} = E$, а надалі за рекурентними формулами, що подібні до тих, які наявні в праці [5], визначати $A_{n-1/2}$ $(n>0)$. Однак, як показали розрахунки, проведені Л.Л.Роман, доцільно $A_{-1/2}$ вибирати як різницевий аналог матриці $P'(x_0)$, а для розв"язування системи /6/ використовувати метод регуляризації. Для визначення $[A_{n-1/2}]^{-1}$ можна також користуватися алгоритмом

$$[A_{n-\frac{1}{2}}]^{-1} \simeq H_n Q_{n-1} (2I - Q_{n-1} E_n), \qquad /10/$$

де

$$Q_0 \approx E_0^{-1}.$$

Відзначимо, що розглянутий алгоритм, як показують теоретичні дослідження та практика, конкурує за ефективністю в сенсі числа обчислень з $N+1$ точковим методом хорд.

Список літератури: I. Б а р т і ш М.Я. Про один ітераційний метод розв"язування функціональних рівнянь. – Доп. АН УРСР. Сер. I, 1968, № 5, с. 38-39. 2. Б а р т і ш М.Я., Щ е р б и н а Ю.М. Про один різницевий метод розв"язування нелінійних операторних рівнянь. – Доп. АН УРСР. Сер А, 1972, № 7, с.579-582.

3. Б а р т и ш М.Я., Щ е р б и н а Ю.Н. Итерационные формулы, полученные в помощью рекурсий. - Мат. сб., 1976, с.50-53. 4. К а н т о р о в и ч Л.В. О методе Ньютона. - Тр. матем. ин-та им. В.А.Стеклова, 1949, 28, № 104, с.104-144. 5. П ш е н и ч н ы й Б.Н., Д а н и л и н Ю.Н. Численные методы в экстремальных задачах. - М.: Наука, 1975. - 318 с.

Стаття надійшла до редколегії 01.03.83

УДК 518:517.9

М.В.Жук, А.Я.Дзвоник

ДОСЛІДЖЕННЯ ШВИДКОСТІ ЗБІЖНОСТІ МЕТОДУ КАНТОРОВИЧА ДЛЯ СИСТЕМ ЛІНІЙНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

Швидкість збіжності методу Канторовича для лінійних і нелінійних диференціальних й інтегральних рівнянь досліджувалась у праці [1, 2, 5].

Розглянемо швидкість збіжності методу Канторовича для систем лінійних диференціальних рівнянь.

Беремо систему рівнянь другого порядку

$$Lu \equiv -\sum_{i,j=1}^{m} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(A_{ij}(P)\frac{\partial u}{\partial x_j}\right) + R(P)u = f(P) \qquad /1/$$

при умовах

$$u(P)\big|_{\Gamma} = 0. \qquad /2/$$

Систему /1/ розглядаємо в області D простору координат /$x_1, \ldots, x_m$/, обмеженої достатньо гладкою поверхнею Γ, яка включає дві гіперплощини: $x_1 = a, x_1 = b, a < b$; Γ_1 - поверхня Γ без вказаних гіперплощин; $P(x_1, \ldots, x_m)$, $Q(x_2, \ldots, x_m)$ - точки відповідно m і /$m-1$/-мірних просторів.

У системі /1/-/2/ $u(P), f(P)$ d - компонентні вектор-функції; A_{ij}, R - матриці d-го порядку, елементи яких є функціями від змінних $x_1, \ldots, x_m$.

Відносно заданих функцій припускаємо, що $f(P)$ належить дійсному гільбертовому простору l -компонентних вектор-функцій $H=\mathcal{L}_2(D)$ із нормою

$$\|f\|^2=\int_D f^2(P)\,dP=\int_D \sum_{k=1}^{l} f_k^2(P)\,dP.$$

Матриці A_{ij} і R задовольняють так:

а/ $A_{ij}=A_{ji}$, $(i,j=1,2,\dots,m)$;

б/ якими би не були l -компонентні вектори $t_1,t_2,\dots,t_m$, має місце нерівність

$$\mu_0\sum_{k=1}^{m}\|t_k\|^2\le\sum_{i,j=1}^{m}A_{ij}\,t_j\cdot t_i\le\mu_1\sum_{k=1}^{m}\|t_k\|^2, \qquad /3/$$

μ_0,μ_1 - $const>0$ /тут крапка - скалярне множення; $\|\cdot\|$ - довжина вектора/;

в/ $\beta_0 u^2\le Ru\cdot u\le\beta_1 u^2$. $\qquad$ /4/

За область визначення $D(L)$ оператора L приймаємо множину l -компонентних вектор-функцій, двічі неперервно диференційовних в замкнутій області $\bar{D}=D+\Gamma$, які задовольняють крайові умови /2/.

Позначимо через $H_0\subset H$ енергетичний простір допоміжного додатно визначеного оператора T

$$Tu\equiv-\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial u}{\partial x_i},\qquad u\Big|_\Gamma=0$$

в $D(T)=D(L)$, тобто замикання $D(T)$ в метриці

$$[u,v]_0=(Tu,v)=\int_D\sum_{j=1}^{m}\frac{\partial u}{\partial x_j}\frac{\partial v}{\partial x_j}\,dP.$$

$$|u|_0^2=[u,u]_0$$

При цьому [3]

$$\|u\|\le\frac{1}{\gamma}|u|_0,\quad \gamma=const>0. \qquad /5/$$

Для довільних функцій $u,v\in H_0$ формально введемо білінійну форму

$$L(u,v)=\int_D\Big[\sum_{i,j=1}^{m}A_{ij}(P)\frac{\partial u}{\partial x_j}\cdot\frac{\partial v}{\partial x_i}+R(P)u\cdot v\Big]dP.$$

Тоді умови /3/, /4/, /5/ забезпечують для довільної вектор-функції $u(P)\in H_o$ виконання нерівності

$$\sigma\,|u|_o^2 \leq L(u,u) \leq \eta\,|u|_o^2, \qquad /6/$$

де σ, η — деякі додатні константи [8].

Задачу /I/–/2/ розв"язуємо методом Канторовича, згідно з яким наближений розв"язок шукаємо у вигляді

$$u_n(P) = \sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{s} C_{kl}(x_1)\,\varphi_{kl}(P), \qquad /7/$$

де $u_n(P)=(u_{n1}(P),\dots,u_{ns}(P))$; $\varphi_{kl}(P)$ — попередньо вибрані лінійно-незалежні в Γ_1 функції, для яких виконуються умови $\varphi_{kl}(P)\big|_{\Gamma_1}=0$. Функції їх вибираємо таким чином, щоб їх вибрана система $\{\chi_p(x_1)\,\varphi_{kl}(P)\}\in H_o$ $(p,k=1,2,\dots;$ $l=1,2,\dots,s)$ була повною системою лінійно незалежних функцій в просторі H_o, при цьому система функцій $\{\chi_p(x_1)\}$ задовольняє умови

$$\chi_p(x_1)\big|_{x_1=a} = \chi_p(x_1)\big|_{x_1=b} = 0,\ p=1,2,\dots \qquad /8/$$

Невідомі коефіцієнти $C_{kl}(x_1)$ визначаємо з системи

$$\int_{D_{x_1}} (Lu_n - f)\,\varphi_{kl}(P)\,dQ = 0, \qquad /9/$$

$$C_{kl}(x_1)\big|_{x_1=a} = C_{kl}(x_1)\big|_{x_1=b} = 0,\ k=1,2,\dots,n;\ l=1,2,\dots,s, \qquad /10/$$

де D_{x_1} — переріз області D гіперплощиною $x_1=const$.

Система /9/ зводиться до лінійної системи звичайних диференціальних рівнянь другого порядку відносно $C_{kl}(x_1)$.

Як відомо, для узагальненого розв"язку $u\in H_o$ задачі /I/–/2/ виконується тотожність

$$L(u,v) \equiv \int_D \Big[\sum_{i,j=1}^{m} A_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_j}\frac{\partial v}{\partial x_i} + R\,u\cdot v\Big]dP = \int_D f\cdot v\,dP \qquad /11/$$

при довільній функції $v(P)\in H_o$. Аналогічно для узагальненого розв"язку системи /9/–/10/ $u_n(P)\in H_n \cap H_o$ справедлива тотожність

$$L(u_n,g_n) \equiv \int_D \Big[\sum_{i,j=1}^{m} A_{ij}\frac{\partial u_n}{\partial x_j}\frac{\partial g_n}{\partial x_i} + R\,u_n g_n\Big]dP = \int_D f g_n\,dP, \qquad /12/$$

де $g(P)$ — довільна функція з $H_n \cap H_o$, а $H_n \subset H$ —

2-3998

простір ℓ -компонентних вектор-функцій вигляду

$$v_n(P)=\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{\ell}a_{kl}(x_1)\varphi_{kl}(P).$$

Відомо, що умова /6/ забезпечує існування та єдиність узагальненого розв"язку для задачі /1/-/2/ і системи /9/-/10/ [3].

Встановимо збіжність та оцінку швидкості збіжності методу Канторовича. Нехай $u(P)$ узагальнений розв"язок задачі /1/-/2/. Розглянемо функціонал

$$\mathcal{I}(u-v_n,u-v_n)=\int_D\Big[\sum_{i,j=1}^{m}A_{ij}\Big(\frac{\partial u}{\partial x_j}-\frac{\partial v_n}{\partial x_j}\Big)\Big(\frac{\partial u}{\partial x_i}-\frac{\partial v_n}{\partial x_i}\Big)+$$
$$+R(u-v_n)(u-v_n)\Big]dP, \qquad /13/$$

де $v_n(P)$ - довільний елемент простору $H_n\cap H_0$ і покажемо, що функціонал /13/ набирає найменшого значення при $v_n=u_n$, тобто

$$\mathcal{I}(u-u_n,u-u_n)\leq\mathcal{I}(u-v_n,u-v_n), \qquad /14/$$

де $u_n(P)$ - узагальнений розв"язок системи методу Канторовича /9/-/10/.

Оскільки для системи /1/ при умовах /2/ знаходження узагальненого розв"язку системи методу Канторовича еквівалентно задачі відшукання мінімуму функціонала

$$\mathcal{J}(v)=\int_D\Big[\sum_{i,j=1}^{m}A_{ij}\Big(\frac{\partial v}{\partial x_j}\Big)\Big(\frac{\partial v}{\partial x_i}\Big)+Rv\cdot v-2v\cdot f\Big]dP$$

на множині функцій із $H_n\cap H_0$, то при довільній функції $v_n\in H_n\cap H_0$ маємо

$$\mathcal{J}(u_n)\leq\mathcal{J}(v_n). \qquad /15/$$

Перетворимо функціонал $\mathcal{J}(v_n)$, використовуючи співвідношення /11/ при $v=v_n$. Тоді одержуємо

$$\mathcal{J}(v_n)=\int_D\Big[\sum_{i,j=1}^{m}A_{ij}\frac{\partial v_n}{\partial x_j}\frac{\partial v_n}{\partial x_i}+Rv_n\cdot v_n-2\Big[\sum_{i,j=1}^{m}A_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_j}\cdot\frac{\partial v_n}{\partial x_i}+$$
$$+Ru\cdot v_n\Big]dP=\mathcal{I}(u-v_n,u-v_n)-\mathcal{I}(u,u). \qquad /16/$$

Враховуючи останню рівність і нерівність /15/, знаходимо

$$I(u-u_n,\ u-u_n)-I(u,u)\leq I(u-v_n,\ u-v_n)-I(u,u).$$

Тобто нерівність /14/ справедлива.

На основі нерівності /6/, враховуючи нерівність /14/, дістаємо

$$|u-u_n|_0^2\leq\frac{1}{\sigma}I(u-u_n,u-u_n)\leq\frac{1}{\sigma}I(u-v_n,u-v_n)\leq\frac{\eta}{\sigma}|u-v_n|_0^2.$$

Отже,

$$|u-u_n|_0\leq C|u-v_n|_0, \qquad /17/$$

де $C=\sqrt{\frac{\eta}{\sigma}}$. Елемент $v_n(P)\in H_n\cap H_0$ вибираємо так, щоб він реалізував мінімум функціонала $|u-v_n|_0$.

Причому враховуючи повноту в просторі H_0 системи функцій $\{\chi_p(x_1)\varphi_{kl}(P)\}$ ($p,k=1,2,\ldots;\ l=1,2,\ldots,s$) , для елемента $v_n(P)=\lim\limits_{t\to\infty}v_n^t(P)$, де елемент

$$v_n^t(P)=\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{s}\sum_{p=1}^{t}a_{kl}^p\chi_p(x_1)\varphi_{kl}(P),$$

реалізує мінімум функціонала $|u-v_n^t|_0$, маємо

$$|u-v_n|_0\to 0$$

при $n\to\infty$, а тому

$$|u-u_n|_0\to 0 \qquad /18/$$

при $n\to\infty$. Отже, справедлива наступна теорема.

<u>Теорема</u>. При умовах задачі, що забезпечують виконання нерівностей /6/, метод Канторовича збігається і швидкість збіжності характеризується оцінкою /17/.

Розглянемо тепер способи вибору координатної системи функцій $\{\chi_p(x_1)\varphi_{kl}(P)\}$ $(p,k=1,2,\ldots;\ l=1,2,\ldots,s)$. Їх вибираємо у вигляді $\chi_p(x_1)\varphi_{kl}(P)=(0,\ldots,0,\chi_p(x_1)\varphi_k(P),0,\ldots,0)$, де $\chi_p(x_1)\varphi_k(P)$ займає l -те місце. Розглянемо випадок $m=2$. Тоді область D є областю координат x,y , а мека Γ складається з прямих $x=a,\ x=b$ і кривих $y=g(x)$, $y=h(x)$, $g(x)<h(x)$. Повними у сенсі збіжності за енергією системами $\{X_p(x)\varphi_{kl}(x,y)\}$, $p, k=1,2,\ldots; l=1,\ldots,d$ будуть, наприклад, такі системи:

$$\left\{0,\ldots,0,\sin\frac{p\pi(x-a)}{b-a}\sin\frac{k\pi(y-g(x))}{h(x)-g(x)},0,\ldots,0\right\},$$

$$\left\{0,\ldots,0,x^{p-1}y^{k-1}(x-a)(b-x)(y-g(x))(h(x)-y),0,\ldots,0\right\},$$

де компонента, відмінна від нуля, займає l-те місце. При цьому система $\{\varphi_{kl}(x,y)$ вибирається відповідно в одному з виглядів

$$\bar{\varphi}_{kl}(x,y)=\left(0,\ldots,0,\sin\frac{k\pi(y-g(x))}{h(x)-g(x)},0,\ldots,0\right), \qquad /I9/$$

$$\tilde{\varphi}_{kl}(x,y)=\left(0,\ldots,0\,y^{k-1}(y-g(x))(h(x)-y),0,\ldots,0\right),\ k=1,2,\ldots \qquad /20/$$

Тоді можна побудувати функції

$$\bar{v}_n(x,y)=\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{d}\bar{a}_{kl}(x)\,\bar{\varphi}_{kl}(x,y),$$

$$\tilde{v}_n(x,y)=\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{d}\tilde{a}_{kl}(x)\,\tilde{\varphi}_{kl}(x,y),$$

де $\bar{a}_{kl}(x),\ \tilde{a}_{kl}(x)$ – функції, що дорівнюють нулю при $x=a$, $x=b$ такі, що величини

$$\iint_D\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial\bar{v}_n}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}-\frac{\partial\bar{v}_n}{\partial y}\right)^2\right]dxdy=|u-\bar{v}_n|_0^2,$$

$$\iint_D\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial\tilde{v}_n}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}-\frac{\partial\tilde{v}_n}{\partial y}\right)^2\right]dxdy=|u-\tilde{v}_n|_0^2$$

мають порядок $o\left(\frac{1}{n^2}\right)$. Тут $u(x,y)$ –узагальнений розв"язок задачі /I/-/2/, для якого існують інтегровні з квадратом в області D похідні $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2},\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}$ [4].

Таким чином, вибираючи $\varphi_{kl}(x,y)$ у вигляді /I9/ або /20/, згідно з оцінкою /I7/ маємо

$$|u-u_n|_0=o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Для прикладу розглянемо систему

$$
\begin{cases}
-\dfrac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} - \dfrac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} - \dfrac{\partial^2 u_1}{\partial y^2} = 2(y-1)(1-e^y-y) - xe^y(x-1)(y+1) \\
-\dfrac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} - \dfrac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} - \dfrac{\partial^2 u_2}{\partial y^2} - \dfrac{\partial^2 u_3}{\partial y^2} = 2(y-1)(1-e^y-y) - 2x(x-1) + \pi^2 \sin \pi x \sin \pi y \\
-\dfrac{\partial^2 u_3}{\partial x^2} - \dfrac{\partial^2 u_2}{\partial y^2} - \dfrac{\partial^2 u_3}{\partial y^2} = 2\pi^2 \sin \pi x \sin \pi y - 2x^2 + 2x \\
u|_\Gamma = 0,
\end{cases}
$$

де $u = (u_1(x,y), u_2(x,y), u_3(x,y))$, Γ – межа прямокутної області D : $[0,1;\ 0,1]$,

$A_{11} = \begin{pmatrix} 1&1&0 \\ 1&1&0 \\ 0&0&1 \end{pmatrix}$, $A_{12} = A_{21} = \bar{0}$, $A_{22} = \begin{pmatrix} 1&0&0 \\ 0&1&1 \\ 0&1&1 \end{pmatrix}$, $R = \bar{0}$, $f(x,y) = (2(y-1)(1-e^y-y) - xe^y(x-1)(y+1),\ 2(y-1)(1-e^y-y) - 2x(x-1) + \pi^2 \sin \pi x \sin \pi y,\ 2\pi^2 \sin \pi x \sin \pi y - 2x^2 + 2x)$.

Точним розв"язком цієї системи

$$
u^* = \begin{pmatrix} x(x-1)(e^y-1)(y-1) \\ xy(x-1)(y-1) \\ \sin \pi x \sin \pi y \end{pmatrix}.
$$

Перше наближення шукається у вигляді

$$
u^1 = \begin{pmatrix} c_{11}(x) \sin \pi y \\ c_{12}(x) \sin \pi y \\ c_{13}(x) \sin \pi y \end{pmatrix},
$$

друге – у вигляді

$$
u^2 = \begin{pmatrix} c_{11}(x) \sin \pi y + c_{21}(x) \sin 2\pi y \\ c_{12}(x) \sin \pi y + c_{22}(x) \sin 2\pi y \\ c_{13}(x) \sin \pi y + c_{23}(x) \sin 2\pi y \end{pmatrix}.
$$

Порівняємо значення u^* з наближеннями за Рітцом і Канторовичем:

	$x=0,2; y=0,6$	$x=0,5; y=0,5$	$x=0,8; y=0,7$
Точний розв"язок	0,0526I6	0,08I090	0,048660
$u^*(x,y)$	0,0384	0,0625	0,03360
	0,562632	I,0	0,894946
Перше наближення за	0,049087	0,078004	0,02986
Рітцом	0 ^I564I	0,04I45	0,022I32
	0,522845	0,98594	0,868245
Перше наближення за	0,0520I4	0,08I080	0,048584
Канторовичем	0,038I9	0,062490	0,033494
	0,562I09	0,998940	0,8944I9
Друге наближення за	0,05I328	0,08089I	0,04I690
Рітцом	0,029945	0,058205	0,030609
	0,55997I	0,999895	0,89098I
Друге наближення за	0,052600	0,08I080	0,0486I0
Канторовичем	0,038398	0,062490	0,03358I
	0,5626I9	0,998940	0,894794

Список літератури: I. Ж у к М.В. Исследование быстроты сходимости метода Канторовича для линейных интегральных уравнений. – В кн.: Мат. сб. К.: Наукова думка, I976, с.2I0-2I4. 2. Ж у к М.В. Дослідження швидкості збіжності методу Канторовича для нелінійних диференціальних рівнянь. – Укр. мат. журн., 28, I976, № 2, с. I83-I93. 3. Ж у к М.В., Д з в о н и к А.Я. Застосування методу Канторовича для систем диференціальних рівнянь. – Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат., I984, вип. 22, с. 8-I5. 4. К а н т о р о в и ч Л.В., К р ы л о в В.И. Приближенные методы высшего анализа. – М.; Л.: Физматгиз, I962. – 708 с. 5. Л у ч к а А.Ю., Ж у к М.В. Исследование быстроты сходимости метода Канторовича для линейных дифференциальных уравнений эллиптического типа. – В кн.: Методы количественного и качественного исследования дифференциальных и интегральных уравнений. К., I975, с. 84-99.

Стаття надійшла до редколегії 26.03.83

УДК 534.III

І.М.Дудзяний

РЕЗОНАНСНІ КОЛИВАННЯ СТРУНИ, ЯКА РУХАЄТЬСЯ ВЗДОВЖ СВОЄЇ ОСІ, ПРИ ВРАХУВАННІ ЗАТУХАННЯ

Вивчимо вимушені поперечні коливання струни, яка рухається з деякою швидкістю V вздовж своєї осі, при врахуванні затухання, пропорціонального першому степеню швидкості переміщень. Використовуючи принцип Даламбера, рівняння коливань вказаної механічної системи в нерухомій декартовій системі координат XOZ запишемо як

$$\left(\frac{T_0}{\rho F_0}-V^2\right)\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}-2V\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial t}-\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}=\frac{dV}{dt}\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{1}{\rho F_0}\left[2\alpha_0\frac{dV}{dt}-g(x,t)\right], \qquad /1/$$

де $v=V(x,t)$ – поперечні /вздовж осі OZ / переміщення перерізу струни з абсцисою x в момент часу t ; ρ – об"ємна густина матеріалу струни; F_0 – постійна площа поперечного перерізу струни; T_0 – початковий натяг струни; $g(x,t)$ – проекція на OZ зовнішніх збурюючих сил; $2\alpha_0\frac{dv}{dt}$ – член, який характеризує зовнішнє затухання поперечних коливань, пропорційне першому степеню швидкості переміщень.

Допускаючи, що швидкість руху струни мало змінюється за період коливань і сили затухання малі порівняно з силами пружності, рівняння /1/ для випадку періодичного зовнішнього збурення запишемо у вигляді

$$\alpha(\tau)\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\beta(\tau)\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial t}+\gamma(\tau)\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}=\varepsilon f\left(x,\tau,\frac{\partial v}{\partial x},\frac{\partial v}{\partial t}\right)+\varepsilon Q\cos\varphi, \qquad /2/$$

де ε – малий додатний період; $\tau=\varepsilon t$ – "повільний" час; εQ – амплітуда зовнішньої збурючої сили, $\frac{d\varphi}{dt}=\nu(\tau)$ – її миттєва частота. Коефіцієнти $\alpha(\tau)$, $\beta(\tau)$, $\gamma(\tau)$ – повільно змінні, причому

$$\alpha(\tau)=c^2-V^2(\tau)=\frac{T_0}{\rho F_0}-V^2(\tau);\ \beta(\tau)=-2V(\tau);\ \gamma(\tau)=-1, \qquad /3/$$

$$\varepsilon f=\frac{dV}{d\tau}\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial\alpha_0}{\rho F_0}\left(V(\tau)\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial t}\right). \qquad /4/$$

Враховуючи наявність малого параметра, при побудові розв"язку диференціального рівняння /2/ використовуємо асимптотичний метод нелінійної механіки [2], вважаючи при цьому, що функція $v(x,t)$ задовольняє нульові крайові умови

$$v(0,t)=v(\ell,t)=0. \qquad /5/$$

Функцію $v(x,t)$ подаємо у вигляді асимптотичного ряду

$$v(x,t)=a[\varphi_1(x)\cos\theta+\varphi_2(x)\sin\theta]+\varepsilon v_1(x,\tau,a,\theta)+\varepsilon^2 v_2\ldots, \qquad /6/$$

де $\varphi_1(x)\cos\theta+\varphi_2(x)\sin\theta$ – розв"язок відповідної незбуреної /ε = 0/ крайової задачі; $\theta=\varphi+\psi=\nu(\tau)t+\psi$; $v_1, v_2\ldots$ – невідомі, 2π – періодичні за θ функцією.

Параметри a і ψ у рівності /6/ зв"язані співвідношеннями

$$\begin{cases}\dfrac{da}{dt}=\varepsilon A_1(\tau,a,\psi)+\varepsilon^2 A_2(\tau,a,\psi)+\varepsilon^3\ldots\\[2mm] \dfrac{d\psi}{dt}=\omega(\tau)-\nu(\tau)+\varepsilon B_1(\tau,a,\psi)+\varepsilon^2 B_2(\tau,a,\psi)+\varepsilon^3\ldots,\end{cases} \qquad /7/$$

де $A_1(\tau,a,\psi),\ A_2(\tau,a,\psi),\ldots,\ B_1(\tau,a,\psi),\ B_2(\tau,a,\psi)$ – невідомі 2π – періодичні за ψ функцією, які необхідно знайти.

Підставляючи /6/, /7/ у /2/ і прирівнюючи коефіцієнти при однакових степенях ε, одержуємо

$$\begin{cases}\alpha(\tau)\dfrac{d^2\varphi_1}{dx^2}+\beta(\tau)\omega(\tau)\dfrac{d\varphi_2}{dx}-\gamma(\tau)\omega^2(\tau)\varphi_1=0,\\[2mm] \alpha(\tau)\dfrac{d^2\varphi_2}{dx^2}+\beta(\tau)\omega(\tau)\dfrac{d\varphi_1}{dx}-\gamma(\tau)\omega^2(\tau)\varphi_2=0,\end{cases} \qquad /8/$$

$$\alpha(\tau)\frac{\partial^2 V_1}{\partial x^2}+\beta(\tau)\omega(\tau)\frac{\partial^2 V_1}{\partial x\partial t}+\gamma(\tau)\frac{\partial^2 V_1}{\partial\theta^2}=\cos(\theta-\psi)Q+$$
$$+\psi_1(x,\tau,a,\theta)-\Big\{\beta(\tau)\Big(A_1\frac{d\varphi_1}{dx}+aB_1\frac{d\varphi_2}{dx}\Big)+\gamma(\tau)\Big[(\omega-\nu)\varphi_1\frac{\partial A_1}{\partial\psi}+$$
$$+2\omega(A_1\varphi_2-aB_1\varphi_1)+a\Big(\frac{d\omega}{d\tau}+(\omega-\nu)\frac{\partial B_1}{\partial\psi}\Big)\varphi_2\Big]\Big\}\cos\theta-$$
$$-\Big\{\beta(\tau)\Big(A_1\frac{d\varphi_2}{dx}-aB_1\frac{d\varphi_1}{dx}\Big)+\gamma(\tau)\Big[(\omega-\nu)\varphi_2\frac{\partial A_1}{\partial\psi}-2\omega\times \qquad /9/$$
$$\times(A_1\varphi_1+aB_1\varphi_2)-a\Big(\frac{d\omega}{d\tau}+(\omega-\nu)\frac{\partial B_1}{\partial\psi}\Big)\varphi_1\Big]\Big\}\sin\theta;$$

де $\psi_i(\tau,x,a,\theta)$ – коефіцієнти розкладу функції $\varepsilon f\left(x,\tau,\frac{\partial V}{\partial x},\frac{\partial V}{\partial t}\right)$ в асимптотичний ряд

$$\varepsilon f=\varepsilon f_1+\varepsilon^2 f_2+\varepsilon^3\ldots \qquad /10/$$

Розв"язуючи систему диференціальних рівнянь /8/ з врахуванням крайових умов /5/, знаходимо розв"язок крайової задачі в нульовому наближенні / $\varepsilon=0$/:

$$\omega_k(\tau)=\frac{\pi kc}{l}\left(1-\rho^2(\tau)\right), \qquad /11/$$

$$\varphi_{1k}(x)=\sin\frac{\pi kx}{l}\cos\Big[\pi kp(\tau)\Big(1-\frac{x}{l}\Big)\Big], \qquad /12/$$

$$\varphi_{2k}(x)=\sin\frac{\pi kx}{l}\sin\Big[\pi kp(\tau)\Big(1-\frac{x}{l}\Big)\Big], \qquad /13/$$

де $p(\tau)=V(\tau)/c$. Співвідношення /11/–/13/ описують лінійні коливання, близькі до коливань у k -й формі динамічної рівноваги незбуреної системи.

Для побудови диференціальних рівнянь першого наближення розглянемо співвідношення /9/. Використовуючи методику з праці [1], одержуємо систему диференціальних рівнянь для визначення 2π – періодичних за ψ функцій $A_1(\tau,a,\psi)$ і $B_1(\tau,a,\psi)$

$$[\omega(\tau)-\nu(\tau)]\mathcal{P}\frac{\partial A_1}{\partial\psi}+NB_1(\tau,a,\psi)=Q_1(\tau)\cos\psi+Q_2(\tau)\sin\psi, \qquad /14/$$

$$-a[\omega(\tau)-\nu(\tau)]\mathcal{P}\frac{\partial B_1}{\partial\psi_1}+NA_1(\tau,a,\psi)=\Phi(\tau,a)-Q_2(\tau)\cos\psi+$$
$$+Q_1(\tau)\sin\psi+a\mathcal{P}\frac{d\omega}{d\tau}, \qquad /15/$$

$$\mathcal{P} = -\frac{1}{2},\ N = \pi k c,\ Q_1(\tau) = Q\int_0^{\ell}\varphi_1(x)\,dx,\ Q_2(\tau) = Q\int_0^{\ell}\varphi_2(x)\,dx; \qquad /16/$$

$$\Phi(\tau, a) = \frac{\pi k a}{2}\left(\frac{2\alpha_0}{\rho F_0} - p(\tau)\frac{d\nu}{d\tau}\right). \qquad /17/$$

Частинні 2π – періодичні розв"язки цієї системи мають вигляд

$$A_1(\tau, a, \psi) = a\left(\frac{\alpha_0}{\rho F_0} + \frac{p(\tau)}{2c}\frac{d\nu}{d\tau}\right) + a_1 \sin\psi + a_2 \cos\psi, \qquad /18/$$

$$B_1(\tau, a, \psi) = -\frac{1}{a}\left(a_2 \sin\psi - a_1 \cos\psi\right), \qquad /19/$$

$$\text{де } a_1 = a(\tau) = \frac{\Delta_1(\tau)}{\Delta(\tau)}; \quad a_2(\tau) = \frac{\Delta_2(\tau)}{\Delta(\tau)}; \qquad /20/$$

$$\Delta\tau = \frac{[\omega(\tau) - \nu(\tau)]\mathcal{P}^4}{16} - 2N[\omega(\tau) - \nu(\tau)]^2 + N^4; \qquad /21/$$

$$\Delta_1(\tau) = Q_1(\tau)\left\{(\omega(\tau) - \nu(\tau))\mathcal{P}\left[(\omega(\tau) - \nu(\tau))\mathcal{P}^2 - (\omega - \nu)N\mathcal{P} - N^2\right] + N^3\right\} \qquad /22/$$

$$\Delta_2(\tau) = Q_2(\tau)\left\{(\omega(\tau) - \nu(\tau))\mathcal{P}\left[(\omega(\tau) - \nu(\tau))\mathcal{P}^2 - (\omega(\tau) - \nu(\tau))N\mathcal{P} - N^2\right] + N^3\right\}. \qquad /23/$$

Знайдені явно вирази для $A_1(\tau, a, \psi)$ і $B_1(\tau, a, \psi)$ дають змогу перше наближення розв"язку задачі про вимушені коливання виразити як

$$V_1(x, t) = a\left[\varphi_1(x)\cos\theta + \varphi_2(x)\sin\theta\right], \qquad /24/$$

де параметри a і ψ / $\theta = \varphi + \psi$ / визначають зі системи диференціальних рівнянь першого порядку

$$\frac{da}{dt} = a\left(\frac{p(\tau)}{2c} + \frac{\alpha_0}{\rho F_0}\right) + a_1(\tau)\sin\psi + a_2(\tau)\cos\psi,$$

$$\frac{d\psi}{dt} = \omega(\tau) - \nu(\tau) - \frac{1}{a}\left[a_2(\tau)\sin\psi - a_1(\tau)\cos\psi\right]. \qquad /25/$$

Прийнявши в /25/ $\tau = \tau_0 = const$, $\frac{da}{dt} = 0$ і $\frac{d\psi}{dt} = 0$, одержимо у першому наближенні рівняння резонансної кривої стаціонарного режиму коливань

$$\begin{cases} \frac{\vartheta(\tau_0)}{\omega(\tau_0)} = 1 - \frac{1}{a\omega(\tau_0)}\left[a_2(\tau)\sin\psi - a_1(\tau)\cos\psi\right], \\ a_1(\tau)\sin\psi + a_2(\tau)\cos\psi = -\frac{\alpha_0 a}{\rho F_0} . \end{cases} \quad /26/$$

Після необхідних перетворень згідно з /11/–/13/, /16/, /21/–/23/ отримаємо /нехтуючи величинами $\omega(\tau_0) - \vartheta(\tau_0)$ /:

$$\frac{\vartheta_0}{\omega_0} = 1 \pm \frac{2Q_0 l \cos\frac{\pi\rho_0}{2}}{\bar{a}\rho F_0 \pi^3 c^2 (1-\rho_0^2)} \sqrt{1 - \frac{\bar{a}^2 \pi^4 c^2 \alpha_0^2 (1-\rho_0^2)^2}{4Q_0^2 \cos^2 \pi\rho_0/2}}, \quad /27/$$

де

$$\vartheta_0 = \vartheta(\tau_0); \ \ \omega_0 = \omega(\tau_0); \ \rho_0 = \rho(\tau_0); \ \bar{a} = a/l. \quad /28/$$

Враховуючи /27/, залежність $\bar{a}_{max}(\rho_0)$ запишемо так:

$$a_{max}(\rho_0) = \frac{2Q_0 \cos\frac{\pi\rho_0}{2}}{\pi^2 c \alpha_0 (1-\rho_0^2)} . \quad /29/$$

Список літератури: 1. Барвінський А.Ф., Дудзяний І.М. Про власні коливання в системах з розподіленими параметрами, що описуються одним нелінійним рівнянням з частинними похідними другого порядку. – Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат., 1981, вип. 17, с.28–33. 2. Митропольский Ю.А., Мосеенков Б.И. Асимптотические решения уравнений в частных производных. – Киев: Вища школа. Изд-во при Киев. ун-те, 1976. – 589 с.

Стаття надійшла до редколегії 14.12.83

УДК 517.944:947

Марія Д.Мартиненко

ПРО ЗАДАЧУ БЕЗ ПОЧАТКОВИХ УМОВ ДЛЯ ПАРАБОЛІЧНИХ РІВНЯНЬ ДРУГОГО ПОРЯДКУ

У праці [3] методом А.Н.Тихонова [4] доведено існування розв"язку задачі без початкових умов для загальних параболічних систем у припущенні, що гранична поверхня задовольняє певне обмеження вигляду

$$C\iint_S \frac{|\cos\varphi|}{r^2}\,dS < 1, \qquad /1/$$

а коефіцієнт системи та граничних операторів - деякі умови гладкості та узгодженості. Приклади такої поверхні наведено у праці [2], а в праці [1] показано, що обмеження на коефіцієнти рівняння можуть бути послаблені, проте обмеження /1/ на граничну поверхню зняти не вдалося. Наведемо задачу без початкових умов, яка розв"язна без обмеження виду /1/ на граничну поверхню.

В області $\Pi = \{(x_1, x_2, t): x_1^2 + x_2^2 < R^2, -\infty < t \le T\}$ розглянемо рівняння

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a(t)\Delta u + b(t)u \qquad /2/$$

і припустимо, що:

1/ $a(t) \ge a_0^2 > 0,\ b(t) \ge b_0^2 > 0 \quad \forall t \in]-\infty, T]$ / a_0, b_0 - сталі/;

2/ $\left|\int_{-\infty}^{t} a(t)\,dt\right| < +\infty,\ \left|\int_{-\infty}^{t} b(t)\,dt\right| < +\infty;$

3/ $a(t)$ - монотонна на $]-\infty, T]$.

Нехай функція $f(\varphi, t)$ ($\varphi = \operatorname{arctg}\frac{x_2}{x_1}$ - полярний кут/ неперервна по φ, неперервно-диференційовна по t, причому

$$|f(\varphi,t)| \le C\exp\left\{\int_{-\infty}^{t} b(t)\,dt + \beta_0'\right\},$$

де C, β_0' - сталі.

Доведемо, що за цих умов в області Π існує обмежений розв"язок рівняння /2/, який набирає на граничному колі значення $f(\varphi,t)$:

$$u(R\cos\varphi, R\sin\varphi, t) = f(\varphi,t). \qquad /3/$$

За допомогою заміни

$$u(x_1, x_2, t) = v(x_1, x_2, \gamma(t) \exp \beta(t)),$$

де

$$\beta(t) = \int_{-\infty}^{t} b(t)dt + \beta_0; \quad \gamma(t) = \int_{-\infty}^{t} a(t)dt; \quad \beta_0 < \beta_0',$$

задачу /2/-/3/ зведемо до стандартного рівняння теплопровідності

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \Delta v. \qquad /4/$$

Умова /3/ набере такого вигляду:

$$v(R\cos\varphi, R\sin\varphi, t) = \mathcal{F}(\varphi,t), \qquad /5/$$

де $\mathcal{F}(\varphi,t)$ - неперервна функція.

Позначимо через $\mathcal{F}^*(x_1, x_2, t)$ двічі неперервно-диференційовну /по x_1, x_2 / функцію, неперервно-диференційовну по t в Π, яка на граничному колі $x_1^2 + x_2^2 = R^2$ збігається з $f(\varphi, t)$. Її можна одержати, наприклад, за допомогою інтегралу Пуассона. Задачу без початкових умов /4/-/5/ заміною

$$v = \mathcal{F}^*(x_1, x_2, t) + v_0$$

зводимо до знаходження функції v_0, що в Π задовольняє рівняння

$$\frac{\partial v_0}{\partial t} = \Delta u + \Phi(x_1, x_2, t), \qquad /6/$$

де $\Phi = \Delta \mathcal{F}$,

а на граничному колі – умову

$$V_0 (R\cos\varphi, R\sin\varphi, t) = 0. \qquad /7/$$

Обмежений у Π розв"язок задачі /6/–/7/ легко виписується за допомогою методу Фур"є [5].

Список літератури: І. Мартиненко Марія Д., Мартиненко Михайло Д. Задача без початкових умов для рівняння теплопровідності із змінними коефіцієнтами. – Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат., 1984, вип.20, с.20–21. 2. Мартиненко Марія Д., Мартиненко Михайло Д., Бойко Л.Ф. Задача без початкових умов для рівняння теплопровідності. – Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат., 1982, вип.19, с. 9–11. 3. Мартиненко М.Д., Бойко Л.Ф. О разрешимости задач без начальных условий для параболических по И.Г.Петровскому систем.-Докл. АН СССР, 1978, т.243, № 1, с.30–32. 4. Тихонов А.Н. Теоремы единственности для уравнения теплопроводности. – Мат. сб., 1935, с.199–216. 5. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1966. – 724 с.

Стаття надійшла до редколегії 30.05.83

УДК 518:517.948

А.Т.Дудикевич

АПРІОРНІ ОЦІНКИ Й ОЦІНКИ ШВИДКОСТІ ЗБІЖНОСТІ РІЗНИЦЕВОЇ ЗАДАЧІ ДІРІХЛЕ ДЛЯ РІВНЯННЯ ПУАССОНА У ПРОСТОРІ

Для двомірної задачі Діріхле для рівняння Пуассона одержано [2–4] апріорні оцінки й оцінки швидкості збіжності різницевої задачі. Застосуємо принцип максимуму для знаходження апріорних оцінок розв"язку різницевої схеми підвищеного порядку [I] й оцінки швидкості збіжності цієї схеми у просторі.

У прямокутному паралелепіпеді $\bar{G} = \{x = (x_1, x_2, x_3) : 0 \le x_\alpha \le \ell_\alpha, \alpha = \overline{1,3}\}$ з межею Γ шукаємо розв"язок задачі Діріхле для рівняння Пуасcона

$$Lu = \sum_{\alpha=1}^{3} L_\alpha u = -f(x), \quad x \in G, \qquad /1/$$

$$u\Big|_\Gamma = \varphi(x), \quad x \in \Gamma, \qquad /2/$$

де $L_\alpha u = \partial^2 u / \partial x_\alpha^2 \ (\alpha = \overline{1,3})$; $f(x)$ і $\varphi(x)$ – задані неперервні функції відповідно в G і Γ; $G = \bar{G}/\Gamma$.

В області $\bar{G}$ на рівномірній сітці $\bar{\omega}_h = \{ih_1, jh_2, kh_3, h = (h_1, h_2, h_3), 0 \le i \le n+1, 0 \le j \le m+1, 0 \le k \le p+1, h_1 = \ell_1/(n+1), h_2 = \ell_2/(m+1), h_3 = \ell_3/(p+1)\}$ розглянемо відповідну різницеву задачу

$$\lambda' y = -g(x), \quad x \in \omega_h, \qquad /3/$$

$$y\Big|_\gamma = \psi(x), \qquad /4/$$

де $\lambda' y = \sum_{\alpha=1}^{3} \left[\prod_{\beta \ne \alpha}^{1+3} (E - \varkappa_\beta \lambda_\beta) \right] \lambda_\alpha y$; E – одиничний оператор; $\lambda_\alpha y = y_{\bar{x}_\alpha x_\alpha} \ (\alpha = \overline{1,3})$ – різницева апроксимація на сітці ω_h оператора L_α; $g = f - \sum_{\alpha=1}^{3} \varkappa_\alpha \lambda_\alpha f$; $\varkappa_\alpha = h_\alpha^2 / 12 \ (\alpha = \overline{1,3})$; h_1, h_2, h_3 – кроки по координатних напрямках x_1, x_2, x_3; n, m і p – кількість точок розбиття по x_1, x_2, x_3; γ, ω_h – множина граничних і внутрішніх вузлів сітки; $\omega_h = \bar{\omega}_h / \gamma$.

Теорема. Різницева схема /3/–/4/, визначена на двадцятисемиточковому шаблоні, задовольняє умови принципу максимуму тоді і тільки тоді, коли для кроків h_α $(\alpha = \overline{1,3})$ різницевої схеми виконується умова

$$\sum_{\beta \ne \alpha}^{1,3} \frac{h_\alpha^2}{h_\beta^2} \le 5. \qquad /5/$$

У праці [I] на двадцятисемиточковому шаблоні наведена різницева схема четвертого порядку точності, яку запишемо в такому канонічному вигляді:

$$\frac{4}{5}\left[1+5(\alpha+\beta+\gamma)\right]y_{i,j,k}=\frac{1}{60}\Big\{2(20\alpha-5\beta-5\gamma+4)\times$$

$$\times(y_{i+1,j,k}-y_{i-1,j,k})+2(20\beta-5\alpha-5\gamma+4)(y_{i,j+1,k}+$$

$$+y_{i,j-1,k})+2(20\gamma-5\alpha-5\beta+4)(y_{i,j,k+1}+y_{i,j,k-1})+$$

$$+\left[5(\beta+\alpha)-4\right](y_{i+1,j+1,k}+y_{i-1,j+1,k}+y_{i+1,j-1,k}+y_{i-1,j-1,k})+$$

$$+\left[5(\alpha+\gamma)-4\right](y_{i+1,j,k+1}+y_{i+1,j,k-1}+y_{i-1,j,k+1}+y_{i-1,j,k-1})+$$

$$+\left[5(\beta+\gamma)-4\right](y_{i,j+1,k+1}+y_{i,j+1,k-1}+y_{i,j-1,k+1}+y_{i,j-1,k-1})+$$

$$+2(y_{i+1,j+1,k+1}+y_{i+1,j+1,k-1}+y_{i-1,j+1,k+1}+y_{i+1,j-1,k+1}+$$

$$+y_{i-1,j-1,k+1}+y_{i-1,j+1,k-1}+y_{i+1,j-1,k-1}+y_{i-1,j-1,k-1})\Big\}+\bar{g}_{i,j,k},$$

де $y_{0,j,k}=\psi_{0,j,k}$; $y_{n+1,j,k}=\psi_{n+1,j,k}$;

$y_{i,0,k}=\psi_{i,0,k}$; $y_{i,m+1,k}=\psi_{i,m+1,k}$;

$y_{i,j,0}=\psi_{i,j,0}$; $y_{i,j,p+1}=\psi_{i,j,p+1}$;

$$i=\overline{1,n};\ j=\overline{1,m};\ k=\overline{1,p};\ \alpha=\frac{1}{h_1^2};\ \beta=\frac{1}{h_2^2};\ \gamma=\frac{1}{h_3^2}. \quad (6)$$

Різницева задача /3/–/4/ є частковим випадком такої більш загальної задачі [3]: знайти визначену на $\bar{\omega}_h$ функцію $y(x)$, яка на ω_h задовольняє рівняння

$$\begin{cases} A(x)\,y(x) = \sum\limits_{\xi\in Ш'(x)} B(x,\xi)\,y(\xi) + F(x), & x\in\omega_h, \\ y(x) = \psi(x), & x\in\gamma, \end{cases} \qquad /7/$$

$$A(x)>0,\quad B(x,\xi)>0,\quad (x,\xi)\in\omega_h,$$

$$D(x) = A(x) - \sum_{\xi\in Ш'(x)} B(x,\xi) \geqslant 0,\quad x\in\omega_h, \qquad /8/$$

де $y(x)$ – розв"язок різницевої задачі; $Ш'(x)$ – множина всіх вузлів розглядуваного шаблону з центром в точці x, крім самого вузла x, тобто $\xi \neq x$; $A(x)$ і $B(x,\xi)$ – задані коефіцієнти рівняння.

Нехай граничні умови /2/ апроксимуються точно. Порівнюючи схему /6/ з /7/, одержуємо

$$A(x)=A(x_i,x_j,x_k)=\begin{cases} \frac{4}{5}\left[1+5(\alpha+\beta+\gamma)\right], & i=\overline{1,n};\ j=\overline{1,m};\ k=\overline{1,p}; \\ 1, & i=0,n+1;\ j=\overline{1,m};\ k=\overline{1,p}; \\ 1, & j=0,m+1;\ i=\overline{1,n};\ k=\overline{1,p}; \\ 1, & k=0,p+1;\ i=\overline{1,n};\ j=\overline{1,m}; \end{cases}$$

$$B(x,\xi)=\frac{1}{30}(20\alpha-5\beta-5\gamma+4)>0,\ \xi=(x_{i-1},x_j,x_k),(x_{i+1},x_j,x_k),$$

$$B(x,\xi)=\frac{1}{30}(20\beta-5\alpha-5\gamma+4)>0,\ \xi=(x_i,x_{j-1},x_k),(x_i,x_{j+1},x_k),$$

$$B(x,\xi)=\frac{1}{30}(20\gamma-5\alpha-5\beta+4)>0,\ \xi=(x_i,x_j,x_{k-1}),(x_i,x_j,x_{k+1}),$$

$$B(x,\xi)=\frac{1}{60}\left[5(\alpha+\gamma)-4\right]>0,\ \xi=(x_{i-1},x_{j-1},x_k),\ (x_{i+1},x_{j-1},x_k),$$
$$(x_{i-1},x_{j+1},x_k),\ (x_{i+1},x_{j+1},x_k),$$

$$B(x,\xi)=\frac{1}{60}\left[5(\beta+\gamma)-4\right]>0,\ \ \xi=(x_i,x_{j+1},x_{k-1}),\ (x_i,x_{j-1},x_{k-1}),$$
$$(x_i,x_{j+1},x_{k+1}),\ (x_i,x_{j-1},x_{k+1}),$$

$$B(x,\xi)=\frac{1}{60}\left[5(\beta+\alpha)-4\right]>0,\ \xi=(x_{i-1},x_j,x_{k-1}),\ (x_{i+1},x_j,x_{k-1}),$$
$$(x_{i+1},x_j,x_{k-1}),\ (x_{i+1},x_j,x_{k+1}),$$

$$B(x,\xi)=\frac{1}{30},\ \xi=(x_{i-1},x_{j+1},x_{k-1}),\ (x_{i+1},x_{j+1},x_{k-1}),$$
$$(x_{i-1},x_{j+1},x_{k+1}),\ (x_{i+1},x_{j+1},x_{k+1}),$$
$$(x_{i-1},x_{j-1},x_{k-1}),\ (x_{i+1},x_{j-1},x_{k-1}),$$
$$(x_{i-1},x_{j-1},x_{k+1}),\ (x_{i+1},x_{j-1},x_{k+1}),$$

$$D(x)=D(x_i,x_j,x_k)=\begin{cases}
0; & i=\overline{2,n-1};\quad j=\overline{2,m-1};\quad k=\overline{2,p-1};\\
\frac{1}{h_1^2}; & i=1,n;\quad j=\overline{1,m};\quad k=\overline{1,p};\\
\frac{1}{h_2^2}; & j=1,m;\quad i=\overline{1,n};\quad k=\overline{1,p};\\
\frac{1}{h_3^2}; & k=1,p;\quad i=\overline{1,n};\quad j=\overline{1,m};\\
1; & i=0,n+1;\quad j=\overline{1,m};\quad k=\overline{1,p};\\
1; & j=0,m+1;\quad i=\overline{1,n};\quad k=\overline{1,p};\\
1; & k=0,p+1;\quad i=\overline{1,n};\quad j=\overline{1,m}.
\end{cases}$$

Таким чином, при виконанні умови /5/ коефіцієнти різницевої схеми /6/ задовольняють умови /8/. Область $\bar{\omega}_h$ – зв"язна, тому на основі наслідку з принципу максимуму існує єдиний розв"язок задачі /6/.

Розв"язок неоднорідного рівняння /6/ запишемо у такому вигляді:

$$y_h = y_h^{(1)} + y_h^{(2)},$$

де $y_h^{(1)}$ – розв"язок неоднорідного рівняння /6/ з однорідними умовами; $y_h^{(2)}$ – розв"язок відповідного однорідного рівняння з неоднорідними крайовими умовами. Для розв"язку справедлива оцінка [2]

$$\| y_h^{(2)} \|_{C_h} \leq \| \psi \|_{\gamma}, \qquad /9/$$

де

$$\| y \|_{C_h} = \max_{x \in \bar{\omega}_h} | y(x) |.$$

Щоб оцінити розв"язок $y_h^{(1)}$ в $\bar{\omega}_h$, будуємо мажорантну функцію

$$V(x_1, x_2, x_3) = \frac{\delta_c}{6} \left[\rho_c^2 - \sum_{\alpha=1}^{3} (x_\alpha - c_\alpha)^2 \right],$$

де $\delta_c = \max_{x \in \omega_h} | f(x) |$; ρ_c – радіус сфери; (c_1, c_2, c_3) – центр сфери. Причому область ω_h розташована всередині сфери. Тоді

$$\Delta_h V_h(x) = -\delta_c, \quad x = (x_1, x_2, x_3) \in \omega_h;$$

$$V_{0,j,k} = V_{n+1,j,k} = 0, \; j = \overline{1,m}, \; k = \overline{1,p};$$

$$V_{i,0,k} = V_{i,m+1,k} = 0, \; i = \overline{1,n}, \; k = \overline{1,p};$$

$$V_{i,j,0} = V_{i,j,p+1} = 0, \; i = \overline{1,n}, \; j = \overline{1,m}.$$

Використовуючи метод одержання апріорних оцінок [2], для розв"язку задачі /6/ одержуємо оцінку

$$\| y_h \|_{C_h} \leq \frac{\rho_c^2}{6} \| g_h \|_{C_h^{(1)}} + \| \psi \|_{\gamma}, \quad \| g_h \|_{C_h^{(1)}} = \max_{x \in \omega_h} |g(x)|,$$

що означає стійкість різницевої схеми /6/. Таким чином, різницева схема /6/ на рівномірній сітці має четвертий порядок точності, а на кубічній – збігається зі швидкістю $O(h^6)$.

Список літератури: I. Л ю д к е в и ч Й.В., Д у д и к е в и ч А.Т. Різницеві апроксимації підвищеного порядку для рівняння Пуассона в просторі. – Вестн. Львов. ун-та. Сер. мех.-мат., 1982, вип. I9, с.3-6. 2. Л я ш к о И.И., М а к а р о в В.Л., С к о р о б о г а т ь к о А.А. Методы вычислений. – К.: Вища школа, 1977. – 408 с. 3. С а м а р с к и й А.А. Теория разностных схем. – М.: Наука, 1977. – 552 с. 4. С а м а р с к и й А.А., А н д р е е в В.Б. Разностные методы для эллиптических уравнений. – М.: Наука, 1976. – 352 с.

Стаття надійшла до редколегії 3.01.83

УДК 519.6

Н.І.Пустомельникова

ОПТИМАЛЬНИЙ ЗА ЛОКАЛЬНОЮ ПОХИБКОЮ ЧИСЕЛЬНИЙ МЕТОД ДРУГОГО ПОРЯДКУ

Обгрунтуємо явний, дробово-раціональний чисельний метод другого порядку, на локальну похибку якого не впливає сама структура дробово-раціональної формули методу. Наявність такого впливу може суттєво зменшувати крок інтегрування при реалізації чисельного методу [3, 4].

В основі дослідження чисельного методу другого порядку [I]

$$y_{n+1}^{[2]} = y_n + \frac{hK_1^2}{2K_1 - K_2}, \tag{I}$$

де

$$k_1 = f(x_n, y_n), \quad k_2 = f(x_n + \tfrac{1}{2}h,\ y_n + \tfrac{1}{2}hk_1); \qquad /2/$$

$$y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0 . \qquad /3/$$

Локальна похибка чисельного методу /1/, записана через похідні розв"язку задачі Коші, задається виразом

$$T_{n+1}^{[2]} = \frac{\frac{1}{12}h^3\left[3\left(y_n''\right)^2 - 2y_n' y_n'''\right]}{y_n' - \frac{1}{2}hy_n''} \qquad /4/$$

і суттєво залежить від структури дробово-раціональної формули чисельного методу /1/. При цьому чисельні характеристики методу /1/ значно погіршуються при $k_1 = O(h)$ або $2k_1 - k_2 = O(h)$.

На основі /1/ побудуємо чисельний метод

$$y_{n+1}^{[2]} = y_n + \frac{hk_1\left(1 - u + \frac{3}{4}u^2 - \frac{3}{4}u^3 + \frac{1}{8}u^4\right)}{1 - \frac{3}{2}u + \frac{3}{2}u^2 - \frac{5}{4}u^3 + \frac{3}{4}u^4 - \frac{1}{8}u^5}, \qquad /5/$$

який характеризується локальною похибкою

$$\tilde{T}_{n+1}^{[2]} = \frac{1}{6}h^3 y_n''', \qquad /6/$$

а структура дробово-раціональної формули /5/ впливає тільки на члени розкладу в ряд Тейлора по h, починаючи з h^6, тобто

$$y_{n+1}^{[2]} = y_n + hk_2 + \frac{-\frac{1}{4}h^6 k_1\left(\frac{k_2 - k_1}{k_1}\right)^5 + O(h^7)}{1 - \frac{3}{2}u + \frac{3}{2}u^2 - \frac{5}{4}u^3 + \frac{3}{4}u^4 - \frac{1}{8}u^5}, \qquad /7/$$

де

$$u = \frac{k_2 - k_1}{k_1} . \qquad /8/$$

Доведено, що чисельний метод /5/, /2/, /8/ має такі властивості:

1/ відносно модельного рівняння $y' = -\lambda y$ $(Re\lambda > 0,\ z = \lambda h)$ він жорстко стійкий і характеризується оператором переходу

$$D_2(z)=\frac{1+\frac{1}{2}z+\frac{1}{2}z^2+\frac{1}{2}z^3}{1+\frac{3}{2}z+\frac{3}{2}z^2+\frac{5}{4}z^3+\frac{3}{4}z^4+\frac{1}{8}z^5}; \qquad /9/$$

2/ відносно модельного рівняння $y'=-\lambda y+\varphi$ ($\varphi=const$, $Re\lambda>0$, $z=\lambda h$) стійкий в правій частині [4];

3/ узгоджений з порядком $S=2$ і другим порядком точності.

Отже, чисельний метод /5/, /2/, /8/ має всі властивості чисельних методів розв"язку жорстких диференціальних рівнянь. Його використання при розв"язку текстових прикладів дало позитивні результати не тільки порівняно з іншими методами такого ж типу, але й з новим методом Ейлера другого порядку.

Список літератури: I. Боднарчук П.И., Максимив Е.М. Нелинейные многошаговые методы решения дифференциальных уравнений. - В кн.: Вопросы качественной теории дифференциальных уравнений и их приложения. К., I978, с.9-I0. 2. Самарский А.А. Введение в численные методы. - М.: Наука, I982. - 27I с. 3. Wanbecq A. Nonlinear methods in solving ordinary differential equations.- J. Coup. Appl. Math., 1976, 2, N1, p. 27-33. 4. Lambert J.D. Computational Methods in Ordinary Differential Equations. - London-New-York, 1973. — 373 p.

Стаття надійшла до редколегії I2.04.83

УДК 537.533.33

I.I.Ширій

ЗОВНІШНЯ ПРОСТОРОВА ЗАДАЧА НЕЙМАНА ДЛЯ РІВНЯННЯ ЛАПЛАСА У ВИПАДКУ НЕЗАМКНЕНИХ ПОВЕРХОНЬ

Для розв"язування інтегрального рівняння застосуємо метод граничних елементів: густину шукаємо за допомогою фінітних функцій із заданими апріорними особливостями на краю граничної поверхні, а інтегрування ведемо по частині поверхні. Крім того, спростимо задання граничної поверхні, для якої необхідно задати тільки систему вузлів.

Поставлена задача зводиться до розв"язування двомірного інтегрального рівняння Фредгольма першого роду

$$\iint_S \sigma(r)\, K(r_0, r)\, dS = f(r_0), \quad r_0 \in S,$$

$$K(r_0, r) = n_0\,(r_0 - r) / |r_0 - r|^{1/2}, \qquad /1/$$

де $\sigma(r)$ – невідома густина; $|r_0 - r|^{1/2}$ – відстань між фіксованою точкою $r_0(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ простору та довільною точкою $r(x, y, z)$ поверхні, тобто $|r_0 - r|^{1/2} = [(x-\bar{x})^2 + (y-\bar{y})^2 + (z-\bar{z})^2]^{1/2}$; n_0 – зовнішня нормаль до поверхні S в точці r_0.

Поверхню S можна апроксимувати за допомогою сукупності чотирикутних 4-вузлових, 8-вузлових і 12-вузлових елементів, що відповідає білінійній, біквадратичній або бікубічній зміні форми поверхні [1]. Декартові координати довільної точки криволінійного чотирикутника e_i, на які розбита поверхня S, виражаються через координати вузлових точок і деяких функцій від внутрішніх координат таким чином:

$$x = x_i(\xi, \eta) = \sum_{l=1}^{n} N^l(\xi, \eta)\, x_i^l,$$

$$y = y_i(\xi, \eta) = \sum_{l=1}^{n} N^l(\xi, \eta)\, y_i^l, \qquad /2/$$

$$z = z_i(\xi, \eta) = \sum_{l=1}^{n} N^l(\xi, \eta)\, z_i^l,$$

де n – кількість вузлових точок елемента e_i; (x_i^l, y_i^l, z_i^l) – декартові координати l-ї вузлової точки елемента; $N^l(\xi, \eta)$ – для кожного конкретного випадку можна вивести. Припустимо далі, що шукана густина з /1/ на кожному з елементів може змінюватись білінійно, біквадратично або бікубічно. Задамо її з особливістю на краю граничної поверхні у вигляді

$$\sigma(\xi, \eta) = \sum_{j=1}^{m} \Phi_j(\xi, \eta)\, \Theta_j(\xi, \eta), \qquad /3/$$

де

$$\sigma_j(\xi,\eta)=\begin{cases}\sum\limits_{\ell=1}^{n}\mu_j^{\ell}M^{\ell}(\xi,\eta), & \text{якщо } (\xi,\eta)\in e_j,\\ 0\quad, & \text{якщо } (\xi,\eta)\notin e_j;\end{cases}$$

m – кількість елементів e_j; $M^{\ell}=(\xi,\eta)=N^{\ell}(\xi,\eta)$, μ_j^{ℓ} – значення функції $\sigma(\xi,\eta)$ в ℓ -му вузлі елемента e_j; $\theta_j(\xi,\eta)$ – функція, що враховує особливість у густині на елементах, які прилягають до краю поверхні.

Таким чином, внаслідок заміни змінних /2/ і задання густини /3/ інтегральне рівняння /1/ набере вигляду

$$\sum_{j=1}^{m}\left\{\sum_{\ell=1}^{n}\mu_j^{\ell}\iint\limits_{D}Q_j(\xi,\eta)M^{\ell}(\xi,\eta)I_j(\xi,\eta)\mathcal{K}_j(\hat{x},\xi,\eta)\,d\xi\,d\eta\right\}=f(\hat{x}),\quad \hat{x}\in S \qquad /4/$$

де

$$\mathcal{K}_j(\hat{x},\xi,\eta)=\frac{[\bar{x}-x_j(\xi,\eta)]\cos(n,\bar{n}_x)+[\bar{y}-y_j(\xi,\eta)]\cos(n,n_{\bar{y}})+[\bar{z}-z_j(\xi,\eta)]\cos(n,n_{\bar{z}})}{\{[\bar{x}-x_j(\xi,\eta)]^2+[\bar{y}-y_j(\xi,\eta)]^2+[\bar{z}-z_j(\xi,\eta)]^2\}^{3/2}},$$

$\hat{x}=(\bar{x},\bar{y},\bar{z})$; $D=[-1,1]\times[-1,1]$ – "стандартний" квадрат зміни параметрів ξ,η; $I_j(\xi,\eta)$ – якобіан переходу. Позначивши P – загальну кількість вузлів на S і вибравши $p\geq P$ точок колокації для визначення невідомих значень густини μ_j^{ℓ} у вузлах елементів e_j, дістанемо систему лінійних алгебраїчних рівнянь

$$\sum_{j=1}^{m}\left\{\sum_{\ell=1}^{n}\mu_j^{\ell}\iint\limits_{D}\theta_j(\xi,\eta)M^{\ell}(\xi,\eta)I_j(\xi,\eta)\mathcal{K}_j(\hat{x},\xi,\eta)\,d\xi\,d\eta\right\}_{\hat{x}=\hat{x}_i}=f(\hat{x}_i),\quad i=1,2,\dots,p. \qquad /5/$$

Враховуючи, що вузол $\hat{x}_i$ може потрапляти в Q_k елементів, де Q_k = 1, 2, 4 залежно від розміщення вузла та ступеня апроксимації, і позначивши густину у вузлі через a_k, систему /5/ можна записати у вигляді

$$\sum_{k=1}^{P}a_k\left\{\iint\limits_{D}\sum_{j=1}^{Q_k}\theta_j(\xi,\eta)M^{j}(\xi,\eta)I_j(\xi,\eta)\mathcal{K}_j(\hat{x}_i,\xi,\eta)\,d\xi\,d\eta\right\}=f(\hat{x}_i). \qquad /6/$$

Конкретизуємо вигляд функції $Q_j(\xi,\eta)$. Припустимо, що розмір сітки, по вузлах якої апроксимується поверхня, $p\times g$. Тоді $m=(p-1)(g-1)$, а $\theta_j(\xi,\eta)$ запишемо як

$$\theta_j(\xi,\eta)=\begin{cases}(1-\xi)^{-n_1}(1+\eta)^{-n_2}, & j=1\\ (1+\xi)^{-n_3}(1+\eta)^{-n_2}, & j=(g-1)(p-2)+1\\ (1-\xi)^{-n_1}(1-\eta)^{-n_4}, & j=g-1\\ (1+\xi)^{-n_3}(1-\eta)^{-n_4}, & j=(g-1)(p-1)\\ (1-\xi)^{-n_1}, & j=2,3,\dots,(g-2)\\ (1+\xi)^{-n_3}, & j=(g-1)(p-2)+2,\dots,(g-1)(p-1)-1\\ (1+\eta)^{-n_2}, & j=(g-1)\cdot k+1,\ k=1,2,\dots,(p-3)\\ (1-\eta)^{-n_4}, & j=(g-1)\cdot k,\quad k=2,3,\dots,(p-2)\\ 1 & \end{cases} \qquad /7/$$

у внутрішніх елементах сітки; $0\leq n_i<1,\ i=\overline{1,4}$. Особливість у густині виділяють для тих елементів, що є на краю поверхні. Наведемо вигляд відповідних замін змінних для виділення особливості в густині:

$$\begin{aligned}&j=1:\ \xi=1-\lambda^{\frac{1}{1-n_1}},\quad \eta=\delta^{\frac{1}{1-n_2}}-1,\\ &j=(g-1)(p-2)+1:\ \xi=\lambda^{\frac{1}{1-n_3}}-1,\quad \eta=\delta^{\frac{1}{1-n_2}}-1,\\ &j=g-1:\ \xi=1-\lambda^{\frac{1}{1-n_1}},\quad \eta=1-\delta^{\frac{1}{1-n_4}},\\ &j=(g-1)(p-1):\ \xi=\lambda^{\frac{1}{1-n_3}}-1,\quad \eta=1-\delta^{\frac{1}{1-n_4}},\\ &j=2,3,\dots,(g-2):\ \xi=1-\lambda^{\frac{1}{1-n_1}},\quad \eta=\delta,\\ &j=(g-1)(p-2)+2,\dots,(g-1)(p-1)-1:\ \xi=\lambda^{\frac{1}{1-n_3}}-1,\quad \eta=\delta,\\ &j=(g-1)\cdot k+1,\quad k=1,2,\dots,(p-3):\ \xi=\lambda,\quad \eta=\delta^{\frac{1}{1-n_2}}-1,\\ &j=(g-1)\cdot k,\quad k=2,3,\dots,(p-2):\ \xi=\lambda,\quad \eta=1-\delta^{\frac{1}{1-n_4}},\end{aligned} \qquad /8/$$

$\xi=\lambda,\ \eta=\delta$ у внутрішніх елементах сітки.

Розглянемо коефіцієнти матриці /6/. Якщо точка колокації $\hat{x}_i \in e_i$, то ядро $\mathcal{K}_j(\hat{x}, \xi, \eta)$ матиме особливість, яку виділяємо. Введемо для цього такі позначення:

$$\overset{i}{M} = \overset{i}{M}(\xi, \eta);\ \overset{i}{\bar{M}} = \overset{i}{M}(\bar{\xi}, \bar{\eta});\ I_k = I_k(\xi, \eta);\ \bar{I}_k = I_k(\bar{\xi}, \bar{\eta}),\ i = 1, \ldots, 4;$$

$$F_H(\hat{x}_k, \xi, \eta) = \{Q(\xi - \bar{\xi})^2 + P(\xi - \bar{\xi})(\eta - \bar{\eta}) + N(\eta - \bar{\eta})^2\} / \{A^2(\xi - \bar{\xi})^2 +$$
$$+ 2B(\xi - \bar{\xi})(\eta - \bar{\eta}) + C^2(\eta - \bar{\eta})^2\}^{3/2};\quad \hat{x}_k = r_H(\bar{\xi}, \bar{\eta}), \text{ якщо } \hat{x}_k \in e_H;$$

$$Q = n_0 r'_{H_{\xi\xi}};\quad P = 2n_0 r'_{H_\xi} r'_{H_\eta};\quad N = n_0 r'_{H_{\eta\eta}};\quad A = |r'_{H_\xi}|;\quad C = |r'_{H_\eta}|;$$

$$B = r'_{H_\xi} r'_{H_\eta} \qquad \delta_{H,K} = \begin{cases} 1, & \hat{x}_k \in e_H \\ 0 & \hat{x}_k \notin e_H \end{cases}.$$

До кожного доданку підінтегральної функції рівняння системи /6/ додамо і віднімемо величину, а саме, значення густини і якобіана переходу в точці $\hat{x}_k$, помножене на $F_H(\hat{x}_k, \xi, \eta)$. Тоді систему /6/ запишемо у вигляді

$$\sum_{k=1}^{P} a_k \sum_{j=1}^{Q_k} \iint_D [\overset{j}{M} I_j \mathcal{K}_j(\hat{x}_H, \xi, \eta) - \delta_{j,k} \overset{j}{\bar{M}} \bar{I}_j F_j(\hat{x}_k, \xi, \eta)]\, d\xi\, d\eta +$$
$$+ a_k \sum_{j=1}^{Q_k} \iint_D \delta_{j,k} \overset{j}{\bar{M}} \bar{I}_j F_j(\hat{x}_k, \xi, \eta)\, d\xi\, d\eta = f(\hat{x}_k). \qquad /9/$$

У /9/ перший інтеграл особливості в ядрі не має, а другий обчислюється аналітично. Провівши в першому інтегралі в формули /9/ заміну змінних /8/, отримаємо систему рівнянь з виділеними особливостями в ядрі та густині.

Визначивши невідомі a_k із перетвореної системи /9/, розв"язок інтегрального рівняння /1/ у будь-якій точці простору $\hat{z} \in R^3$ шукаємо за формулою

$$u(\hat{z}) = \sum_{k=1}^{P} a_k \iint_D \sum_{j=1}^{Q_k} q(\xi, \eta) \overset{j}{M}(\xi, \eta) I_j(\xi, \eta) \bar{\mathcal{K}}_j(\hat{z}, \xi, \eta)\, d\xi\, d\eta, \qquad /10/$$

$$\bar{\mathcal{K}}_j(\hat{z}, \xi, \eta) = \{[\bar{x}_1 - x_j(\xi, \eta)]^2 + [\bar{y}_1 - y_j(\xi, \eta)]^2 + [\bar{z}_1 - z_j(\xi, \eta)]^2\}^{-1/2},\quad \hat{z} = (\bar{x}_1, \bar{y}_1, \bar{z}_1).$$

Список літератури: I. Л а ш а Ж.К., У о т с о н Дж.О. Усовершенствованная программа для решения трехмерных задач теории упругости методом граничных интегральных уравнений. - В кн.: Метод граничных интегральных уравнений. М.: Мир, 1978, с. III-128. 2. Л ю д к е в и ч И.В., Ш и р и й И.И. Решение задачи Неймана для уравнения Лапласа на незамкнутых поверхностях методом интегральных уравнений. - Львов, 1983. - 10 с. Рукопись деп. в УкрНИИНТИ, № 1182 Ук-Д83. 3. Л ю д к е в и ч И.В., Ш и р и й И.И. Численное решение граничных задач теории потенциала для многосвязных областей. - Теорет. электротехника, 1982, вып. 33, с.12-16.

Стаття надійшла до редколегії 16.02.84

УДК 518.517.948

В.А.Бакалець, В.А.Пучка

КОМПЛЕКС ПРОГРАМ РОЗРАХУНКУ СКЛАДНИХ ЕЛЕКТРОННО-ОПТИЧНИХ СИСТЕМ

Основне завдання сучасного програмного продукту, орієнтованого на задачі математичної фізики, забезпечення точності й економічності обчислень [2]. Досягнути цієї мети можна за рахунок розробки ефективних алгоритмів, проведення детального модульного аналізу, вибору економних схем обчислення, а також організації інтерактивної взаємодії з прикладною програмою. Виходячи з цього, розроблено комплекс програм розрахунку потенціалу, напруженостей еквіпотенціальних ліній електростатичного поля, що створюються розімкнутими просторовими конфігураціями. Вибраний клас поверхонь - це найбільш вживані елементи електронно-оптичних систем /ЕОС/: нескінченно тонкі смужки, пластинки й оболонки, які можуть мати довільні вирізи.

Як відомо [3], просторову задачу розрахунку ЕОС можна звести до двомірного інтегрального рівняння Фредгольма першого роду, для розв"язування якого використовують методику виділення особливості [1]. Не обмежуючи загальності, запишемо систему лінійних алгебраїчних рівнянь, яку одержуємо з інтегрального рівняння методом коллокації по одній поверхні,

$$\sum_{k=1}^{n} a_k A_{kj} = U_j \;, \quad j = \overline{1,n}, \qquad /1/$$

де $A_{kj} = A_{kj}^{(1)} + A_{kj}^{(2)}$; a_k – невідомі параметри апроксимації густини; U_j – значення потенціалу в точках коллокації на поверхні. Доданки, що визначають кожен елемент матриці, мають такий вигляд:

$$A_{kj}^{(1)} = \iint\limits_{\square} \frac{1}{\sqrt{1-\vartheta^2}} \mathcal{H}_{kj}(\vartheta,\tau)\, d\vartheta\, d\tau, \qquad /2/$$

$$A_{kj}^{(2)} = \frac{1}{\sqrt{1-\vartheta_j^2}} \mu_k(\vartheta_j, \tau_j)\, \Omega_j, \qquad /3/$$

де $$\mathcal{H}_{kj}(\vartheta,\tau) = Q_k(\vartheta,\tau) R_j^{-1}(\vartheta,\tau) - \sqrt{\frac{1-\vartheta^2}{1-\vartheta_j^2}}\, Q_k(\vartheta_j,\tau_j) F_j(\vartheta,\tau); \qquad /4/$$

$$Q_k(\vartheta,\tau) = \mu_k(\vartheta,\tau)\, \Phi(\vartheta,\tau),\; R_j(\vartheta,\tau) = [(x(\vartheta,\tau)-\bar{x}_j)^2 + (y(\vartheta,\tau)-\bar{y}_j)^2 + (z(\vartheta,\tau)-\bar{z}_j)^2]^{\frac{1}{2}}; \qquad /5/$$

$$\Omega_j = \Phi(\vartheta_j, \tau_j) \iint\limits_{\square} F_j(\vartheta,\tau)\, d\vartheta\, d\tau, \; \square = [-1,1] \times [0,1]; \qquad /6/$$

$\mu_k(\vartheta,\tau)$ – це система дробово-раціональних функцій [3], яка використовується для наближення розв"язку інтегрального рівняння; $\Phi(\vartheta,\tau)$ – елемент площі, що виникає при переході від подвійного інтегралу до повторного; (ϑ_j, τ_j) – точка коллокації, образом якої у декартовій системі координат є точка $(\bar{x}_j, \bar{y}_j, \bar{z}_j)$; $F_j(\vartheta,\tau)$ – спеціально побудована функція [1], однією з властивостей якої є те, що інтеграл /6/ береться в квадратурах. Послідовно застосовуючи квадратурні формули Ерміта по ϑ і Гаусса по τ , інтеграл обчислюємо за формулою

$$A_{kj}^{(1)} = C \sum_{\ell=1}^{n_\ell} \sum_{s=1}^{n_s} d_s \mathcal{K}_{kj} (\vartheta_\ell, \tau_s), \qquad /7/$$

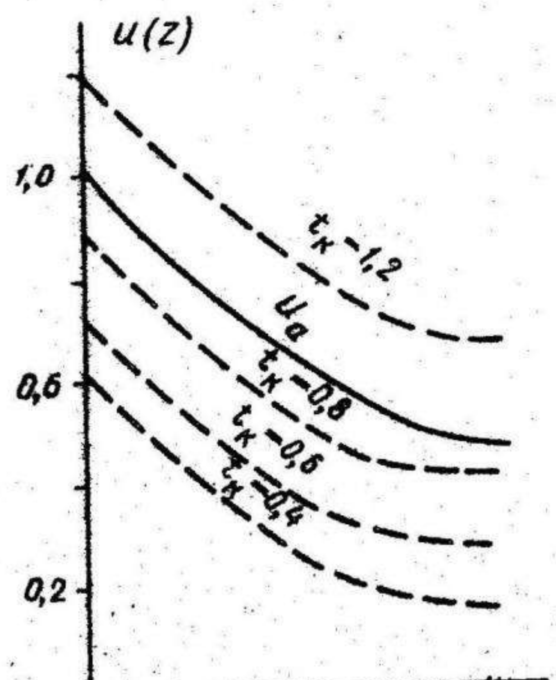
де d_s, τ_s – коефіцієнти і вузли формули Гауса; ϑ_ℓ – вузли формули Ерміта; $C = const$.

Використовуючи /7/, для заповнення матриці системи /I/ необхідно виконати $2n^2 n_\ell n_s$ обчислень функцій $Q_k(\vartheta, \tau)$ і $R_j(\vartheta, \tau)$. Значний виграш в часі дає заповнення всіх елементів матриці в даному вузлі інтегрування, змінивши порядок сумування. При цьому суттєвим стає те, що індекси k, j у формулі /4/ розділяються. Таке нашарування елементів матриці дає змогу здійснювати лише $n n_\ell n_s$ обчислень кожної функції. Реалізація цього дала змогу скоротити час обчислення критичного місця програми – обчислення поверхневих інтегралів.

Розв"язувати задачі розрахунку ЕОС на базі методу інтегральних рівнянь можна за такими основними етапами: підготовка дискретизації інтегрального рівняння, розв"язування системи рівнянь /I/, аналіз одержаного розв"язку, розрахунок потенціалу, напруженостей і побудови еквіпотенціалів. Проведення конкретних розрахунків вимагає повторення певних кроків алгоритму для підбору оптимальних параметрів. Ефективна у цьому випадку організація діалогу з програмою. В середовищі ДОС ЕС як термінал програма використовує пульт оператора, а при роботі в системі "Дубна" БЭСМ-6-дисплей при підтримці підсистемою МУЛЬТИТАЙП [4].

На першому етапі роботи програми необхідно описати геометрію конфігурацій, точки розрахунку і задати, якщо необхідно, параметри методу: порядок апроксимації густини, точність інтегрування, кількість розбиттів, нелінійний параметр t_k [3] і т.д. За замовчуванням ці величини вибирають стандартними. Наступний етап полягає в побудові матриці системи /I/. При цьому здійснюють розбиття поверхонь точками коллокації, враховують симетрію конфігурацій, виділяють особливість в ядрі і т.д. Наявність слабкої особливості в ядрі інтегрального оператора гарантує добру зумовленість системи рівнянь. Але, крім того, корисно знати число $cond(A)$ зумовленості матриці системи, яке отримують на третьому етапі паралельно з розв"язуванням системи рівнянь. Для цього використовують спеціальну підпрограму [5], яка у випадку точної виродженості матриці припиняє обчислення. Чисельні експерименти показали, що у нашому випадку число зумовленості перебуває у межах $10^4/n \leq cond(A) \leq 10^4$. Такий контроль обчислювального процесу дає змогу уникнути помилок.

При аналізі отриманого розв"язку інтегрального рівняння необхідно відповісти на таке питання: чи досить взятих параметрів наближеного методу для подальшого розрахунку ЕОС з деякою точністю? Апостеріорна похибка розв"язку, що виводиться на термінал, дає змогу вирішити, як продовжувати роботу програмі. Якщо точність не достатня, то, змінивши параметри методу, можна зробити переобчислення. Для зміни параметрів необхідно набирати відповідні ідентифікатори та значення їх на терміналі. Маючи інформацію про точність отримуваного розв"язку, переходять до заключного етапу.



Слід відзначити, що при необхідності кінцеві результати виводять теж на термінал.

Така структура програми дала змогу провести ряд досліджень з підбору оптимальних параметрів наближеного методу. Зокрема, для задачі розрахунку поля просторового диску, що має аналітичний розв"язок, вдалося при допомозі нелінійного параметру t_k досягти абсолютної похибки 10^{-4}. Поведінку потенціалу поля при різних значеннях t_k показано на рисунку пунктирами, а крива U_a відповідає аналітичному розв"язку і збігається з наближеним розв"язком при $t_k = 1.0$ з вказаною точністю.

Список літератури: 1. Б а к а л е ц ь В.А., П у ч к а В., Ш и р и й И.И. Расчет электростатического поля с нарушенной осевой симметрией в пространственной постановке. - Львов, 1983. - 14 с. Рукопись деп. в ВИНИТИ, № 390-83. 2. И л ь и н В., Вопросы технологии пакетов программ для задач математической физики. - В кн.: Разработка пакетов прикладных программ. Новосибирск: Наука, 1982, с. 113-129. 3. Л ю д к е в и ч И.В., Г о р д и й ч у к В.И., Б а к а л е ц В.А. и др. Численное решение пространственных задач теории потенциала. - Львов: Изд-во при ЛГУ, 1979. - 116 с. 4. М а з н ы й Г.Л. Программирование на БЭСМ-6 в системе "Дубна". - М.: Наука, 1978. - 272 с. 5. Ф о р с а й т Дж., М а л ь к о л ь м М., М о у л е р К. Машинные методы математических вычислений. - М.: Мир, 1980. - 280 с.

Стаття надійшла до редколегії 23.02.84

УДК 517.958

Ю.М.Сибіль

ЗАДАЧА НЕЙМАНА ДЛЯ РІВНЯННЯ ГЕЛЬМГОЛЬЦА НА ПЛОЩИНІ У ВИПАДКУ РОЗІМКНУТИХ ГРАНИЦЬ

I. Нехай $L=\bigcup_{j=1}^{n} L_j$, де $L_j=]a_j,b_j[$ – інтервал на осі Ox; $\bar{L}$ – замикання L. Точки R^2 позначимо через $x=(x_1,x_2)$, $y=(y_1,y_2)$ і т.д., $|x-y|$ – відстань між x і y.

Необхідно знайти $U(x)$, що задовольняє рівняння Гельмгольца в $R^2\setminus\bar{L}$

$$\Delta U+k^2U=0,\quad \mathrm{Im}\,k\leq 0, \qquad /1/$$

граничну умову на L

$$\left(\frac{\partial U}{\partial n}\right)^{\pm}=f_{\pm}, \qquad /2/$$

де $f_{\pm}$ – неперервні за Гельдером функції, умову випромінювання на нескінченності

$$\lim_{R\to\infty}\int_{\Sigma_R}\left|\frac{\partial U}{\partial R}+ikU\right|dS_x=0, \qquad /3/$$

де Σ_R – коло радіуса R, та умову типу Майкснера на кінцях L^k

$$\lim_{\rho\to 0}\sum_{j=1}^{2n}\int_{C_j(\rho)}\left|\frac{\partial U}{\partial \rho}\right|dS_x=0, \qquad /4/$$

де $C_j(\rho)$ – коло радіуса ρ навколо j-го кінця L. Позначимо $Q(x,y)=\frac{1}{4i}H_0^{(2)}(k|x-y|)$ – фундаментальний розв"язок рівняння /1/, де $H_0^{(2)}$ – функція Ханкеля другого роду нульового порядку.

<u>Теорема 1</u>. Якщо розв"язок задачі /1/-/4/ існує, то він задається у вигляді

$$U(x)=-\int_L\frac{\partial Q(x,y)}{\partial n_y}\tau(y)\,dS_y+\int_L Q(x,y)\{f_-(y)-f_+(y)\}\,dS_y. \qquad /5/$$

Тут τ – розв"язок наступного сингулярного інтегро-диференціального рівняння першого роду

$$H\tau=\int_L \tau'(S)\frac{\partial Q(S,S_0)}{\partial S_0}dS+k^2\int_L \tau(S)Q(S,S_0)dS=g(S_0),\ S_0\in L \qquad /6/$$

з умовою

$$\tau(a_i)=\tau(b_i)=0,\quad i=\overline{1,n}, \qquad /7/$$

де $g(S_0)=-\frac{1}{2}\{f_+(S_0)+f_-(S_0)\}+\int_L\frac{\partial Q(S,S_0)}{\partial n_0}\{f_-(S)-f_+(S)\}dS.$

I навпаки, функція задана через /5/, де τ – розв"язок рівняння /6/ з умовою /7/, є розв"язком задачі /I/–/4/.

Доведення. Функцію, що задовольняє /I/, /3/, /4/, можна записати як [3]

$$u(x)=-\int_L\frac{\partial Q(x,y)}{\partial n_y}\{\bar u(y)-\overset{+}{u}(y)\}dS_y+\int_L Q(x,y)\left\{\left(\frac{\partial u(y)}{\partial n_y}\right)^- -\left(\frac{\partial u(y)}{\partial n_y}\right)^+\right\}dS_y.$$

Вважаємо, що $x=(S_0,x_2)$, $y=(S,0)$, $x_0=(S_0,0)$, а $\frac{\partial}{\partial n}$ і $\frac{\partial}{\partial n_0}$ – диференціювання по нормалі до L відповідно у точках y і x_0. Тоді, використовуючи властивості нормальної похідної потенціалів подвійного та простого шару, а також умову /2/, одержуємо

$$\int_L\tau'(S)\frac{\partial Q(S,S_0)}{\partial S_0}dS+k^2\int_L\tau(S)Q(S,S_0)dS-R(S_0)=g(S_0),\ S_0\in L, \qquad /8/$$

де $R(S_0)=\sum_{i=1}^{n}\tau(S)\frac{\partial Q(S,S_0)}{\partial S_0}\Big|_{a_i}^{b_i}$, а $\tau(S)=\bar u(S)+\overset{+}{u}(S)$.

Оскільки $u(x)$ обмежена в R^2, то й τ обмежена в кінцях L. Покажемо необхідність виконання умови /7/. Після деяких перетворень /8/

$$\int_L\tau(S)\frac{\partial Q(S,S_0)}{\partial S}dS=-G(S_0)-c, \qquad /9/$$

де $G(S_0)=-k^2\int_L\tau(S)\{\int Q(S,S_0)dS_0\}dS+\int g(S_0)dS_0$; c – довільна константа. Виділяючи в $Q(S,S_0)$ сингулярну частину, маємо

$$\frac{\partial Q(S,S_0)}{\partial S} = -\frac{1}{2\pi}\,\frac{1}{S-S_0} + \frac{\partial Q_1(S,S_0)}{\partial S},$$

де $Q_1(S,S_0)$ – неперервно-диференційована по S і S_0 .

Перепишемо /9/ як

$$\frac{1}{2\pi}\int_L \frac{\tau(S)}{S-S_0}\,dS = \int_L \tau(S)\,\frac{\partial Q_1(S,S_0)}{\partial S}\,dS + G(S_0) + C. \qquad /10/$$

Розглянемо рівняння

$$\frac{1}{\pi}\int_a^b \frac{\varphi(S)}{S-S_0}\,dS = \psi(S_0) + C, \quad S_0 \in\,]a,b[, \qquad /11/$$

де $\psi(S_0)$ – неперервна за Гельдером функція; C – константа, не визначена заздалегідь. Тоді рівняння /11/ має розв"язок, обмежений на обох кінцях для довільної $\psi(S_0)$ [2] :

$$\varphi(S) = -\sqrt{(S-a)(b-S)}\,\frac{1}{\pi}\int_a^b \frac{\psi(S_0)}{\sqrt{(S_0-a)(b-S_0)}}\,\frac{dS_0}{S_0-S}, \qquad /12/$$

а константа C визначається єдиним чином:

$$C = \frac{1}{\pi}\int_a^b \frac{\psi(S_0)\,dS_0}{\sqrt{(S_0-a)(b-S_0)}}.$$

Застосовуючи вищенаведені міркування до /10/, одержуємо таку лему.

Лема. Розв"язок $\tau(S)$ рівняння /8/ задовольняє в околі c_i умову

$$\tau(S) = \sigma(S)\cdot|S-c_i|^{1/2}, \qquad /13/$$

де $c_i = a_i$ чи b_i , $i=\overline{1,n}$, $\sigma(S)$ – неперервно диференційована за Гельдером на L , причому $\sigma(c_i) \neq 0$. З /13/ випливає виконання умови /7/, і $R(S_0)=0$.

Доведемо достатність. Очевидно, функція, задана формулою /5/, задовольняє /1/ і /3/, а також /4/ /внаслідок обмеженості в околі кінців L /. Використовуючи /6/ і /7/, а також властивості потенціалів простого і подвійного шару, переконуємось, що $U(x)$ задовольняє /2/.

2. Теорема 2. Якщо $\tau(S)$ – розв"язок рівняння $H\tau=0$ з умовою /7/, то $\tau\equiv 0$ на L.

Доведення. Аналогічно [3] можна довести теорему єдиності для задачі /I/–/4/. Нехай $\tau_0 S \not\equiv 0$ на L і $H\tau_0 = 0$. Тоді за теоремою I, $V(x) = -\int\limits_L \frac{\partial Q(x,y)}{\partial n_y} \tau_0(y)\, dS_y$ – розв"язок задачі /I/–/4/ з умовою $f_{\pm} = 0$. Але $\tau(S) = U^-(S) - U^+(S)$. Отже, за теоремою єдиності $\tau(S)\equiv 0$ на L.

Теорема 2 доводить існування оберненого оператора H^{-1}, неперервного в сенсі такої теореми.

Теорема 3. Якщо $H\tau = g$, то $\forall\varepsilon>0\,\exists\,\delta>0$:

$$\|g\|_L = \max_{S\in L} |g(S)| < \delta \Rightarrow \|\tau\|_L < \varepsilon.$$

Теорема 3 має важливе значення для аналізу чисельних методів розв"язування рівняння /6/.

3. Теорема 4. Задача /I/–/4/ має єдиний розв"язок.

Доведення. Застосовуючи /II/ і /I2/ до /I0/, одержуємо інтегральне рівняння Фредгольма другого роду

$$\tau(S) - \int\limits_L \tau(t) M(S,t)\, dt = F(S), \quad S\in L, \qquad /I4/$$

яке разом з умовою /7/ еквівалентне задачі /I/–/4/. Розглянемо однорідне рівняння

$$\tau(S) - \int\limits_L \tau(t) M(S,t)\, dt = 0. \qquad /I5/$$

З теореми 2 випливає, що /I5/ має лише тривіальний розв"язок. Тому альтернатива Фредгольма дасть нам, що рівняння /I4/, а отже, і задача /I/–/4/ має єдиний розв"язок.

4. Для чисельного розв"язання рівняння /6/ доцільно застосувати метод колокації, розкладаючи невідому густину $\tau(S)$ по поліномах Чебишева другого роду. При цьому автоматично задовольняються умови на $\tau(S)$ і $\tau'(S)$, що випливають з леми. Для обчислення коефіцієнтів системи лінійних алгебраїчних рівнянь, які мають логарифмічну особливість в ядрі, зручно використати метод виділення особливостей [I].

Список літератури: I. Людкевич И.В., Сибиль Ю.Н. Численное решение граничных задач для разомкнутых поверхностей методом выделения особенностей. - Львов, 1982. - 26 с. - Рукопись деп. в ВИНИТИ № 4935-82. 2. Мусхелишвили Н.И. Сингулярные интегральные уравнения. - М.: Наука, 1968. - 512 с. 3. J. Hayashi. The Dirichlet problem for the two-dimensional Helmholtz equation for an open boundary. - J. Math. Anal. Appl., 1973, vol. 44, p. 489-530.

Стаття надійшла до редколегії 24.02.84

УДК 518:517.944/947

С.М.Левицька

ПРО ТРЕТЮ ПРОСТОРОВУ ЗАДАЧУ ДЛЯ РІВНЯННЯ ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ

Відома методика розв"язування першої просторової задачі для рівняння теплопровідності [I]. Третя плоска задача для цього рівняння у випадку скінчених областей складної конфігурації розв"язана у праці [2].

Розглянемо третю просторову задачу для рівняння нестаціонарної теплопровідності

$$\Delta T=\frac{\partial T}{\partial \tau};\; T\Big|_{\tau=0}=0;\; \left(\alpha(Q)+\beta(Q)\frac{\partial}{\partial n}\right)T(Q,\tau)=\varphi(Q,\tau),\; Q\in S, \qquad /I/$$

де $S=\bigcup\limits_{j=1}^{N} S_j$ - сукупність розімкнутих поверхонь; $\varphi(Q,\tau)$ - задана умова на краю. Розв"язок задачі /I/ шукаємо у вигляді потенціалу простого шару

$$T(\bar{X},t)=\int_0^t d\tau\iint_S q(S,\tau)\delta(R,t-\tau)dS,\ \bar{X}\in\mathbb{R}^3, \qquad /2/$$

де $q(S,\tau)$ – невідома густина; $\delta(R,t-\tau)=\exp\left(-\frac{R^2}{4(t-\tau)}\right)/[4\pi(t-\tau)]^{3/2}$ – функція впливу теплового джерела; $R^2=|X-\bar{X}|^2=\sum_{i=1}^{3}(x_i-\bar{x}_i)^2$ – відстань між змінною точкою $X=(x_1,x_2,x_3)$ поверхні S і фіксованою точкою $\bar{X}=(\bar{x}_1,\bar{x}_2,\bar{x}_3)$ простору.

Задача зводиться до відшукання густини $q(S,\tau)$. Область зміни параметру τ розбиваємо на $(p-1)$ частин точками $\tau_k=(k-1)h_1$ $(k=\overline{1,p})$ і на кожному частинному проміжку $[\tau_{k-1},\tau_k]$ $(k=\overline{1,p})$ невідому густину $q(S,\tau)$ зобразимо у вигляді лінійної функції за часовою змінною

$$q(S,\tau)=\frac{1}{h_1}\left\{q^{(k-1)}(S)(\tau_k-\tau)+q^{(k)}(S)(\tau-\tau_{k-1})\right\},\ q^{(0)}(S)=0. \qquad /3/$$

Підставляючи /3/ у /2/ і обчислюючи інтеграли за часом, одержуємо

$$T(\bar{X},t)=\frac{1}{2^3\pi}\left\{\iint_S q^{(p)}(S)\left[I_0^{(-1)}-\frac{1}{h_1}I_1^{(-1)}\right]dS+\sum_{k=1}^{p-1}\iint_S q^{(k)}(S)\left[\nabla^2(jI_0^{(j)})-\frac{1}{h_1}\nabla^2 I_1^{(j)}\right]dS\right\}, \qquad /4/$$

де

$$I_0^{(j)}=\frac{2}{R}\,\mathrm{erfc}\left(\frac{R}{2\sqrt{h_1 j}}\right);\quad I_1^{(j)}=\frac{2\sqrt{h_1 j}}{\sqrt{\pi}}e^{-\frac{R^2}{4h_1 j}}-R\,\mathrm{erfc}\left(\frac{R}{2\sqrt{h_1 j}}\right); \qquad /5/$$

$j=p-k-1$, $\mathrm{erfc}(x)=1-\mathrm{erf}(x)$, $\mathrm{erf}(x)$ – інтеграл ймовірності.

Задовольняючи крайову умову, для визначення невідомої густини запишемо послідовність рекурентних інтегральних рівнянь:

$$\frac{1}{2^3\pi}\iint_S q^{(p)}(S)\left\{\alpha(Q)\left[I_0^{(-1)}-\frac{1}{h_1}I_1^{(-1)}\right]+\beta(Q)\left[I_2^{(-1)}-\frac{1}{h_1}I_3^{(-1)}\right]\right\}dS=$$
$$=\varphi(Q,t)-\frac{1}{2^3\pi}\sum_{k=1}^{p-1}\iint_S q^{(k)}(S)\left\{\alpha(Q)\left[\nabla^2(jI_0^{(j)})-\frac{1}{h_1}\nabla^2 I_1^{(j)}\right]+\right. \qquad /6/$$
$$\left.+\beta(Q)\left[\nabla^2(jI_2^{(j)})-\frac{1}{h_1}\nabla^2 I_3^{(j)}\right]\right\}dS;$$

де

$$I_2^{(j)}=\frac{\partial}{\partial n}I_0^{(j)}=-2T(n_0,X,\bar{X})\left\{\frac{1}{\sqrt{\pi h_1 j}}\cdot\frac{e^{-\frac{R^2}{4h_1 j}}}{R^2}+\frac{\operatorname{erfc}\left(\frac{R}{2\sqrt{h_1 j}}\right)}{R^3}\right\}; \qquad /7/$$

$$I_3^{(j)}=\frac{\partial}{\partial n}I_1^{(j)}=-T(n_0,X,\bar{X})\frac{\operatorname{erfc}\left(\frac{R}{2\sqrt{h_1 j}}\right)}{R}; \qquad /8/$$

$T(n_0,X,\bar{X})=\sum_{i=1}^{3}(x_i-\bar{x}_i)\cdot\cos\gamma_i$, $\cos\gamma_i$ – напрямні косинуси нормалі n_0 .

Нехай нам відоме параметричне представлення поверхні S :

$X=X(u,v)$, $(u,v)\in\Delta$, $\Delta=\{U_2\le u\le U_1,\ V_2\le v\le V_1\}$.

В інтегральному рівнянні /6/ перейдемо від поверхневого інтегралу до повторного .

$$\frac{1}{2^3\pi}\iint_\Delta q^{(p)}(u,v)\mathcal{J}(u,v)\{\alpha(Q)C_1^{(-1)}(R)+\beta(Q)C_2^{-1}(R)\}du\,dv=$$

$$=\varphi(Q,t)-\frac{1}{2^3\pi}\sum_{K=1}^{p-1}\iint_\Delta q^{(K)}(S)\mathcal{J}(u,v)\{\alpha(Q)C_1^{(j)}(R)+\beta(Q)C_2^{(j)}(R)\}du\,dv \qquad /9/$$

де $\mathcal{J}(u,v)=\sqrt{\left(\sum_{i=1}^{3}x_{i_u}'^2\right)\left(\sum_{i=1}^{3}x_{i_v}'^2\right)-\sum_{i=1}^{3}x_{i_u}'\,x_{i_v}'}$ – якобіан переходу.

Задача звелась до відшукання деякої двовимірної функції $q^{(K)}(u,v)$. Розіб"ємо прямокутник Δ на $(L+1)(M+1)$ частин точками (u_m,v_ℓ), $m=\overline{1,M+1}$, $\ell=\overline{1,L+1}$, де $u_m-u_{m-1}=h_2$, $m=\overline{2,M}$; $v_\ell-v_{\ell-1}=h_3$, $\ell=\overline{2,L}$; $u_1-u_0=u_{M+1}-u_M=v_1-v_0=v_{L+1}-v_L=\bar{h}_2$; $\bar{h}_2\ll h_2$, $\bar{h}_2\ll h_3$.

У кожному внутрішньому прямокутнику густину зобразимо у вигляді білінійної комбінації

$$q^{(K)}(u,v)=\frac{1}{h_2h_3}\delta(u,v)\{[q_{m,\ell}^{(K)}(u_{m+1}-u)+q_{m+1,\ell}^{(K)}(u-u_m)](v_{\ell+1}-v)+$$
$$+[q_{m,\ell+1}^{(K)}(u_{m+1}-u)+q_{m+1,\ell+1}^{(K)}(u-u_m)](v-v_\ell)\},\ m=\overline{1,M-1},\qquad /10/$$
$$\ell=\overline{1,L-1}.$$

для крайових прямокутників маємо

$$q^{(K)}(u,v)=\begin{cases}\dfrac{\delta(u,v)}{h_3}\left[q^{(K)}_{\varkappa,\ell}(v_{\ell+1}-v)+q^{(K)}_{\varkappa,\ell+1}(v-v_\ell)\right], & \ell=\overline{1,L-1},\ \varkappa=1VM\\ \dfrac{\delta(u,v)}{h_2}\left[q^{(K)}_{m,\eta}(u_{m+1}-u)+q^{(K)}_{m+1,\eta}(u-u_m)\right], & m=\overline{1,M-1},\ \eta=1VL\end{cases} \qquad /11/$$

і, врешті, кутових:

$$q^{(K)}(u,v)=\delta(u,v)\,q^{(K)}_{\varkappa,\eta}, \qquad \varkappa=1VM,\ \eta=1VL. \qquad /12/$$

Множник $\delta(u,v)$ враховує особливості густини на краях області S

$$\delta(u,v)=\delta_1(u)\cdot\delta_2(u)\cdot\delta_3(v)\cdot\delta_4(v)$$

$$\delta_1(u)=\sqrt{\frac{h_2}{u-u_0}};\quad \delta_2(u)=\sqrt{\frac{h_2}{u_{M+1}-u}};\quad \delta_3(v)=\sqrt{\frac{h_2}{v-v_0}};\quad \delta_4(v)=\sqrt{\frac{h_2}{v_{L+1}-v}}.$$

Підставляючи /10/–/12/ в /9/, одержуємо послідовність інтегральних рівнянь першого роду

$$\frac{1}{2^3\pi}\sum_{\ell=1}^{L}\sum_{m=1}^{M}q^{(K)}_{m\ell}A^{(-1)}_{m,\ell}=\varphi(Q,t)-\frac{1}{2^3\pi}\sum_{K=1}^{p-1}\sum_{\ell=1}^{L}\sum_{m=1}^{M}q^{(K)}_{m,\ell}A^{(j)}_{m,\ell}, \qquad /13/$$

де

$$A^{(j)}_{m,\ell}=\frac{1}{h_2h_3}\Big\{\iint\limits_{\Delta_{m,\ell}}\delta(u,v)\Phi^{(j)}_{m-1,\ell+1}(u,v,\bar u,\bar v)\,du\,dv-\iint\limits_{\Delta_{m+1,\ell}}\delta(u,v)\Phi^{(j)}_{m+1,\ell-1}(u,v,\bar u,\bar v)\,du\,dv-$$

$$-\iint\limits_{\Delta_{m,\ell+1}}\delta(u,v)\Phi^{(j)}_{m-1,\ell+1}(u,v,\bar u,\bar v)\,du\,dv+\iint\limits_{\Delta_{m+1,\ell+1}}\delta(u,v)\Phi^{(j)}_{m+1,\ell+1}(u,v,\bar u,\bar v)\,du\,dv\Big] \text{ і т.д.}, \qquad /14/$$

$$\Phi^{(j)}_{m,\ell}(u,v,\bar u,\bar v)=J(u,v)\left[\alpha(Q)\zeta^{(j)}_1(R)+\beta(Q)\zeta^{(j)}_2(R)\right](u-u_m)(v-v_\ell).$$

Інтегральне рівняння /13/ розв"язується методом колокації. Задовольняючи крайові умови в точках $(\bar u_\nu, \bar v_\mu)\in S$, одержуємо систему лінійних алгебраїчних рівнянь, з яких можна визначити невідомі $q^{(p)}_{m,\ell}$, вважаючи, що $q^{(K)}_{m,\ell}$ $(K=\overline{1,p-1})$ знайдені.

Нехай точки спостереження $(\bar u_\nu, \bar v_\mu)$ збігаються з точками розбиття області (u_m, v_ℓ). Інтегруючи особливості ядра інтегрального рівняння, записуємо матрицю системи лінійних алгебраїчних рівнянь з явним діагональним переважанням. Можна показати [2], що коефіцієнти правих частин систем довизначаються в особливій точці виразом $-\alpha(Q)\frac{4}{\sqrt{4h_1}}\nabla^2 V_j$.

Використовуючи ідею методу В.Л.Канторовича і беручи до уваги результати праці [3] у лівій частині /I3/ усуваємо особливості типу $1/R$ і $T(n_0, X, \bar{X})/R^3$. В особливій точці маємо

$$\iint\limits_{\Delta_{m,\ell}} \delta(u,v)\Phi^{(j)}_{m,\ell}(u,v,\bar{u}_\nu,\bar{v}_\mu)\,du\,dv = \beta_{m,\ell}(\bar{u}_\nu,\bar{v}_\mu,\bar{u}_\nu,\bar{v}_\mu)\left(\frac{|X''_{uu}|}{|X'_u|^2}+G_1\right)+$$

$$+\bar{\bar{\beta}}_{m\ell}(\bar{u}_\nu,\bar{v}_\mu,\bar{u}_\nu,\bar{v}_\mu)\left(\frac{n_0\cdot X'''_{uuu}}{6|X'_u|^3}+G_2\right)+\Omega_{m,\ell}(\bar{u}_\nu,\bar{v}_\mu,\bar{u}_\nu,\bar{v}_\mu), \qquad /I5/$$

де $\bar{\beta}_{m\ell}(\bar{u}_\nu,\bar{v}_\mu,\bar{u}_\nu,\bar{v}_\mu)$, $\bar{\bar{\beta}}_{m\ell}(\bar{u}_\nu,\bar{v}_\mu,\bar{u}_\nu\bar{v}_\mu)$, $\Omega_{m,\ell}(\bar{u}_\nu,\bar{v}_\mu,\bar{u}_\nu,\bar{v}_\mu)$ - деякі скінчені величини або нулі.

У послідовності систем лінійних алгебраїчних рівнянь /I3/ коефіцієнти $A^{(j)}_{1,1}$, $A^{(j)}_{M,1}$, $A^{(j)}_{M,L}$, $A^{(j)}_{1,L}$; $A^{(j)}_{M,\ell}$, $A^{(j)}_{1,\ell}$, $\ell=\overline{1,L-1}$; $A^{(j)}_{m,1}$, $A^{(j)}_{m,L}$, $m=\overline{1,M-1}$ мають ще один тип особливостей за рахунок представлення густини /I0/–/I2/. Ці особливості усуваються спеціальними замінами змінних:

$$u^{(1)}=\bar{h}_2\zeta^2+u_0, \qquad v^{(1)}=\bar{h}_2\xi^2+v_0,$$
$$u^{(2)}=u_{M+1}-\bar{h}_2\zeta^2, \qquad v^{(2)}=v_{L+1}-\bar{h}_2\xi^2,$$
$$u^{(3)}=-\zeta h_2+u_m, \qquad v^{(3)}=-\xi h_2+v_\ell,$$
$$u^{(4)}=\zeta h_2+u_m, \qquad v^{(4)}=\xi h_2+v_\ell, \qquad \zeta,\xi\in[0,1].$$

Тоді коефіцієнти системи /I3/ дещо перетворяться. Наприклад,

$$A^{(j)}_{1,1}=\int_0^1\!\!\int_0^1\Big\{4\bar{h}_2\delta_2(u^{(1)})\delta_4(v^{(1)})\Phi^{(j)}(u^{(1)},v^{(1)},\bar{u}_\nu,\bar{v}_\mu)-$$
$$-2\bar{h}_2\delta_1(u^{(4)})\delta_2(u^{(4)})\delta_4(v^{(1)})\bar{\Phi}^{(j)}_{m+1}(u^{(4)},v^{(1)},\bar{u}_\nu,\bar{v}_\mu)-$$
$$-2\bar{h}_2\delta_2(u^{(1)})\delta_3(v^{(3)})\delta_4(v^{(3)})\Phi_{\ell+1}(u^{(1)},v^{(3)},\bar{u}_\nu,\bar{v}_\mu)+\delta(u^{(4)},v^{(4)})\times$$
$$\times\,\Phi^{(j)}_{m+1,\ell+1}(u^{(4)},v^{(4)},\bar{u}_\nu,\bar{v}_\mu)\Big\}d\zeta\,d\xi$$

$$A_{m,l}^{(j)} = \int_0^1\int_0^1 \{ 2\bar{h}_2 (\delta_1(u^{(3)})\delta_2(u^{(3)})\delta_4(v^{(1)})\bar{\Phi}_{m-1}^{(j)}(u^{(3)},v^{(1)},\bar{u}_\nu,\bar{v}_\mu) -$$

$$- \delta_1(u^{(4)})\delta_2(u^{(4)})\delta_4(v^{(1)})\bar{\Phi}_{m+1}^{(j)}(u^{(4)},v^{(1)},\bar{u}_\nu,\bar{v}_\mu)) - \delta(u^{(3)},v^{(4)}) \times$$

$$\times \Phi_{m-1,l+1}^{(j)}(u^{(3)},v^{(4)},\bar{u}_\nu,\bar{v}_\mu) + \delta(u^{(4)},v^{(4)})\Phi_{m+1,l+1}^{(j)}(u^{(4)},v^{(4)},\bar{u}_\nu,\bar{v}_\mu) \} d\eta\, d\xi,$$

де $\Phi^{(j)}(u,v,\bar{u}_\nu,\bar{v}_\mu) = J(u,v)[\alpha(Q)C_1^{(j)}(R) + \beta(Q)C_2^{(j)}(R)]$,

$$\bar{\Phi}_m^{(j)}(u,v,\bar{u}_\nu,\bar{v}_\mu) = \Phi^{(j)}(u,v,\bar{u}_\nu,\bar{v}_\mu)(u-u_m),\quad \bar{\bar{\Phi}}_l^{(j)}(u,v,\bar{u}_\nu,\bar{v}_\mu) = \Phi^{(j)}(u,v,\bar{u}_\nu,\bar{v}_\mu)(v-v_l).$$

Розв"язавши на кожному кроці за часом систему лінійних алгебраїчних рівнянь /13/, визначимо невідомі величини $q_{m,l}^{(p)}$. Тоді температура у будь-якій точці простору визначатиметься за формулою

$$T(\bar{x},t) = \sum_{k=1}^{P}\sum_{l=1}^{L}\sum_{m=1}^{M} q_{ml}^{(k)} \cdot A_{ml}^{(j)} \qquad \text{при } \beta(Q) = 0.$$

Список літератури: 1. Бережанская З.С., Людкевич И.В., Шинкаренко Г.А. Решение нестационарной задачи теплопроводности для пространства со щелями методом интегральных уравнений. – В кн.: Обобщенные функции в термоупругости. К.: Наукова думка, 1980, с.76–80. 2. Левицкая С.М., Бережанская З.С. Плоская смешанная задача для уравнения теплопроводности. – Львов, 1982. – 16 с. – Рукопись деп. в ВИНИТИ № 5939–82. 3. Фрейкман Б.Г. Выделение особенностей в интегральных уравнениях трехмерного электромагнитного поля. Журн. техн. физики, 1980, 50, вып.2, с.425–427.

Стаття надійшла до редколегії 23.02.84

УДК 517.947:534

О.А.Музичук

ЧИСЕЛЬНЕ РОЗВ"ЯЗУВАННЯ ОСЕСИМЕТРИЧНОЇ ЗАДАЧІ ДІРІХЛЕ ДЛЯ ХВИЛЬОВОГО РІВНЯННЯ

Нехай в евклідовому просторі R^3 задана область D, обмежена поверхнею обертання S з віссю симетрії OZ. У циліндрі $Ц = D_e \times (0,\infty)$, $D_e = R^3 \setminus D$ потрібно знайти розв"язок $u(M,t) \in C^2(Ц) \cap C^1(\bar{Ц})$ хвильового рівняння

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \qquad /1/$$

який задовольняє однорідні початкові умови

$$u\Big|_{t=0} = \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = 0 \qquad /2/$$

та граничні умови типу Діріхле

$$u\Big|_S = f(M,t), \quad M \in S, \; t \geq 0 \qquad /3/$$

й обмежений на нескінченності. Задача /1/–/3/ записана у безрозмірних величинах $x = x'/a$, $y = y'/a$, $z = z'/a$, $t = ct'/a$, де c – швидкість звуку в середовищі; a – характерний розмір області D. Вважаємо, що функція f симетрична відносно осі OZ.

Застосуємо до поставленої задачі інтегральне перетворення Чебишева–Лагерра за змінною t. Тоді у просторі зображень одержимо нескінченну трикутну систему задач Діріхле для неоднорідного рівняння Гельмгольца [2]

$$\Delta u_n - \varkappa^2 u_n = \varkappa^2 \sum_{m=0}^{n-1} (n-m+1) u_m; \qquad /4/$$

$$u_n\Big|_S = f_n, \quad n = 0,1,\ldots, \qquad /5/$$

де $\varkappa$ – параметр інтегрального перетворення,

$$U_n(M)=\int\limits_0^\infty U(M,t)e^{-\varkappa t}L_n(\varkappa t)dt - \qquad /6/$$

зображення розв"язку вихідної задачі;

$$f_n(M)=\int\limits_0^\infty f(M,t)e^{-\varkappa t}L_n(\varkappa t)dt - \qquad /7/$$

зображення граничного значення /3/; L_n – поліноми Чебишева – Лагерра.

Розв"язок n –го рівняння системи /4/ шукаємо у вигляді

$$U_n(M)=\iint\limits_S \sum_{m=0}^{n} q_m(P)\varphi_{n-m}(M,P)dS_p, \qquad /8/$$

де q_m – невідомі густини; φ_k – фундаментальні розв"язки диференціальних рівнянь

$$\varphi_k(M,P)=exp(-\varkappa R_{MP})L_k(\varkappa R_{MP})/R_{MP}.$$

Зауважимо, що оскільки система /4/ трикутна, то при обчисленні розв"язку U_n невідома тільки густина q_n, а решта густин q_m $(m=\overline{0,n-1})$ вже визначені на попередніх етапах. Враховуючи крайові умови /5/, для визначення густини q_n одержуємо інтегральне рівняння типу Фредгольма першого роду

$$\iint\limits_S q_n(P)\varphi_0(M,P)dS_p=F_n(M), \quad M\in S, \qquad /9/$$

де

$$F_n(M)=f_n(M)-\iint\limits_S \sum_{m=0}^{n-1} q_m(P)\varphi_{n-m}(M,P)dS_p. \qquad /10/$$

Очевидно, що у випадку осьової симетрії межової поверхні і граничного значення розв"язки вихідної задачі, а також крайової задачі у просторі зображень осесиметричні, тобто не залежать від кута обертання і густини q_n $(n=0,1,\dots)$, а формули /8/ і /9/ значно спростяться.

Введемо циліндричну систему координат (r, z, φ). Розглянемо розв"язок задачі тільки у півплощині $\varphi=0$. Нехай твірна

L поверхні S задається параметричними рівняннями

$$\left.\begin{array}{l} r = r(\tau) \\ z = z(\tau) \end{array}\right\}, \quad \tau \in [T_1, T_2].$$

Тоді з врахуванням симетрії розв"язок U_n у довільній точці $(\bar{r}, \bar{z})$ набере вигляду

$$U_n(\bar{r},\bar{z}) = \int_{T_1}^{T_2} \sum_{m=0}^{n} q_m(\tau)\, G_{n-m}\, D(\tau)\, d\tau, \qquad /11/$$

де

$$G_k = \int_0^{2\pi} \exp(-\varkappa R)\, L_k(\varkappa R)/R\, d\varphi;$$

$$R = \left[r^2(\tau) + \bar{r}^2 - 2r(\tau)\bar{r}\cos\varphi + (z(\tau) - \bar{z})^2\right]^{1/2}; \quad D(\tau) = \left[r'^2 + z'^2\right]^{1/2}.$$

Відповідно перепишемо й /9/:

$$\int_{T_1}^{T_2} q_m(\tau)\, G_0\, D(\tau)\, d\tau = F_n(\bar{r},\bar{z}), \qquad /12/$$

де

$$F_n(\bar{r},\bar{z}) = f_n(\bar{r},\bar{z}) - \int_{T_1}^{T_2} \sum_{m=0}^{n-1} q_m(\tau)\, G_{n-m}\, D(\tau)\, d\tau.$$

До /12/ застосуємо методику з праці [3]. Невідому густину запишемо як

$$q_n(\tau) = \sum_{k=1}^{\bar{N}} a_k^{(n)} \psi_k(\tau), \qquad /13/$$

де $a_k^{(n)}$ – невідомі коефіцієнти; $\psi_k(\tau) = b_k / [b_k^2 + (\tau - \tau_k)^2]$ – дробово-раціональні функції; τ_k – точки побудови густини; b_k – нелінійні параметри. Граничні умови задовольняємо в точках колокації на допоміжній твірній L', достатньо близькій до твірної L. Одержуємо систему лінійних алгебраїчних рівнянь /СЛАР/

$$QA^{(n)} = F^{(n)}, \qquad /14/$$

де $A^{(n)}$ – вектор коефіцієнтів апроксимації густини q_n; $F^{(n)}$ – вектор значень функції $F^{(n)}$ в точках колокації $(\bar{r}_j, \bar{z}_j)$, $j = \overline{1,N}$.

Матриця СЛАР має вигляд

$$Q_{jk}^{(n)} = \int_{T_1}^{T_2} \psi_k(\tau) G_0 D(\tau) d\tau, \; j = \overline{1,N}, \; k = \overline{1,N}. \qquad /15/$$

З огляду на працю [3] завжди можна отримати добре зумовлену матрицю.

Зауважимо, що для кожної густини q_n вибрано однаковий вид апроксимації. Це дає змогу при визначенні густин користуватися однією матрицею. Більше того, якщо цю матрицю звести до трикутного виду, то для обчислення коефіцієнтів кожної з густин потрібно тільки перерахувати вектор $F^{(n)}$, застосувати до нього матричне перетворення, яке використовували при триангуляції матриці, і провести зворотній хід для розв"язання трикутної СЛАР.

Після того, як коефіцієнти апроксимації густини q_n визначені, значення розв"язку U_n у довільній точці $(\bar{r}, \bar{z})$ обчислюємо за формулою /11/. Точність одержаних розв"язків задачі у просторі зображень контролюємо шляхом задоволення граничних умов /5/ у контрольних точках, розміщених між точками колокації.

Як відомо [2], зв"язок між розв"язком задачі /1/-/3/ і розв"язками задачі у просторі зображень виражається рядом

$$U(\bar{r}, \bar{z}, t) = \varkappa \sum_{n=0}^{\infty} U_n(\bar{r}, \bar{z}) L_n(\varkappa t). \qquad /16/$$

При практичних розрахунках ряд /16/ обриваємо і користуємося його частинною сумою

$$U_N(\bar{r}, \bar{z}, t) = \varkappa \sum_{n=0}^{N} U_n(\bar{r}, \bar{z}) L_n(\varkappa t). \qquad /17/$$

Критерієм вибору числа N членів ряду /17/ є його практична збіжність. При цьому додавання нових членів не змінює значення розв"язку в заданих межах.

Описаний підхід до розв"язування нестаціонарної задачі /1/-/3/ реалізований у виді комплексу програм на мові ФОРТРАН і апробований на ряді прикладів.

Приклад I. Розглянемо модельну задачу, коли граничне значення не залежить від просторових координат і на поверхні сфери одиничного радіусу задається формулою

$$f(t) = t^3 \exp(3-3t).$$

Відомо, що аналітичний розв"язок такої задачі має вид [I]

$$u_a(r_0, t) = \frac{1}{r_0} f(t - r_0 + 1) H(t - r_0 + 1),$$

де r_0 $(r_0 \geq 1)$ – відстань від центра сфери, H – функція Хевісайда. Чисельний розв"язок одержуємо при N =I8 і $\bar{N}$ =20 для точок спостереження на осі Oz. На рис. I суцільними лініями

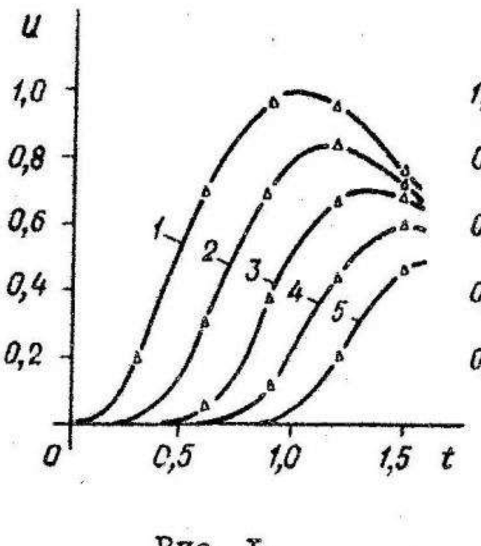


Рис. I.

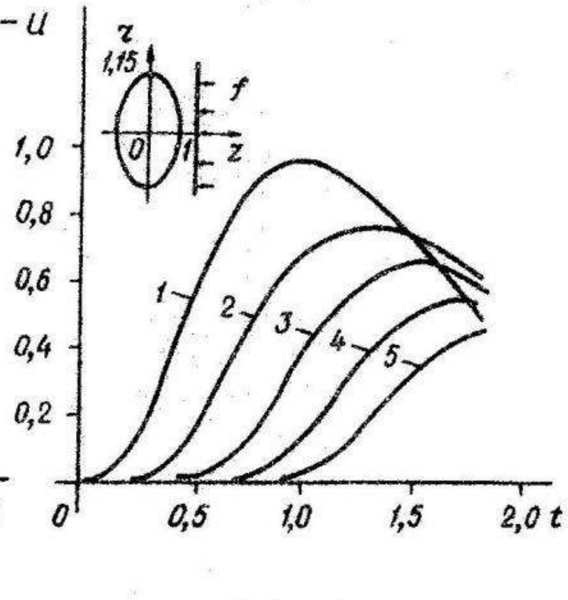


Рис. 2.

зображено аналітичний розв"язок поставленої задачі, а значком ▾ – значення чисельного розв"язку. Номер кривої p відповідає точці спостереження з координатою z = I,0I + 0,2 $(p-1)$. Абсолютна похибка чисельного розв"язку в розглянутих точках не перевищує 0,0I.

Приклад 2. Обчислимо тиск в імпульсі, відбитому від акустично м"якого еліпсоїда обертання. Припустимо, що в падаючому вздовж осі обертання плоскому імпульсі тиск змінюється за тим же законом, що й у попередньому випадку. Тоді на поверхні еліпсоїда тиск у відбитому імпульсі

$$f(r,z,t) = -(t-z+1)^3 \exp(3-3(t-z+1))H(t-z+1).$$

При чисельному розв"язуванні задачі у /I6/ збережено $N = 20$ членів, а густини апроксимували $\bar{N} = 20$ базисними функціями. У контрольних точках на межі значення розв"язків u_n відрізнялись від граничних значень менше, ніж на 0,0004. Графіки тиску в тих же точках спостереження, що й в прикладі 1, зображено на рис. 2.

Таким чином, запропоновано новий комбінований метод розв"язування нестаціонарних задач на основі поєднання методів інтегральних перетворень Чебишева – Лагерра й інтегральних рівнянь. Його застосування знижує розмірність вихідної задачі на дві одиниці. При цьому можна розв"язувати задачі для широкого класу поверхонь складної форми.

Список літератури: I. Владимиров В.С., Михайлов В.П., Вашарин В.Л. и др. Сборник задач по уравнениям математической физики. – М.: Наука, I982. – 256 с. 2. Галазюк В.А. Метод поліномів Чебишева – Лагерра в змішаній задачі для лінійного диференціального рівняння другого порядку з постійними коефіцієнтами. – Доп. АН УССР. Сер. А, I98I, № I, с.3-6. 3. Людкевич И.В., Музычук А.Е. Численное решение граничных задач для уравнения $\Delta u - x^2 u = 0$ в случае незамкнутых поверхностей. – Львов, I982. – 23 с. – Рукопись деп. в ВИНИТИ, № 3658-82.

Стаття надійшла до редколегії 22.02.84

УДК 681.3.06:51

О.В.Костів

МОДЕЛЮВАННЯ РОБОТИ М-АВТОМАТІВ У МАШИННОМУ СЕРЕДОВИЩІ АСЕМБЛЕРНОГО РІВНЯ

Для проведення аналізу алгоритмів запропонована модель обчислень [1], в якої адресність і набор операцій характерні для символьної обробки. Ця модель одержала назву М-машини. Побудована й апробована М-система, яка моделює М-машину на ЕОМ "Минск-22", призначена для експериментального одержання числових оцінок складності алгоритмів [2].

У процесі практичного застосування М-машини її структура зазнала ряду модифікацій. Для проведення експериментальних досліджень розроблена система, яка моделює М-машину програмними засобами асемблерного рівня ЕОМ серії ЕС.

М-машина - це m-стрічковий n-головочний автомат з двома спеціальними регістрами, призначеними для виконання операцій. Програма в М-машині не може самозмінюватись. Два основні компоненти цього автомата - робоча пам"ять і функціональний механізм. Формалізованим рівнем опису моделі обчислення є програма на мові М-машини /М-мові/.

Завдання побудови М-системи, яка включає в себе М-мову та її інтерпретатор, розглядається як частина загального завдання реалізації символьних перетворень на ЕОМ. Ця система може бути використана для відладки й оцінки алгоритмів, призначених для структурної фіксації у комплексі математичного забезпечення.

В інтерпретаторі М-системи наявні засоби моделювання пам"яті М-автоматів; засоби зв"язку з зовнішніми пристроями; засоби настроювання на алгебру користувача; засоби моделювання роботи М-автоматів; засоби для одержання експерментальних оцінок алгоритмів; засоби налагодження програм, написаних на М-мові /М-програм/.

Інтерпретатор організує в оперативній пам"яті масиви, які використовуються для моделювання функціонального механізму та робочої пам"яті М-машини. У робочій пам"яті розміщаються структури, що потрібні в процесі роботи алгоритму. За допомогою описів на М-мові ця пам"ять подається у вигляді стрічок, стеків, черг і фіксаторів. Для визначення позицій на стрічках використовують головки, які входять до класу фіксаторів.

М-програма складається з розділів настроювання, завантаження, присвоєння, операторів, довжин, даних. Розділи присвоєння й операторів становлять операторний блок програми, який розміщений у функціональній пам"яті.

Інтерпретатор побудований за модульним принципом і має оверлейнову структуру з керуючою кореневою фазою. Програми з"єднані в єдиний комплекс на рівні об"єктних модулів за допомогою редактора. Постійно у пам"яті знаходиться лише керуюча програма, яка викликає необхідні модулі і розміщає їх безпосередньо за собою.

У керуючій програмі наявні поля, призначені для реалізації функціональної та робочої пам"яті, а також постійні таблиці структур, властивостей даних, оброблюваних М-машиною, та міток операторів.

Нормальне чи аварійне завершення кожного модуля фіксується в полі індикатора інтерпретації, яке також знаходиться у керуючій програмі. Аварійне завершення окремих модулів призводить до аварійного завершення роботи всього інтерпретатора.

Виходячи з структури М-програми, інтерпретатор включає в себе модулі, призначені для реалізації окремих розділів програми:

INTRPNA - модуль настроювання на алгебру користувача;
INTRSTR - модуль введення описів структур;
INTRVVMP - модуль введення, роздруку і синтаксичного контролю операторного блоку М-програми;

INTRDLN – модуль введення довжин лінійних структур пам"яті М-автоматів;

INTRADR – модуль розміщення структур у робочій пам"яті;

INTRPRYT – модуль інтерпретації операторного блоку М-програми.

Завдання модуля *INTRPNA* – побудова таблиці властивостей даних, оброблюваних М-програмою. М-мова допускає дані двох типів /символьні та числові/ та п"яти видів /операнди, операції, адреси, обмежувачі та спецсимволи/. Належність елемента даних до певного виду використовується в алгоритмах символьних перетворень. Важливою властивістю елемента даних є його пріоритет. Крім цього, кожен вид характеризується певними властивостями /наприклад, для операцій такими властивостями є комутативність, кількість операндів тощо/. Інформація про всі властивості кожного елемента даних знаходиться в таблиці властивостей. При настроюванні на алгебру користувача відбувається заповнення цієї таблиці.

Якщо досліджують алгоритми символьних перетворень в алгебрі елементарних функцій, то можна скористатись стандартною таблицею властивостей даних.

У результаті роботи модуля *INTRSTR* за описами будується таблиця структур. М-система дає змогу працювати з наступними структурами пам"яті: стрічками, поділеними на комірки, на яких може бути встановлена одна або декілька головок, стеками, чергами та фіксаторами. Фіксатори – це структури величиною в одну комірку, доступ до яких здійснюється за їхньою назвою.

Всі структури, які використовують у процесі роботи алгоритму, повинні бути описані.

Модуль *INTRSTR* заносить в таблицю назву структури та її тип, а для фіксаторів і довжину. Кожен елемент таблиці структур складається з чотирьох полів, які використовують для розміщення назви структури, її типу, початкової адреси структури у пам"яті та довжини. Величина таблиці визначається загальною кількістю структур, заданих в описі.

Завдання модуля *INTRVVMP* – введення, розміщення у функціональній пам"яті та роздрукування операторного блоку М-програми, а також його синтаксичний і частковий семантичний аналіз. На етапі розміщення в пам"яті з програми видаляють коментарі.

Синтаксичний аналізатор розпізнає будову операторів М-мови. При правильній синтаксичній будові проводиться частковий семантичний контроль, на етапі якого перевіряється наявність виділених операндів у таблиці структур, їх тип тощо. Повідомлення про наявність і місце знаходження синтаксичних чи семантичних помилок видається на друк. Цей модуль будує також таблицю міток операторів М-програми.

Для задання довжини лінійних структур використовують модуль *INTRDLN*. Після введення довжини величина структури не може бути змінена. Довжини заносяться в таблицю структур.

Визначивши довжини, модуль *INTRADR* здійснює розподіл пам"яті робочого поля під всі структури і організує динамічні структури – стек і чергу. Цей модуль завершує формування таблиці структур і роздруковує її.

Після успішного завершення роботи всіх модулів починає працювати модуль *INTRPRYT*, який інтерпретує роботу М-автомата на різних даних, що утворюють вхідний потік. У цей модуль включені засоби оцінки алгоритмів. Для налагодження М-програм у модулі є трасування програм.

Оцінки обчислювальної складності алгоритмів у термінах операторів М-мови роздруковуються у випадку успішного завершення інтерпретації.

Всі модулі та керуюча програма інтерпретатора написані на мові асемблера. Загальний обсяг – близько 2500 операторів мови. За рахунок оверлейної структури об"єм пам"яті, необхідний для роботи інтерпретатора, визначається наступним чином:

$$V = V_{ЦП} + V_{TAB} + V_{MS} + V_{MAXM},$$

де $V_{ЦП}$ – об"єм пам"яті, необхідний для розміщення керуючої програми /враховуючи необхідні константи і робочі поля/; V_{TAB} – пам"ять, виділена під постійні таблиці; V_{MS} – об"єм, виділений під функціональну і робочу пам"ять; V_{MAXM} – об"єм, який займає найбільший модуль; $V_{ЦП}$ = 0,5 Кбайт; V_{TAB} = I Кбайт; V_{MS} =4Кбайт; V_{MAXM} = 7,5 Кбайт. Отже, для роботи інтерпретатора необхідний об"єм пам"яті V = I3 Кбайт.

Інтерпретатор пройшов комплексне налагодження в системі ДОС ЕС. Оцінки алгоритмів добре узгоджуються з теоретичними.

Наявність такої системи моделювання роботи М-автоматів дає змогу прогнозувати ефективність алгоритмів символьних перетворень, оцінених на М-машині у реальному середовищі асемблерного рівня.

Список літератури: I. К о ж е в н и к о в а Г.П. Об оценке эффективности алгоритмов символьных преобразований. – Управляющие системы и машины, I975, № I, с.98–I02. 2. К о ж е в н и к о в а Г.П., С о к о л я н с к а я Ц.Л., З а в а д а А.П. Машинное моделирование абстрактных М-автоматов, ориентированных на символьные преобразования и оценку их эффективности. – К., I975.– 20 с. – Препринт. ИК АН УССР, 75–32.

Стаття надійшла в редколегію I8.02.84

УДК 517.958:519.6

Г.А.Шинкаренко

ПОБУДОВА АПОСТЕРІОРНИХ ОЦІНОК ЧИСЕЛЬНОГО РОЗВ"ЯЗКУ КРАЙОВИХ ЗАДАЧ ДЛЯ РІВНЯННЯ ШТУРМА – ЛІУВІЛЛЯ

1. Нехай потрібно знайти розв"язок $u(x)$ рівняння Штурма – Ліувілля

$$-\frac{d}{dx}\left(p\frac{du}{dx}\right)+qu=f,\quad x\in\Omega=(0,1) \qquad /1/$$

з крайовими умовами

$$u(0)=0,\quad \frac{du(1)}{dx}=0, \qquad /2/$$

де функції $0<\underset{0}{p}\le p(x)\le\hat{p}$, $q(x)\ge 0$ і неперервні на відрізку $\Omega=(0,1)$, а $f(x)\in L_2(\Omega)$. Тоді існує єдиний розв"язок крайової задачі /1/, /2/.

2. Крайовій задачі /1/, /2/ можна поставити у відповідність декілька еквівалентних варіаційних задач [1, 2]. Відзначимо деякі з них.

Нехай $W_2^k(\Omega)=\left\{u:\frac{d^iu}{dx^i}\in L_2(\Omega),\ 0\le i\le k\right\}$ зі скалярним добутком $(u,v)_k=\sum\limits_{i=0}^{k}\left(\frac{d^iu}{dx^i},\frac{d^iv}{dx^i}\right)$ і нормою $\|u\|_k=\sqrt{(u,u)_k}$, де $(\cdot,\cdot)$ – скалярний добуток в $L_2(\Omega)$. Побудуємо наступні гільбертові простори функцій

$$\mathcal{U}=\{u:u(0),\ u\in W_2^1(\Omega)\}, \qquad /3/$$

$$\Sigma=\{\sigma:\sigma(1)=0,\ \sigma\in W_2^1(\Omega)\} \qquad /4/$$

зі скалярними добутками

$$a(u,v)=\int_0^1\left(p\frac{du}{dx}\frac{dv}{dx}+quv\right)dx,$$

$$b(\sigma,\tau)=\int_0^1\left(q^{-1}\frac{d\sigma}{dx}\frac{d\tau}{dx}+p^{-1}\sigma\tau\right)dx \qquad /5/$$

і відповідно нормами $\|u\|_u=\sqrt{a(u,u)}$, $\|\sigma\|_\Sigma=\sqrt{b(\sigma,\sigma)}$.

На просторах $\mathcal{U}$ і Σ визначимо лінійні функціонали

$$l(u)=(f,u),\quad k(\sigma)=\left(q^{-1}f,\frac{d\sigma}{dx}\right), \qquad /6/$$

а також квадратичні функціонали

$$L(u) = a(u,u) - 2l(u) \qquad u \in \mathcal{U}, \qquad /7/$$

$$\mathcal{K}(\sigma) = -b(\sigma,\sigma) + 2k(\sigma) - (\bar{q}^{1}f, f) \qquad \sigma \in \Sigma. \qquad /8/$$

Якщо більшою мірою цікавлять значення розв"язку $u^{*}(x)$ задачі /I/, /3/, то при чисельному знаходженні наближеного розв"язку доцільно користуватись варіаційною постановкою задачі /I/, /2/. Знайти $u^{*} \in \mathcal{U}$ таким, що

$$L(u^{*}) \leq L(u) \qquad \forall u \in \mathcal{U}. \qquad /9/$$

На практиці часто важливо визначити похідну $\sigma^{*}(x) = du^{*}/dx$, а не сам розв"язок задачі /I/, /2/. У цьому випадку варіаційна задача формулюється таким чином. Знайти $\sigma^{*} \in \Sigma$ таку, що

$$\mathcal{K}(\sigma) \leq \mathcal{K}(\sigma^{*}) \qquad \forall \sigma \in \Sigma. \qquad /10/$$

Важливо відзначити, що кожна з поставлених задач /9/ і /10/ має єдиний розв"язок u^{*} і σ^{*}, причому для них справедлива нерівність

$$\mathcal{K}(\sigma) \leq \mathcal{K}(\sigma^{*}) = L(u^{*}) \leq L(u) \qquad \forall u \in \mathcal{U}, \forall \sigma \in \Sigma. \qquad /11/$$

3. Варіаційні задачі про відшукання екстремальних значень функціоналів $L(u)$ і $\mathcal{K}(\sigma)$ ефективно розв"язують чисельно методом Рітца з вибором базисних функцій методом скінченних елементів /МСЕ/. При цьому, якщо u^{h} і σ^{h} – наближені розв"язки задач /9/ і /10/, то неважко встановити апріорні оцінки похибки апроксимації $u^{*} - u^{h}$, та $\sigma^{*} - \sigma^{h}$ у нормі простору $W_2^1(\Omega)$ [2].

Відзначимо, що властивість /11/ дає змогу ефективно побудувати апостеріорні оцінки для похибки $u^{*} - u^{h}$ і $\sigma^{*} - \sigma^{h}$ в нормах просторів $\mathcal{U}$ і Σ. Справді, оскільки

$$\| u^{*} - u^{h} \|_{\mathcal{U}}^{2} = a(u^{*} - u^{h}, u^{*} - u^{h}) \leq L(u^{h}) - \mathcal{K}(\sigma^{h}),$$

$$\| \sigma^{*} - \sigma^{h} \|_{\Sigma}^{2} = b(\sigma^{*} - \sigma^{h}, \sigma^{*} - \sigma^{h}) \leq L(u^{h}) - \mathcal{K}(\sigma^{h}),$$

то дістаємо наступні оцінки відносної похибки

$$e(u^h)=\frac{\|u^*-u^h\|_u}{\|u^*\|_u}\leqslant\sqrt{\frac{L(u^h)-\mathcal{K}(\sigma^h)}{-L(u^h)}},\quad e(\sigma^h)=\frac{\|\sigma^*-\sigma^h\|_\Sigma}{\|\sigma^*\|_\Sigma}\leqslant\sqrt{\frac{L(u^h)-\mathcal{K}(\sigma^h)}{\mathcal{K}(\sigma^h)+(q^{-1}f,f)}} \qquad /12/$$

Приклад I. Візьмемо $p(x)=q(x)\equiv 1$, $f(x)=x$ і скористаємось кусково-лінійними апроксимаціями на скінченних елементах.

Наближені розв"язки та апостеріорні оцінки похибок на різних сітках скінченних елементів

x	0	0,25	0,5	0,75	I,0	$10^5[L(u^h)-\mathcal{K}(\sigma^h)]$	$10^2 e$
$10^4 u^h$	0	864	I625	2I73	2386	3I46	I0,2
	0	863	I624	2I72	2385	I497	4,86
$10^4 \sigma^h$	3523	33I9	2695	I6II	0	3I46	6,45
	352I	33I7	2694	I6I0	0	I497	3,[illegible]7

Результати обчислень з таблиці свідчать, що алгоритм знаходження $u^*(x)$ – розв"язку задачі /9/, $\sigma^*=du^*/dx$ – розв"язку задачі /I0/, дає змогу обчислювати згадані величини достатньо точно, причому їх похибки мають один і той же порядок малості. Тут перший рядок кожної графи – розв"язок МСЕ на сітці з восьми, другий – на сітці з шістнадцяти елементів.

4. Особливої уваги заслуговує випадок, коли $q(x)\equiv 0$. При цьому задача /I0/ замінюється задачею про максимум функціоналу

$$\mathcal{K}_0(\sigma)\equiv -\int_0^1 p^{-1}\sigma^2\,dx \qquad /13/$$

на просторі функцій

$$\Sigma_0=\left\{\sigma:\sigma(1)=0;\ \frac{d\sigma}{dx}+f=0,\ x\in\Omega;\ \Omega\in W_2^1(\Omega)\right\} \qquad /14/$$

Ця ситуація типова при розв"язуванні крайових задач теорії пружності. Необхідно відзначити, що стандартна процедура методу скінченних елементів не справляється з обмеженнями типу диференціальних рівнянь /рівнянь рівноваги/, що входять у визначення Σ_0 .

Розглянемо побудову алгоритму, який дає змогу позбутись обмежень типу рівнянь рівноваги з тим, щоб задача розв"язувалась стандартною методикою МСЕ.

5. Замінимо задачу про відшукання максимума $\mathcal{K}_0(\sigma)$ на просторі /I4/ іншою. Знайти $\sigma_\lambda^* \in \Sigma$ таку, що

$$\mathcal{F}(\sigma_\lambda^*) \leq \mathcal{F}(\sigma) \quad \forall \sigma \in \Sigma, \qquad /I5/$$

де

$$\mathcal{F}(\sigma) = -\mathcal{K}_0(\sigma) + \lambda \int_0^1 \left(\frac{d\sigma}{dx} + f\right)^2 dx, \qquad /I6/$$

$0 < \lambda = const < \infty$ достатньо велике і відіграє роль параметра штрафу. Позначивши

$$b_\lambda(\sigma,\tau) = \int_0^1 \left(\lambda \frac{d\sigma}{dx}\frac{d\tau}{dx} + \rho^{-1}\sigma\tau\right)dx, \quad k_\lambda(\sigma) = \lambda \int_0^1 f \frac{d\sigma}{dx} dx,$$

запишемо $\mathcal{F}(\sigma)$ у вигляді

$$\mathcal{F}(\sigma) = b_\lambda(\sigma,\sigma) + 2k_\lambda(\sigma) + \lambda(f,f). \qquad /I7/$$

Відзначимо такі фактори:

1/ $b_\lambda(\cdot,\cdot)$ – симетрична неперервна білінійна форма на $\Sigma \times \Sigma$ причому нерівність

$$m_0 \|\sigma\|_1^2 \leq b_\lambda(\sigma,\sigma) \leq M_0 \|\sigma\|_1^2 \quad \forall \sigma \in \Sigma \qquad /I8/$$

з $m_0 = min(\lambda, \rho^{-1})$, $M_0 = max(\lambda, \rho_0^{-1})$ вказує, що $b_\lambda(\cdot,\cdot)$ породжує новий скалярний добуток на Σ. Позначимо цей новий гільбертів простір через Σ_λ і визначимо в ньому норму $\|\sigma\|_\lambda = \sqrt{b_\lambda(\sigma,\sigma)}$. Нерівність /I8/ вказує на топологічну еквівалентність просторів Σ_λ і $W_2^1(\Omega)$;

2/ $k_\lambda(\sigma)$ – обмежений лінійний функціонал на Σ_λ;

3/ З огляду на I/, 2/ задача /I5/ має єдиний розв"язок $\sigma_\lambda^* \in \Sigma_\lambda$ причому

$$\mathcal{F}(\sigma_\lambda^*) = -\mathcal{K}_0(\sigma_\lambda^*) \leq -\mathcal{K}_0(\sigma) \quad \forall \sigma \in \Sigma_0, \qquad /I9/$$

тобто задачі /I3/ і /I5/ еквівалентні. Таким чином, $\sigma_\lambda^* = \sigma^*$, де σ^* – розв"язок задачі про максимум $\mathcal{K}_0(\sigma)$ на Σ_0;

4/ задача /I5/ ефективно розв"язується стандартними алгоритмами МСЕ;

5/ нерівність /I9/ дає змогу знову будувати апостеріорні оцінки похибок згідно 3/;

6/ Нехай S^h – скінченновимірний підпростір Σ_λ, базу якого формують кусково-визначені поліноми $\varphi_1(x),\dots,\varphi_N(x)$ порядку K, причому $S^h \xrightarrow[h\to 0]{} \Sigma_\lambda$. Визначено також оператор ортогонального проектування $\Pi : \Sigma_\lambda \to S^h$ з властивістю; існує константа $C>0$ така, що для всіх $0 \leq n \leq K$

$$\|\sigma - \Pi\sigma\|_n \leq Ch^{K-n} \|\sigma\|_{K+1} \qquad \forall \sigma \in \Sigma_\lambda . \qquad /20/$$

Якщо $\varphi_i(x)$ побудовані за МСЕ, то h – діаметр сітки і функція $\sigma - \Pi\sigma$ описує фактично похибку інтерполювання. Наступна теорема доводить збіжність процедури 5/ до точного розв"язку.

<u>Теорема</u>. Нехай σ_λ^h – апроксимація розв"язку σ^* в просторі $S^h \subset \Sigma_\lambda$. Тоді похибка апроксимації $\epsilon = \sigma^* - \sigma_\lambda^h$ має такі властивості:

$$(I) \quad b_\lambda(\epsilon, \tau) = 0 \qquad \forall \tau \in S^h, \qquad /2I/$$

$$(II) \quad \|\epsilon\|_\lambda \leq \|\sigma^* - \tau\|_\lambda \qquad \forall \tau \in S^h,$$

$$(III) \quad \|\epsilon\|_1 \leq C_1 h^K \|\sigma^*\|_{K+1}, \qquad /22/$$

де $C_1 = const > 0$ не залежить від h і σ^*.

<u>Доведення.</u> Властивості /I/, /II/ очевидні. На основі /I8/, /2I/ і нерівності Буняковського – Шварца дістаємо

$$m_0 \|\epsilon\|_1^2 \leq b_\lambda(\epsilon,\epsilon) = b_\lambda(\sigma^* - \tau + \tau - \sigma_\lambda^h, \epsilon)$$
$$= b_\lambda(\sigma^* - \tau, \epsilon) \leq M_0 \|\sigma^* - \tau\|_1 \|\epsilon\|_1 \quad \forall \tau \in S^h.$$

Звідси

$$\|\epsilon\|_1 \leq \frac{M_0}{m_0} \|\sigma^* - \tau\|_1 \qquad \forall \tau \in S^h. \qquad /23/$$

Прийнявши в /23/ $\tau = \Pi\sigma^*$ і використавши /20/, дістаємо /22/.

<u>Приклад 2.</u> Розглянемо задачу $-d^2u/dx^2 = x,\ 0\le x\le 1,\ u(0)=0=u(1)$. У цьому випадку функціонал $\mathcal{F}(\sigma)=\int_0^1 \sigma^2 dx + \lambda\int_0^1\left(\frac{d\sigma}{dx}+x\right)^2 dx$ мінімізується на просторі $\Sigma_\lambda = \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$. Розіб"ємо область Ω на N скінченних елементів діаметра $h=1/N$ і візьмемо

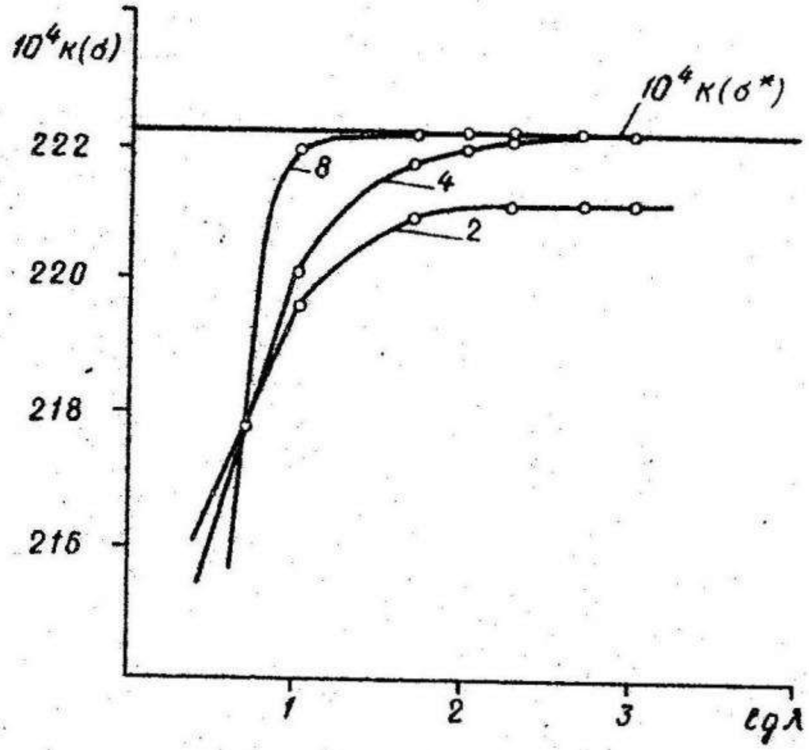


Рис. I.

лінійну апроксимацію / $k=1$ / функції $\sigma(x)$ на кожному з них. Рис. I демонструє монотонну збіжність знизу до точного значення $-\mathcal{K}_0(\sigma^*)$ з ростом параметра λ /номери кривих одночасно означають кількість скінченних елементів, на яких здійснювався розрахунок/. На рис. 2 показано залежність відхилення

$$\eta(\lambda)=\left\{\sum_{i=0}^{N}\left[\sigma^*(ih)-\sigma_\lambda^h(ih)\right]^2\right\}^{1/2}$$

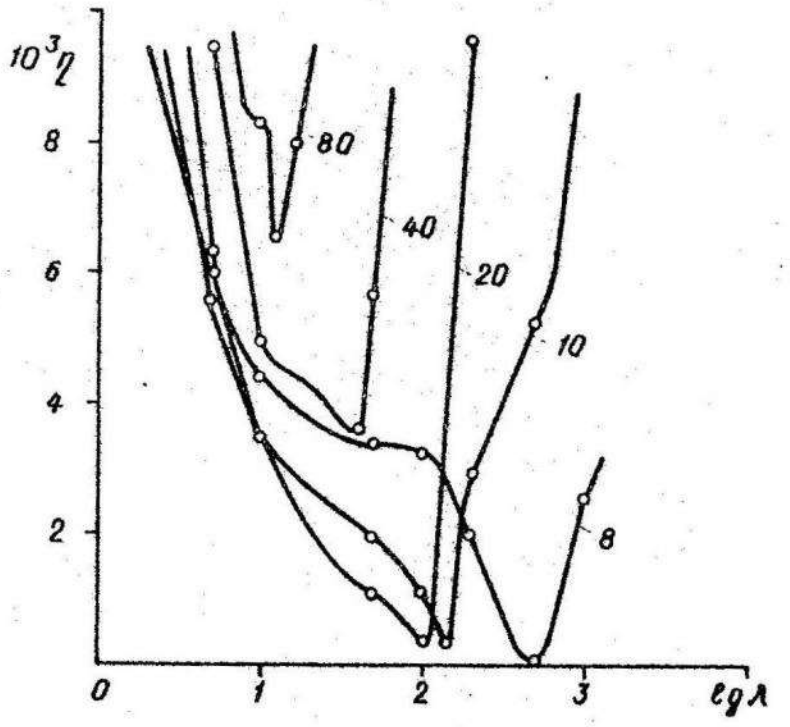


Рис. 2.

від λ. Відзначимо, що наявність різко визначених мінімумів $\eta(\lambda)$ ставить задачу про відшукання оптимальних значень λ. З нашого експерименту випливає, що $\lambda_{опт} = ch$, де $c = 10^3 \div 10^4$.

Список літератури: I. М и х л и н С.Г. Вариационные методы в математической физике. – М.: Наука, 1970. – 512 с. 2. С т р е н г Г., Ф и к с Дж. Теория метода конечных элементов. – М.: Мир, 1977. – 349 с.

Стаття надійшла до редколегії 23.03.81

УДК 536.24

Й.З.Піскозуб

ТЕМПЕРАТУРНЕ ПОЛЕ В ПЛАСТИНІ З ТЕПЛОАКТИВНИМИ ВКЛЮЧЕННЯМИ ПРИ НАЯВНОСТІ ТЕПЛООБМІНУ НА БІЧНИХ ПОВЕРХНЯХ

Відомі різні підходи до розв"язування двовимірних задач теплопровідності для тіл з тонкими лінійними дефектами типу включень [2-9]. Досить ефективний підхід, пов"язаний з введенням функцій стрибка температури і теплового потоку на осі включень з наступним визначенням цих функцій з умов взаємодії включення з середовищем.

Використаємо результати праці [6] для визначення квазістаціонарної взаємодії температурних полів у пластині з тепловиділенням. Ці поля породжуються джерелами тепла потужності q_k в точках (x_k, y_k) $(k=\overline{1,M})$ і наявністю системи N симетричних теплоактивних включень малої ширини $2h(x)$, розташованих на осі абсцис $L = L' \cup L''$, де $L' = \bigcup\limits_{n=1}^{N} [a_n, b_n]$.

Нехай теплообмін на бічних поверхнях пластини симетричний відносно серединної площини і підпорядковується закону $q_n = \varphi(x, y, t, t_e, \alpha, \beta, \ldots)$. Тоді [6] температура в пластині задовольняє рівняння

$$\Delta t(x,y) - \frac{\varphi(x,y,t,t_e,\alpha,\beta,\ldots)}{\lambda\delta} + \frac{1}{\lambda}\sum_{k=1}^{M} q_k \delta(x-x_k)\delta(y-y_k) = 0, \qquad /1/$$

де λ – коефіцієнт теплопровідності; δ – товщина пластини; t_e – температура зовнішнього середовища; $\alpha, \beta, \ldots$ – параметри зовнішнього середовища. У частковому випадку, коли $\varphi(x, y, t, t_e, \alpha, \beta, \ldots) = \alpha[t(x,y) - t_e]$ / теплообмін за законом Ньютона/, /1/ збігається з рівнянням теплопровідності для пластин з тепловіддачею при симетричному відносно серединної площини температурному полі [8]

$$\Delta t(x,y) - \frac{\alpha}{\lambda\delta}[t(x,y) - t_e] = -\frac{1}{\lambda}\sum_{k=1}^{M} q_k \delta(x-x_k)\delta(y-y_k). \qquad /2/$$

Природно зобразити температуру пластини у вигляді $t(x,y) = t_1(x,y) + t_2(x,y)$, де $t_1(x,y)$ – основне поле, що відповідає задачі для пластини без включень

$$t_1(x,y)=\frac{1}{2\pi\lambda}\sum_{k=1}^{M} q_k K_0\left(\sqrt{\frac{\alpha}{\lambda\delta}}\sqrt{(x-x_k)^2+(y-y_k)^2}\right)+t_e, \qquad /3/$$

а $t_2(x,y)$ – збурення температурного поля, викликане наявністю включень, яке є загальним розв"язком однорідного рівняння Гельмгольца

$$\Delta t_2(x,y)-\frac{\alpha}{\lambda\delta}t_2(x,y)=0. \qquad /4/$$

Вважаємо ширину включень настільки малою, що їх можна моделювати стрибками температури та теплового потоку на серединній лінії. Введемо у розгляд функції стрибків збуреного температурного поля та теплового потоку

$$f_1(x)=t_2^+(x)-t_2^-(x),\quad f_2(x)=\lambda\frac{\partial t_2^+}{\partial y}(x)-\lambda\frac{\partial t_2^-}{\partial y}(x), \qquad /5/$$

причому $f_1(x)=f_2(x)\equiv 0$ при $x\in L''$.

Застосовуючи до /4/, /5/ інтегральне перетворення Фур"є і враховуючи, що збурене поле з огляду на локальність заникає на нескінченності, одержуємо

$$t_2(x,y)=\sqrt{\frac{\alpha}{\lambda\delta}}\frac{y}{2\pi}\int_{L'} f_1(\xi)\frac{K_1\left(\sqrt{\frac{\alpha}{\lambda\delta}}\sqrt{y^2+(\xi-x)^2}\right)}{\sqrt{y^2+(\xi-x)^2}}d\xi-$$

$$-\frac{1}{2\pi\lambda}\int_{L'} f_2(\xi)K_0\left(\sqrt{\frac{\alpha}{\lambda\delta}}\sqrt{y^2+(\xi-x)^2}\right)d\xi. \qquad /6/$$

Підставляючи /3/, /6/ у рівняння математичної моделі включення [6], одержуємо такі сингулярні інтегральні рівняння /СІР/:

$$\int_{-1}^{\tilde{x}}\tilde{f}_1'(\xi)d\xi-\frac{\sqrt{\eta B_i}\,\omega\psi(x)}{\gamma\pi}\int_{-1}^{1}\tilde{f}_1'(\xi)\int_{\xi}^{1}\frac{K_1(\eta Bi\,|\rho-\tilde{x}|)}{|\rho-\tilde{x}|}d\rho d\xi=\Phi_1(x), \qquad /7/$$

$$\int_{-1}^{\tilde{x}}\hat{f}_2(\xi)d\xi-\frac{\sqrt{\eta Bi}\,\gamma\omega\psi(x)}{\pi}\int_{-1}^{1}\tilde{f}_2(\xi)\,sgn(\xi-\tilde{x})K_1(\sqrt{\eta Bi}\,|\xi-\tilde{x}|)d\xi+$$

$$+\frac{\eta Bi_0\omega}{\pi}\int_{-1}^{\tilde{x}}\psi(\xi)\int_{-1}^{1}\tilde{f}_2(\rho)K_0(\sqrt{\eta Bi}\,|\rho-\xi|)d\rho d\xi=\Phi_2(x)+Q_n^-, \qquad /8/$$

$$x\in[a_n,b_n]$$

з додатковими умовами

$$\int_{-1}^{1} \tilde{f}_1'(\xi)\, d\xi = 0, \qquad /9/$$

$$\int_{-1}^{1} \tilde{f}_2(\xi)\left[1+\frac{\eta Bi_0 \omega}{\pi}\int_{-1}^{1}\psi(\rho) K_0\left(\sqrt{\eta Bi}\,|\rho-\xi|\right)d\rho\right]d\xi = Q_1 - Q_n^{+} + Q_n^{-}, \qquad /10/$$

де $\tilde{x} = \frac{x}{a}$, $\eta = \frac{a}{\delta}$, $\omega = \frac{h_0}{a}$, $Bi = \frac{\alpha a}{\lambda}$, $Bi_0 = \frac{\alpha_0 a}{\lambda_0}$, $\gamma = \frac{\lambda_0}{\lambda}$,

$\tilde{f}_1(x) = \frac{a\lambda}{q_1} f_1(x)$, $\tilde{f}_2(x) = \frac{a}{q_1} f_2(x)$ – безрозмірні величини.

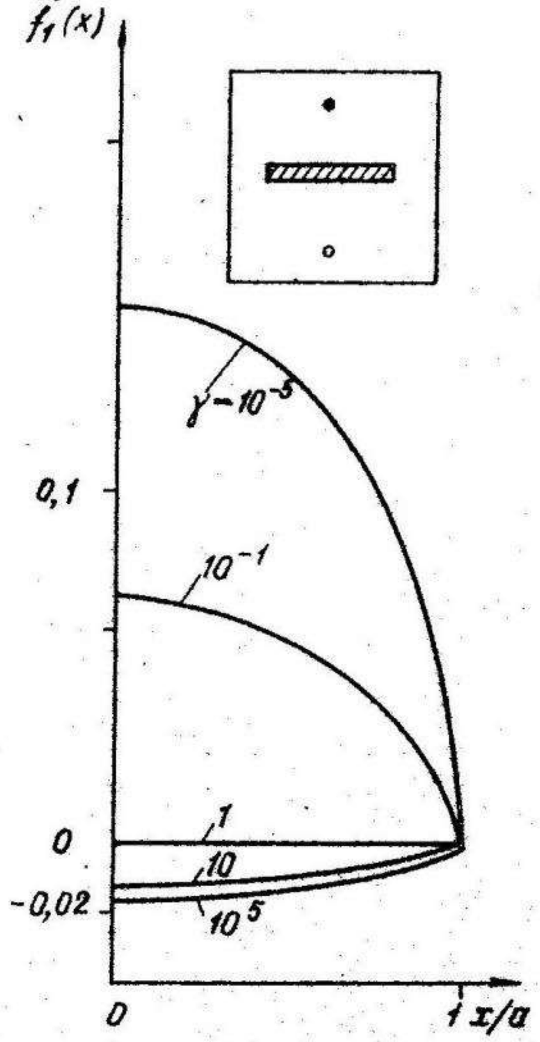


Рис. I.

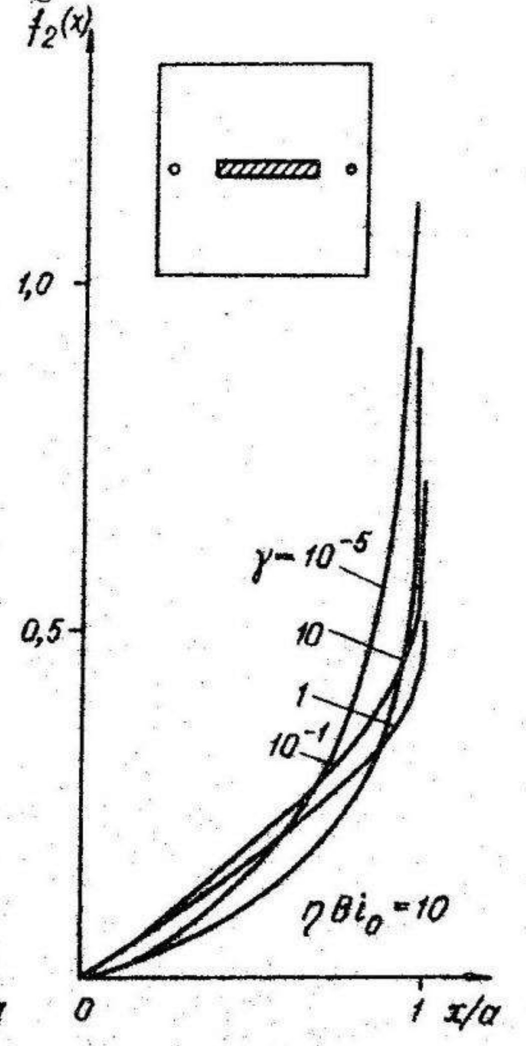


Рис. 2.

Для визначення торцьових констант $Q_n^{\pm}$ застосовано методику праці [I]

$$Q_n^{+}=\frac{1}{q_1}\int_{-h}^{h}\lambda\frac{\partial t}{\partial x}(b_n,y)\,dy,\quad Q_n^{-}=\frac{1}{q_2}\int_{-h}^{h}\lambda\frac{\partial t}{\partial x}(a_n,y)\,dy. \qquad /II/$$

СІР /7/, /8/ з додатковими умовами /9/, /I0/ розв"язуємо числово-аналітично із застосуванням методу колокацій [I0]. На ЕОМ ЕС-I022 проведені розрахунки стрибків $f_1(x)$, $f_2(x)$ збуреного поля на одному включенні $L^{1}=[-a_1,a_1]$ при таких значеннях параметрів: $\omega=0{,}1$, $Bi=0$, $\eta Bi_0=10^{-5}\div10^{5}$, $\gamma=10^{-5}\div10^{5}$ для двох схем навантаження: а/ джерело q у точці $(0,2a)$, стік q у точці $(0,-2a)$ /рис. I/; б/ джерело q у точці $(2a,0)$, стік $-q$ у точці $(-2a,0)$ /рис. 2/. Зауважимо, що при розрахунку для першої схеми навантаження маємо $f_2(x)=0$, а для другої $f_1(x)=0$.

Список літератури: I. А л е к с а н д р о в В.М., М х и т а р я н С.М. Контактные задачи для тел с тонкими покрытиями и прослойками. - М.: Наука, I983. - 488 с. 2. Г р и л и ц к и й Д.В., Д р а г а н М.С., О п а н а с о в и ч В.К. Температурное поле и термоупругое состояние пластинки с тонкостенным упругим включением. - Прикл. мат. и механика, I980, т.44, № 2, с.338-345. 3. К и т Г.С., К р и в ц у н М.Г. Плоские задачи термоупругости для тел с трещинами. - К.: Наукова думка, I983, - 278 с. 4. П і с к о з у б Й.З., С у л и м Г.Т. Вплив лінійного включення на температурне поле від джерела тепла. - Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат., I979, вип.I6, с.5. 5. П і с к о з у б Й.З., С у л и м Г.Т. Вплив лінійного включення на температурне поле від диполя тепла. - Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат., I98I, вип. I7, с.82-87. 6. П и с к о з у б И.З., С у л и м Г.Т. Температурные условия взаимодействия среды с тонким включением. - Инж.-физ. журн., I983, т.44, с. № 6, с.977-983. 7. П о д с т р и г а ч Я.С. Температурное поле в системе твердых тел, сопряженных с помощью тонкого промежуточного слоя. - Инж. физ. журн., I963, т.6, № I0, с.I29-I36. 8. П о д с т р и г а ч Я.С., К о л я н о Ю.М. Неустановившиеся температурные поля и напряжения в тонких пластинках. - К.: Наукова думка, I972. - 308 с. 9. С у л и м Г.Т. Влияние формы тонкого включения на распределение температуры в кусочно-однородной плоскости. – Инж.-физ. журн., 1979, т.37, № 6, с.1124-1139. 10. Theocaris P.S. Numerical Solution of Singular Integral Equations: Methods.- Journal of the Eng. Mech. Div., Proc. of the Amer. Soc. of Civil Eng., 1977, vol. 107, No Em 5, p. 733-752.

Стаття надійшла до редколегії 29.02.84

УДК 517.9

В.А.Галазюк, Г.О.Гірняк

ДОСЛІДЖЕННЯ НЕСТАЦІОНАРНОГО ТЕМПЕРАТУРНОГО ПОЛЯ В БЕЗМЕЖНОМУ ШАРІ З КОЛОВОЮ ЛІНІЄЮ РОЗДІЛУ КРАЙОВИХ УМОВ МЕТОДОМ ПОЛІНОМІВ ЧЕБИШЕВА-ЛАГЕРРА

Лінійні задачі теплопровідності для напівобмежених областей зі змішаними граничними умовами ефективно розв"язують методом парних інтегральних рівнянь [2]. Однак під час розв"язування нестаціонарних задач за допомогою інтегрального перетворення Лапласа за часовою змінною ядра отриманих парних інтегральних рівнянь залежать від комплексного параметра перетворення, внаслідок чого розв"язування цих рівнянь числовими методами практично неможливе.

Пропонуємо інший метод розв"язування нестаціонарних задач теплопровідності зі змішаними крайовими умовами для напівобмежених областей, що базується на методі поліномів Чебишева-Лагерра [1]. Розглянемо нестаціонарну задачу теплопровідності для безмежного шару з коловою лінією розділу крайових умов. Нехай на верхній площині цього шару товщини $2h$, віднесеного до циліндричної системи координат (r, φ, z), у крузі радіуса $r = R$ задана температура $T_0(r,t)\,S_+(t)$, а поза ним відбувається теплообмін за законом Ньютона з зовнішнім середовищем, температура якого $T_1(r,t)\,S_+(t)$. На нижній площині шару відбувається теплообмін за законом Ньютона з середовищем з нульовою температурою. Температурне поле в шарі визначаємо, розв"язуючи осесиметричну задачу:

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial T}{\partial\rho}\right)+\frac{\partial^2 T}{\partial\gamma^2}=\frac{\partial T}{\partial\tau}; \qquad /1/$$

$$T(\rho,\gamma,\tau)=0,\quad \tau=0; \qquad /2/$$

$$\left\{\frac{\partial T}{\partial\gamma}-Bi^-(T-T_1(\rho,\tau)S_+(\tau))-(T-T_0(\rho,\tau)S_+(\tau))\right\}\times$$

$$\times S_+(R/h-\rho)-\frac{\partial T}{\partial\gamma}+Bi^-(T-T_1(\rho,\tau)S_+(\tau))=0,\ \gamma=-1; \qquad /3/$$

$$\frac{\partial T}{\partial\gamma}+Bi^+T=0,\quad \gamma=1 \qquad /4/$$

$$\lim_{\rho\to\infty}T(\rho,\gamma,\tau)=0, \qquad /5/$$

де $\tau=F_0=at/h^2$ – безрозмірний час; t – час; $\rho=r/h,\ \gamma=z/h$ – відповідно радіальна й осьова безрозмірні координати; Bi^+, Bi^- – коефіцієнти Біо середовищ; $S_+(x)=\{1, x>0;\ 0,\ x\leq 0\}$.

Зобразимо шукану функцію температури $T(\rho,\gamma,\tau)$ ортогональним рядом за поліномами Чебишева-Лагерра [I]:

$$T(\rho,\gamma,\tau)=\lambda\sum_{n=0}^{\infty}T_n(\rho,\gamma)L_n(\lambda\tau), \qquad /6/$$

де $\lambda>0$, $L_n(\lambda\tau)$ – поліноми Чебишева-Лагерра. При цьому, зважаючи на ортогональність $L_n(\lambda\tau)$, маємо

$$T_n(\rho,\gamma)=\int_0^{\infty}T(\rho,\gamma,\tau)e^{-\lambda\tau}L_n(\lambda\tau)d\tau\ \ (n=0,1,2,\ldots). \qquad /7/$$

Очевидно, що рівність /7/ можна розглядати як інтегральне перетворення функції $T(\rho,\gamma,\tau)$, а ряд /6/–як формулу обернення цього перетворення.

Помножимо рівняння /I/ і крайові умови /3/–/5/ на ядро перетворення $e^{-\lambda\tau}L_n(\lambda\tau)$ і виконаємо інтегрування в межах $[0,\infty]$. Враховуючи рівність /7/, початкову умову /2/ і властивості поліномів Чебишева-Лагерра, із задачі /1/-/5/ дістаємо

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial T_n}{\partial\rho}\right)+\frac{\partial^2 T_n}{\partial\gamma^2}-\gamma T_n=\lambda\sum_{m=0}^{n-1}T_m \quad (n=0,1,2,\dots);$$

$$\left\{\frac{\partial T_n}{\partial\gamma}-\bar{Bi}\left(T_n-T_{1n}\right)-\left(T_n-T_{0n}\right)\right\}\times S_+\left(R/h-\rho\right)-$$

$$-\frac{\partial T_n}{\partial\gamma}+\bar{Bi}\left(T_n-T_{1n}\right)=0, \quad \gamma=-1;$$

$$\frac{\partial T_n}{\partial\gamma}+\overset{+}{Bi}\,T_n=0, \qquad \gamma=1;$$

$$\lim_{\rho\to\infty}T_n(\rho,\gamma)=0,$$

де T_{0n}, T_{1n} – перетворення функцій $T_0(\rho,\tau)$ і $T_1(\rho,\tau)$ за Чебишевим-Лагерром.

До отриманої задачі застосуємо інтегральне перетворення Ханкеля за змінною ρ. Якщо

$$T_n^H(\gamma)=\int_0^\infty T_n(\rho,\gamma)\rho J_0(\xi\rho)d\rho,$$

де $J_0(\xi,\rho)$ – функція Беселя нульового порядку; ξ – параметр перетворення, то одержимо

$$\frac{d^2T_n^H}{d\gamma^2}-(\lambda+\xi^2)T_n^H=\lambda\sum_{m=0}^{n-1}T_m^H \quad (n=0,1,2,\dots); \tag{8}$$

$$\bar{Bi}T_n^H-\frac{dT_n^H}{d\gamma}+\int_0^{R/h}\left\{\frac{\partial T_n}{\partial\gamma}-(\bar{Bi}+1)T_n\right\}\rho J_0(\xi\rho)d\rho=$$

$$=\bar{Bi}T_{1n}^H-\int_0^{R/h}\left(\bar{Bi}\,T_{1n}+T_{0n}\right)\rho J_0(\xi\rho)d\rho, \quad \gamma=-1; \tag{9}$$

$$\frac{dT_n^H}{d\gamma}+\overset{+}{Bi}\,T_n^H=0, \quad \gamma=1. \tag{10}$$

Загальний розв"язок трикутної системи звичайних диференціальних рівнянь /8/ запишемо у вигляді

$$T_n^H(\gamma)=\sum_{p=0}^{n}A_{n-p}(\xi)G_p(\xi,\gamma) \qquad (n=0,1,2,\dots), \tag{11}$$

де $A_{n-p}(\xi)$ – невідомі функції, які визначають із умови /9/; $G_p(\xi,\gamma)$ $(p=\overline{0,n})$ – повна система розв"язків спеціально побудованої задачі для рівняння

$$\frac{d^2 G_p}{d\gamma^2} - (\lambda + \xi^2) G_p = \lambda \sum_{m=0}^{p-1} G_m . \qquad /12/$$

Враховуючи формулу обернення інтегрального перетворення Ханкеля, із /11/ маємо

$$T_n(\rho,\gamma) = \sum_{p=0}^{n} \int_0^\infty A_{n-p}(\xi) G_p(\xi,\gamma)\, \xi J_0(\xi\rho)\, d\xi . \qquad /13/$$

Нехай функції $G_p(\xi,\gamma)$ задовольняють умови

$$(1+Bi)G_p(\xi,-1) - \frac{dG_p(\xi,-1)}{d\gamma} = 1;$$
$$\frac{dG_p(\xi,1)}{d\gamma} + Bi^{+} G_p(\xi,1) = 0. \qquad /14/$$

Тоді /10/ виконується автоматично, а із умови /9/, враховуючи вирази /11/ і /13/, маємо

$$\sum_{p=0}^{n} \left\{ A_{n-p}(\xi)(1-G_p(\xi,-1)) - \int_0^\infty A_{n-p}(u) \mathcal{K}(u,\xi)\, du \right\} = F_n(\xi) \; (n=0,1,\ldots),$$

де

$$\mathcal{K}(u,\xi) = u \int_0^{R/h} \rho J_0(u\rho) J_0(\xi\rho)\, d\rho;$$

$$F_n(\xi) = Bi\, T_{1n}^{H} - \int_0^{R/h} (Bi\, T_{1n} + T_{0n}) \rho J_0(\xi\rho)\, d\rho.$$

Послідовним відніманням цю систему зведемо до послідовності інтегральних рівнянь Фредгольма другого роду на безмежному інтервалі:

$$g(\xi) A_0(\xi) - \int_0^\infty A_0(u) \mathcal{K}(u,\xi)\, du = F_0(\xi),$$
$$g(\xi) A_n(\xi) - \int_0^\infty A_n(u) \mathcal{K}(u,\xi)\, du = F_n(\xi) - F_{n-1}(\xi) -$$
$$- \sum_{p=0}^{n-1} A_{n-p-1}(\xi)(G_{p+1}(\xi,-1) - G_p(\xi,-1)) \; (n=1,2,3,\ldots), \qquad /15/$$

де

$$g(\xi) = 1 - G_0(\xi,-1).$$

Для розв"язування інтегральних рівнянь /15/ розглянемо рівняння виду

$$g(\xi)A_n(\xi)-\int_0^\infty A_n(u)u\left\{\int_0^{R/h}\rho J_0(\xi\rho)J_0(u\rho)d\rho\right\}du=\varphi_n(\xi) \qquad /16/$$

Якщо

$$R_n(\rho)=\int_0^\infty A_n(u)u\,J_0(u\rho)du,$$

то

$$A_n(\xi)=\int_0^\infty R_n(\rho)\rho\,J_0(\xi\rho)d\rho, \qquad /17/$$

і з рівняння /16/ для функції $R_n(\rho)$ маємо

$$g(\xi)\int_0^\infty R_n(\rho)\rho\,J_0(\xi\rho)d\rho-\int_0^{R/h}R_n(\rho)\rho\,J_0(\xi\rho)d\rho=\varphi_n(\xi). \qquad /18/$$

Представимо функцію $\rho R_n(\rho)$ у вигляді ряду за поліномами Чебишева-Лагерра:

$$\rho R_n(\rho)=e^{-\mu\rho}\sum_{s=0}^\infty a_s^n L_s(\mu\rho),\ \mu>0. \qquad /19/$$

При цьому для коефіцієнтів a_s^n з рівняння /18/ отримаємо систему лінійних алгебраїчних рівнянь

$$\sum_{s=0}^\infty a_s^n b_{i,s}=g_i^n \qquad (i,n=0,1,2,\dots),$$

де

$$b_{i,s}=\int_0^\infty g(\xi)e^{-\beta\xi}L_i(\beta\xi)\left(\xi/\sqrt{\xi^2+\mu^2}\right)^{s+1}P_s\left(\xi/\sqrt{\xi^2+\mu^2}\right)d\xi-$$
$$-\int_0^{R/h}e^{-\mu\rho}L_s(\mu\rho)\left(\rho/\sqrt{\rho^2+\beta^2}\right)^{i+1}P_i\left(\rho/\sqrt{\rho^2+\beta^2}\right)d\rho;$$
$$g_i^n=\int_0^\infty e^{-\beta\xi}L_i(\beta\xi)F_n(\xi)d\xi-\sum_{p=0}^{n-1}a_s^{n-p-1}\int_0^\infty e^{-\beta\xi}L_i(\beta\xi)\times$$
$$\times P_s\left(\xi/\sqrt{\xi^2+\mu^2}\right)\left(\xi/\sqrt{\xi^2+\mu^2}\right)^{s+1}\left(G_{p+1}(\xi_1-1)-G_p(\xi_1-1)\right)d\xi;$$

$P_s\left(\xi/\sqrt{\xi^2+\mu^2}\right)$ – поліноми Лежандра; β,μ – масштабні множники.

Таким чином, на основі /17/ і /19/ одержимо зображення невідомої функції $A_n(\xi)\ (n=0,1,2,\dots)$ у вигляді ряду

$$A_n(\xi)=\sum_{s=0}^\infty a_s^n\left(\xi/\sqrt{\xi^2+\mu^2}\right)^{s+1}P_s\left(\xi/\sqrt{\xi^2+\mu^2}\right). \qquad /20/$$

Остаточно функцію температури з врахуванням /6/, /13/ і /20/ зобразимо у такому вигляді:

$$T(\rho,\gamma,\tau)=\lambda\sum_{n=0}^{\infty}L_n(\lambda\tau)\sum_{p=0}^{n}\sum_{s=0}^{\infty}a_s^n\int_0^{\infty}\left(\xi/\sqrt{\xi^2+\mu^2}\right)^{s+1}P_s\left(\xi/\sqrt{\xi^2+\mu^2}\right)\xi G_p(\xi,\gamma)J_0(\xi\rho)d\xi$$

Функції $G_p(\xi,\gamma)$ знаходимо, розв"язуючи крайову задачу /I2/, /I4/. Записуємо

$$G_p(\xi,\gamma)=\sum_{m=0}^{\infty}\varphi_m(-1)\varphi_m(\gamma)(\xi^2+\varkappa_m^2)^p/(\xi^2+\varkappa_m^2+\lambda)^{p+1},$$

де $\varphi_m(\gamma)(m=0,1,\dots)$ – ортонормована система власних функцій задачі Штурма/Ліувілля; $\varkappa_m$ – власні значення цієї задачі

$$\varphi_m(\gamma)=D_m(\sin\delta_m\cdot\cos\varkappa_m\gamma+\cos\delta_m\cdot\sin\varkappa_m\gamma),$$

де

$$\sin\delta_m=(\varkappa_m\cos\varkappa_m+Bi^+\sin\varkappa_m)/\sqrt{\varkappa_m^2+Bi^{+2}};$$

$$\cos\delta_m=(\varkappa_m\sin\varkappa_m-Bi^+\cos\varkappa_m)/\sqrt{\varkappa_m^2+Bi^{+2}};$$

$$D_m=4(\varkappa_m/(\varkappa_m-2\sin(2\varkappa_m)+4\sin(2\varkappa_m)\sin\delta_m))^{1/2}.$$

Власні значення $\varkappa_m$ $(m=0,1,2\dots)$ знаходимо з рівняння

$$tg(2\varkappa_m)/\varkappa_m=(1+Bi^++Bi^-)/(\varkappa_m^2-Bi^+(1+Bi^-)).$$

Запропоновану методику легко узагальнити на задачу про нагрів шару по кільцю і періодичній системі кілець.

Список літератури: I. Г а л а з ю к В.А. Метод поліномів Чебишева-Лагерра в змішаній задачі для нелінійного диференціального рівняння II порядку з постійними коефіцієнтами. – Доп. АН УРСР. Сер. А, I98I, № I, с.3–6. 2. У ф л я н д Я.С. Метод парных уравнений в задачах математической физики. – Л.: Наука, I977. – I57 с.

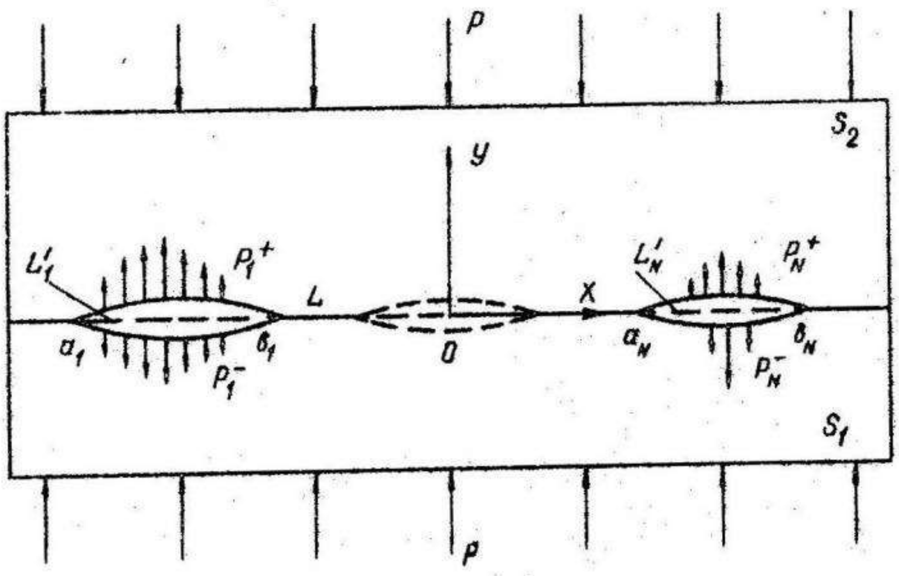
Стаття надійшла до редколегії 27.02.84

УДК 539.3

Г.Т.Сулим, Р.М.Мартиняк

ЗАДАЧА ПОРУШЕННЯ КОНТАКТУ ПРИ СТИСКУ ПРУЖНИХ ПІВПЛОЩИН

Розглянемо плоску задачу про пружну рівновагу двох півплощин S_1 і S_2, що контактують без тертя, при наявності зон розшарування на лінії розділу /див. рисунок/. На безмежності півплощини



стиснуті рівномірно розподіленим зусиллям p. Припускаємо, що на лінії L розділу матеріалів під дією зусиль P_n^+ і P_n^-, прикладених на L_n'' $(n=\overline{1,N})$ до верхнього і нижнього півпросторів, порушується механічний контакт – утворюються щілини вздовж відрізків $L'_n=[a_n, b_n]$ так, що $L''_n \subset L'_n, \bigcup_{n=1} L'_n = L'$. Пружні сталі матеріалів верхньої та нижньої півплощин позначимо E_2, ν_2 та E_1, ν_1 . Знайдемо зони порушення контакту L'_n і форму утворених щілин.

Запишемо граничні умови задачі на лінії L

$$\tau_{xy1}(x,0)=\tau_{xy2}(x,0)=0, \quad (x\in L); \qquad /1/$$

$$\sigma_{y1}(x,0)=-p^-_n(x), \ \sigma_{y2}(x,0)=-p^+_n(x), \quad (x\in L'); \qquad /2/$$

$$v'_1(x,0)=v'_2(x,0), \ \sigma_{y1}=\sigma_{y2}<0, \quad (x\in L/L'), \qquad /3/$$

причому $p^{\pm}_n(x)=0$ при $x\in L'/L''$. Крім того, $\sigma_{y1}(x,-\infty)=\sigma_{y2}(x,+\infty)=-p$. В /1/ –/3/ позначення напружень і переміщень загальноприйняті [2], індекси 1, 2 вказують відповідно на приналежність до нижньої та верхньої півплощини.

Напруження і переміщення виражаються через комплексні потенціали

$$\sigma_{yk}-i\tau_{xyk}=\Phi_k(z)-\Phi_k(\bar z)+(z-\bar z)\overline{\Phi'_k(z)}+A_k,$$

$$2\mu_k(u'_k+iv'_k)=\varkappa_k\Phi_k(z)+\Phi_k(\bar z)-(z-\bar z)\overline{\Phi'_k(z)}+B_k, \ (z\in S_k; \ k=1,2), \qquad /4/$$

де $A_1=A_2=-p, B_k=-p(\varkappa_k-3)/4$; голоморфні, заникаючі на безмежності функції $\Phi_k(z)$, характеризують збурення, що вносять у напружено-деформований стан щілини та їх навантаженням.

Умова /1/ відсутності тертя на лінії розділу [2]

$$\Phi_1(z)=-\bar\Phi_1(z), \quad \Phi_2(z)=-\bar\Phi_2(z). \qquad /5/$$

Розглянемо допоміжну задачу. Введемо функції стрибків нормальних зміщень і нормальних напружень на L

$$v'_1(x,0)-v'_2(x,0)=f_4(x), \ \sigma_{y1}(x,0)-\sigma_{y2}(x,0)=f_1(x) \qquad /6/$$

такі, що $f_\tau(x)=f_{\tau,n}(x) \ (x\in L'_n), \ f_\tau(x)=0 \ (x\in L/L'; \ \tau=1,4)$.

У точках змикання повинні виконуватись умови

$$v_1(a_n,0)-v_2(a_n,0)=v_1(b_n,0)-v_2(b_n,0)=0\ (n=\overline{1,N}). \qquad /7/$$

Підставивши /4/ у /6/ і врахувавши /5/, прийдемо до задач лінійного спряження відносно певних комбінацій функцій $\Phi_1(z), \Phi_2(z)$. Їх розв"язки на L записуємо як

$$\Phi_1^{\pm}(x)=-\frac{1}{2(C_1+C_2)}\Big[\pm C_1 f_1+f_4+\frac{1}{\pi i}\int_{L'}\frac{(C_1 f_1\pm f_4)dt}{t-x}\Big],$$

$$\Phi_2^{\pm}(x)=-\frac{1}{2(C_1+C_2)}\Big[\pm C_2 f_1-f_4+\frac{1}{\pi i}\int_{L'}\frac{(C_2 f_1\mp f_4)dt}{t-x}\Big], C_k=(1+\varkappa_k)/4\mu_k \ (k=1,2). \qquad /8/$$

Задовольнимо з допомогою /4/, /8/ граничну умову /2/. Тоді одержимо сингулярне інтегральне рівняння для визначення невідомих стрибків зміщень

$$\frac{1}{\pi}\int_{L'}\frac{f_4(t)dt}{t-x}=F(x), \quad (x\in L_n,\ n=\overline{1,N}), \qquad /9/$$

де $F(x)=C_1 P_n^+(x)+C_2 P_n^-(x)-(C_1+C_2)P.$

Внаслідок /7/ функції $f_{4,n}(x)$ повинні задовольняти умови

$$\int_{L_n} f_{4,n}(t)dt=0, \qquad (n=\overline{1,N}). \qquad /10/$$

Ті ж рівняння можна отримати, виходячи з розв"язку задачі пружної рівноваги кусково-однорідної площини з тонкостінними включеннями [6], які моделюються функціями стрибків $f_1^*(x)=f_1(x)-if_2(x)$ напружень $f_3^*(x)=f_3(x)+if_4(x)$ і похідних від зміщень на їх серединних лініях. Тоді граничні умови

$$f_1(x)=P_n^+(x)-P_n^-(x)\ (x\in L');\ f_2(x)=0,\ \tau_{xy'}(x)=0\ (x\in L);\ \sigma_{y'}(x)=-P_n^-(x)\ (x\in L'). \quad /11/$$

Підставивши в /11/ вирази /1.5/ із праці [6], дістанемо систему інтегральних рівнянь для функцій $f_3(x)$ та $f_4(x)$. Виключаючи з них $f_3(x)$, прийдемо до /9/.

Розв"язок /9/, який з фізичних міркувань повинен бути обмеженим у точках a_n, b_n, записуємо у вигляді [3]

$$f_4(x)=\frac{X_0(x)}{\pi i}\int_{L'}\frac{F(t)dt}{X_0(t)(t-x)},\ X_0(z)=\prod_{k=1}^{N}(z-a_k)^{\frac{1}{2}}(z-b_k)^{\frac{1}{2}}. \qquad /12/$$

Обмежений розв"язок /I2/ існує тоді і тільки тоді, коли права частина /9/ задовольняє умови [3]

$$\int_{L'} \frac{t^n F(t)dt}{X_0(t)} = 0, \quad (n = 0,1,\ldots,N-1). \qquad /I3/$$

Таким чином, /I2/ дає розв"язок поставленої задачі у квадратурах. Для визначення $2N$ наперед невідомих сталих a_n, b_n $(n=\overline{1,N})$ маємо $2N$ додаткових умов /I0/ і /I3/.

Подібні задачі, але в дещо іншій постановці, розглядали С.Г.Міхлін та І.А.Прусов [I, 4]. Проте вони, використовуючи дещо інші методи, розв"язки шукали в класі функцій, необмежених у заданих наперед точках a_n, b_n, тобто для щілин із затиснутими краями. Моделювання щілин стрибками зміщень дає змогу достатньо просто записати розв"язок задачі і надає йому більш зрозумілої фізичної інтерпретації.

Як приклад розглянемо випадок однієї щілини $(N=1)$, що утворюється під дією двох зосереджених сил Q_1 і Q_2, прикладених до границь нижньої і верхньої півплощин відповідно в точці з абсцисою $x=0$. Внаслідок симетрії приймемо $a_1=-a$, $b_1=a$. Рівняння /9/ набере вигляду

$$\frac{1}{\pi i}\int_{-a}^{a} \frac{f_4(t)dt}{t-x} = (c_1 Q_1 + c_2 Q_2)\,\delta(x) - (c_1+c_2)P,$$

де $\delta(x)$ – дельта-функція, а його розв"язок згідно з /I2/ запишемо як

$$f_4(x) = i\sqrt{a^2-x^2}\,(c_1 Q_1 + c_2 Q_2)/\pi a x.$$

Умова /I0/ задовольняється тотожно, а з /I3/ знаходимо піндовжину утвореної щілини $a=(c_1 Q_1 + c_2 Q_2)/\pi(c_1+c_2)P$. У випадку однакових півплощин та $Q_1 = Q_2$ це дає відомий результат [5].

Коли зовнішні навантаження повторюються вздовж осі Ox з періодом d, тобто у випадку періодичної задачі, ядро Коші $\frac{1}{z-x}$ у /8/ для комплексних потенціалів слід замінити ядром Гільберта $\frac{\pi}{d}ctg\frac{\pi(t-x)}{d}$. Тоді основне рівняння для стрибків зміщень набере вигляду

$$\frac{1}{\pi i}\int_{L} f_4(t)\,ctg\frac{\pi(t-x)}{d}\,dt = \frac{d}{\pi}F(x),\ (x\in L_n;\ n=\overline{1,N}),$$

розв"язок якого відомий [7]. Наведемо розв"язок аналогічної задачі про періодичне порушення контакту стиснутих півплощин системою сил Q_1 та Q_2, прикладених до країв півплощин у точках $x=\pm kd\ \ (k=0,1,2,\ldots)$:

$$f_4(x)=\frac{i}{d}(c_1Q_1+c_2Q_2)\frac{\sqrt{\sin\frac{\pi(a-x)}{d}\sin\frac{\pi(a+x)}{d}}}{\sin\frac{\pi a}{d}\cdot\sin\frac{\pi x}{d}},\quad a=\frac{d}{\pi}\arcsin\frac{c_1Q_1+c_2Q_2}{pd(c_1+c_2)}.$$

Аналогічно будують розв"язки задач про неповний контакт півплощин, коли тіла взаємодіють із тертям. Використаний підхід можна застосувати до розв"язку контактних задач для тіл з виступами, задач розклинювання.

Список літератури: I. М и х л и н С.Г. Интегральные уравнения. - М.; Л.: Гостехиздат, 1949. - 380 с. 2. М у с х е л и ш в и л и Н.И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. - М.: Наука, 1966. - 708 с. 3. М у с х е л и ш в и л и Н.И. Сингулярные интегральные уравнения. - М.: Наука, 1968. - 5II с. 4. П р у с о в И.А. Некоторые задачи термоупругости. - Минск: Изд-во Белорусск. ун-та, 1972. - 200 с. 5. С е д о в Л.И. Механика сплошной среды. - М.: Наука, 1976. Т.2. - 584 с. 6. С у л и м Г.Т. Концентрация напряжений возле тонкостенных линейных включений. - Прикладная механика, 1981, т.17, № II, с.82-89. 7. Ч и б р и к о в а Л.И. О решении некоторых полных сингулярных интегральных уравнений. - Уч. зап. Казанского ун-та, 1962, т.122, № 3, с.95-124.

Стаття надійшла до редколегії 14.09.82

УДК 539.3

В.К.Опанасович, М.С.Драган

ПЕРІОДИЧНА СИСТЕМА ПАРАЛЕЛЬНИХ ТОНКИХ ПРУЖНИХ ВКЛЮЧЕНЬ У ПЛАСТИНІ

Розглянемо періодичну систему тонких прямолінійних ізотропних пружних включень довільної орієнтації в ізотропній пластині, коли центри включень знаходяться на дійсній осі Ox /рис. 1/. Нехай 2ℓ – довжина кожного включення; $2h$ – його ширина; α – кут, який утворює довільне включення з віссю Ox; d – відстань між центрами сусідніх включень. Припускаємо, що на серединну площину пластини діє зовнішнє силове навантаження, а на берегах включень має місце ідеальний механічний контакт.

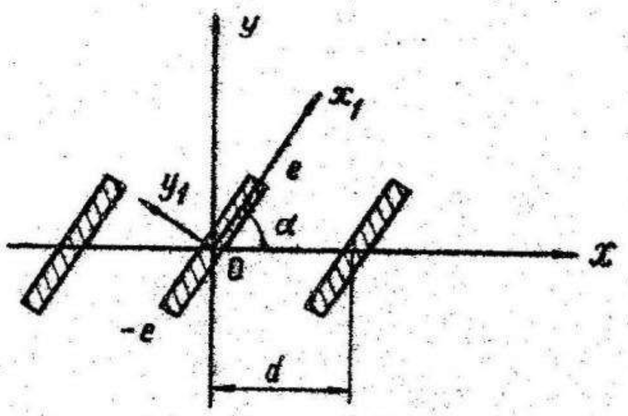


Рис. 1.

Центр кожного включення приймемо за початок локальної системи координат з дійсною віссю, направленою вздовж включення. Величини, які характеризують тонкі включення, позначимо нульовим індексом, а сегмент дійсної осі $[-\ell,\ell]$ – через L.

Умови механічного контакту включень з матрицею матимуть вигляд

$$(\sigma_y - i\tau_{xy})_0^{\pm} = (\sigma_y - i\tau_{xy})^{\pm}; \quad (u+iv)_0^{\pm} - i\varepsilon_0 = (u+iv)^{\pm} \quad \text{на } L, \qquad /1/$$

де знаку плюс відповідає граничне значення величини при прямуванні до локальної дійсної осі зліва, а знаку мінус – справа; σ_y, τ_{xy} – компоненти тензора напружень у локальній системі координат; u і v – компоненти вектора переміщення; ε_0 – поворот включення як жорсткого цілого.

Враховуючи відомі результати у випадку одного включення [3] і беручи до уваги метод суперпозиції, комплексні потенціали Колосова-Мусхелішвілі $\Phi(z)$ і $\Psi(z)$ для нашої задачі представимо таким чином:

$$\Phi(z) = \pi h \gamma d^{-1} e^{i\alpha} \int_{-\ell}^{\ell} (K'(t) + \beta M'(t)) \operatorname{ctg}[\pi d^{-1}(te^{i\alpha} - z)]dt + \Phi_0(z),$$

$$\Psi(z) = \pi h \gamma d^{-1} \Big\{ e^{i\alpha} \int_{-\ell}^{\ell} (\beta \overline{M'(t)} - \varkappa \overline{K'(t)}) \operatorname{ctg}[\pi d^{-1}(te^{i\alpha} - z)]dt -$$

$$- \int_{-\ell}^{\ell} [\pi d^{-1}(ze^{i\alpha} + t(1 - e^{2i\alpha})) \operatorname{cosec}^2[\pi d^{-1}(te^{i\alpha} - z)] + e^{i\alpha} \operatorname{ctg}[\pi d^{-1}(te^{i\alpha} - z)]] \times$$

$$\times (K'(t) + \beta M'(t))dt \Big\} + \Psi_0(z), \qquad /2/$$

де $\beta = \mu/\mu_0$, $\varkappa = (3-\nu)/(1+\nu)$, $\gamma = 1/(\pi(1+\varkappa))$; μ, ν – коефіцієнти Ляме і Пуассона; $\Phi_0(z)$ і $\Psi_0(z)$ – комплексні потенціали, що характеризують напружено-деформований стан пластини без включень при тому ж навантаженні; $K(t)$, $M(t)$ – невідомі функції, які визначаються зі системи інтегродиференціальних рівнянь

$$\gamma_0 [(1-\varkappa_0)K(x) + 2M(x) + 2\overline{K(x)} + 2\overline{M(x)}] - c_1 \int_{-\ell}^{\ell} [(K'(t) + \beta M'(t)) \times$$

$$\times R(t-x) + (-\varkappa K'(t) + \beta M'(t))\overline{R(t-x)} + (\overline{K'(t)} + \beta \overline{M'(t)}) \times$$

$$\times L(t-x)]dt = a_1 \Phi_{01}(x) + a_2 \overline{\Phi_{01}(x)} + a_3 \Omega_{01}(x),$$

$$q_0 [2\varkappa_0 K(x) + (\varkappa_0 - 1) M(x) - 2\overline{K(x)} - 2\overline{M(x)}] +$$

$$+ c_1 \int_{-\ell}^{\ell} [-\varkappa (K'(t) + \beta M'(t)) R(t-x) + (-\varkappa K'(t) + \beta M'(t)) \overline{R(t-x)} +$$

$$+ \overline{(K'(t) + \beta M'(t))} L(t-x)]dt = b_1 \Phi_{01}(x) + b_2 \overline{\Phi_{01}(x)} +$$

$$+ b_3 \Omega_{01}(x) + 2i\mu\varepsilon_0, \quad x \in L, \qquad /3/$$

причому

$$R(t-x) = \pi e^{i\alpha} d^{-1} \operatorname{ctg}[\pi e^{i\alpha} d^{-1}(t-x)]; \; L(t-x) = \pi d^{-1}(e^{-i\alpha} - e^{-3i\alpha}) \times$$

$$\times [\operatorname{ctg}[\pi e^{-i\alpha} d^{-1}(t-x)] - \pi e^{-i\alpha} d^{-1}(t-x) \operatorname{cosec}^2[\pi e^{-i\alpha} d^{-1}(t-x)]],$$

$$\gamma_0 = 1/(1+\varkappa_0); \; q_0 = \beta\gamma_0; \; c_1 = h\gamma; \; a_1 = 1 - \omega\gamma_0 (1 - \varkappa_0 + 2\varkappa),$$

$$a_2 = 2\omega\gamma_0 (\varkappa_0 - \varkappa); \; a_3 = 1 - \omega; \; b_1 = \varkappa - \beta\omega(\varkappa + 2 - 2\gamma_0(\varkappa + 1)),$$

$$b_2 = 2\beta\omega((\varkappa+1)\gamma_0 - 1); \; b_3 = \beta\omega - 1; \; \omega = \min(1, 1/\beta).$$

Розв"язок системи /3/ повинен задовольняти умови рівноваги тонкого включення й умови однозначності зміщень при обході його контура, які набирають вигляду

$$\int_{-\ell}^{\ell} K'(t)dt = 0, \; \int_{-\ell}^{\ell} tK'(t)dt = 0, \; \int_{-\ell}^{\ell} M'(t)dt = 0$$

Зробивши у системі /3/ заміну $t = \ell t_1$, $x = \ell x_1$ і зобразивши невідомі функції $K(x)$ і $M(x)$ як

$$K'(\ell x) = u(x)/\sqrt{1-x^2}; \; M'(\ell x) = v(x)/\sqrt{1-x^2},$$

на основі методу механічних квадратур [5] можна записати таку систему лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$\sum_{m=1}^{M} \{[[(1-\varkappa_0)u(t_m) + 2v(t_m) + 2\overline{u(t_m)} + 2\overline{v(t_m)}]\gamma_0 \eta(x_r - t_m) - c_H\{[u(t_m) +$$

$$+\beta v(t_m)]R(\ell(t_m-x_r))+[-\varkappa u(t_m)+\beta v(t_m)]\overline{R(\ell(t_m-x_r))}+[\overline{u(t_m)}+$$

$$+\beta\overline{v(t_m)}]L(\ell(t_m-x_r))\}\}=\frac{M}{\pi}[a_1\Phi_{01}(\ell x_r)+a_2\overline{\Phi_{01}(\ell x_r)}+a_3\Omega_{01}(\ell x_r)],$$

$$\sum_{m=1}^{M}\{[2\varkappa_0 u(t_m)+(\varkappa_0-1)v(t_m)-2\overline{u(t_m)}-2\overline{v(t_m)}]q_0\eta(x_r-t_m)-$$

$$-C_{11}\{\varkappa(u(t_m)+\beta v(t_m))R(\ell(t_m-x_r))+(\varkappa u(t_m)-\beta v(t_m))\overline{R(\ell(t_m-x_r))}$$

$$-(\overline{u(t_m)}+\beta\overline{v(t_m)})L(\ell(t_m-x_r))\}\}=\frac{M}{\pi}[b_1\Phi_{01}(\ell x_r)+b_2\overline{\Phi_{01}(\ell x_r)}+$$

$$+b_3\Omega_{01}(\ell x_r)+2i\varepsilon_0\mu],$$

$$t_m=\cos(\pi(2m-1)/(2M)),\ x_r=\cos(\pi r/M),\ (m=\overline{1,M}),$$

$$(r=\overline{1,M-1}), \qquad /4/$$

де $C_{11}=C_1/\ell$; $\eta(x)$ – функція Хевісайда.

Коефіцієнти інтенсивності напружень /КІН/, які характеризують сингулярну частину напружень в околі вершини включення, визначаємо за формулами

$$K_1^{\pm}-iK_2^{\pm}=\mp(2\pi\gamma h\beta/\sqrt{\ell})\,v(\pm 1),$$

$$K_3^{\pm}-iK_4^{\pm}=\mp(2\pi\gamma h/\sqrt{\ell})\,u(\pm 1), \qquad /5/$$

де

$$\left\|\begin{matrix}u(\pm1)\\ v(\pm1)\end{matrix}\right\|=\frac{1}{M}\sum_{m=1}^{M}\left\|\begin{matrix}u(t_m)\\ v(t_m)\end{matrix}\right\|(-1)^{r}\operatorname{ctg}^{\pm1}\left(\frac{2m-1}{4M}\pi\right);$$

$$r=m+1+(M+1)(1\mp1)/2,$$

знак плюс належить до правої, а знак мінус до лівої вершини включення.

Відзначимо, що коли в /3/ або /4/ зробити відповідний граничний перехід, то одержимо розв"язок періодичної задачі для тріщин [5] і коротких включень [1]. При $\alpha = 0$ і $\alpha = \pi/2$ з використанням інших моделей включення задача досліджена у працях [2, 4].

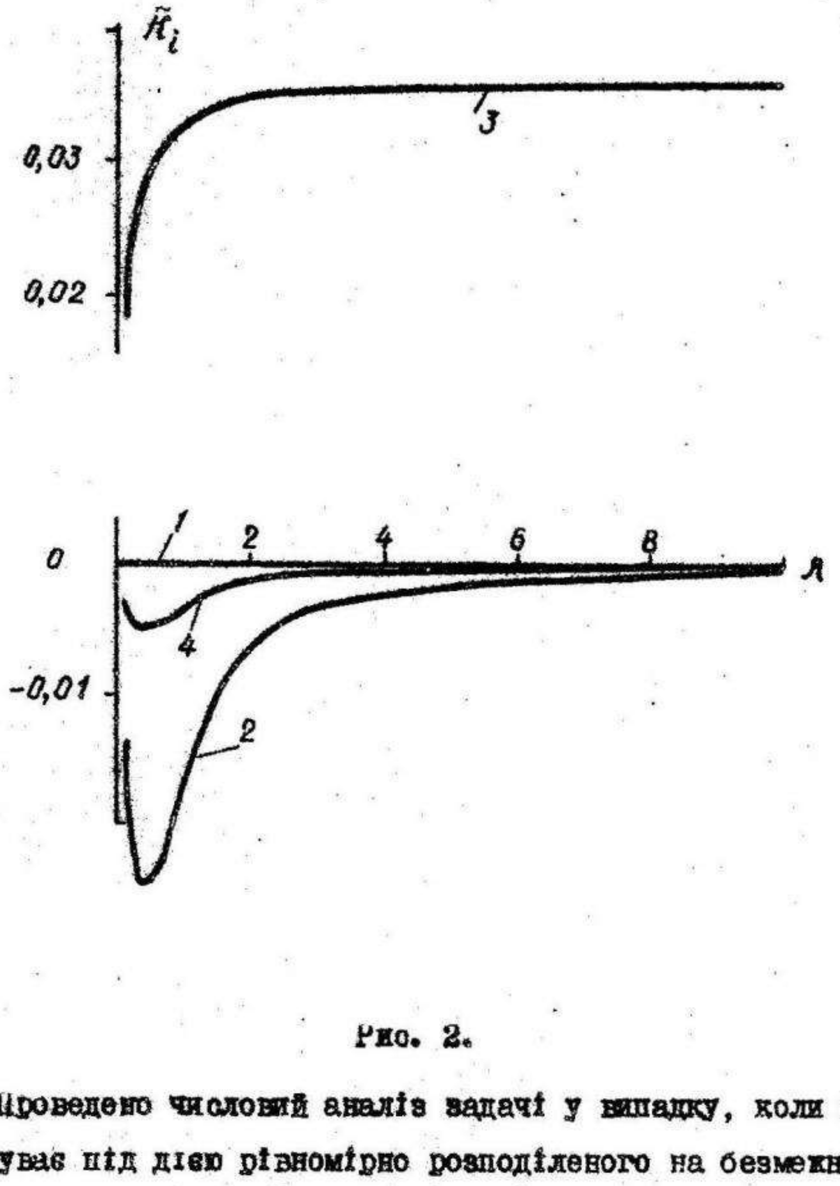


Рис. 2.

Проведено числовий аналіз задачі у випадку, коли пластина перебуває під дією рівномірно розподіленого на безмежності напруження інтенсивності p, напрям якого паралельний до осі OY. На рис. 2, 3 відповідною кривою показана графічна залежність КІН

$\tilde{K}_i = K_i/(p\sqrt{\ell}),\ (i=\overline{1,4})$ від відносної відстані $\lambda = d/\ell$ між центрами включень. При цьому рис. 2 побудований при відносній жорсткості матриці і включення $\beta = 0{,}1$, а рис. 3 – при $\beta = 10$.

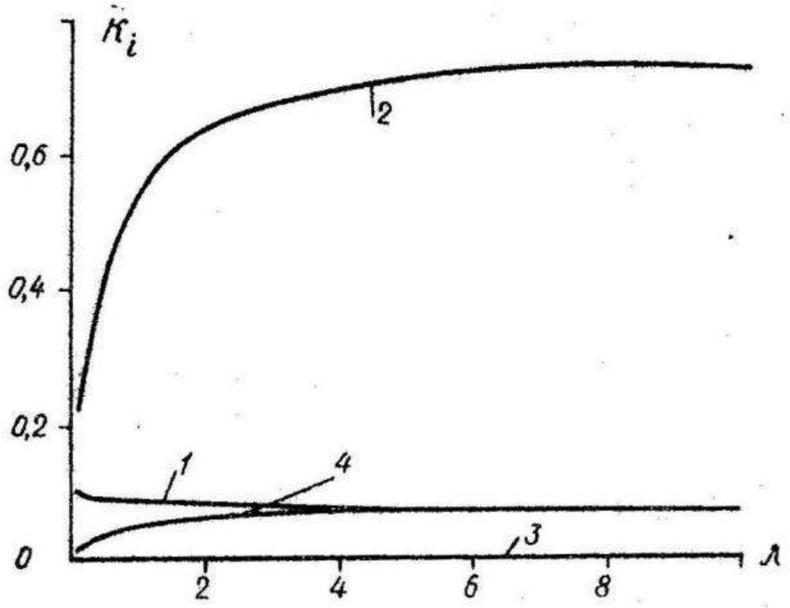


Рис. 3.

Обчислення проводили при таких значеннях параметрів $h/\ell = 0{,}01$, $\alpha = \pi/4$, $\varkappa = \varkappa_0 = 2$. Числовий аналіз показав, що для досягнення точності 2% потрібно у системі /4/ взяти 20 вузлів.

Як видно з рис. 2 КІН менший, ніж у випадку одного включення, тобто при відсутності взаємодії між включеннями. Трохи іншу картину спостерігаємо на рис. 3: антисиметричні КІН / $\tilde{K}_2, \tilde{K}_4$ /. мають ці ж закономірності, а симетричний КІН / $\tilde{K}_1$ / – протилежну.

Список літератури: І. Бережницкий Л.Т., Стащук Н.Г. Плоская периодическая задача теории жестких включений. – Физ.-хим. механика материалов, 1982, № 1, с.61-69. 2. Грилицкий Д.В., Сулим Г.Т. Периодическая задача для кусочно-однородной плоскости с тонкостенными упругими включениями. – Прикладная механика, 1975, т.11, № 1, с.74-81. 3. Д р а г а н М.С., О п а н а с о в и ч В.К. Напряженное состояние полосы /балки/ с прямолинейным тонкостенным включением. – Прикл. мат. и мех., 1979, т.43, № 2, с.342-348. 4. М а р т ы н я к Р.М., С у л и м Г.Т. Периодическая задача для системы линейных компланарных включений в изотропной плоскости. – Мат. методы и физ.-мех. поля, 1982, вып. 15, с.113-117. 5. П а н а с ю к В.В., С а в р у к М.П., Д а ц ы ш и н А.П. Распределение напряжений около трещин в пластинах и оболочках. – К.: Наукова думка, 1976. – 444 с.

Стаття надійшла до редколегії 08.02.83

УДК 541.124

Ю.А.Паздерський, В.Є.Юринець, В.П.Баран, О.О.Євтушенко

ДО МЕТОДУ ІНТЕГРУВАННЯ СИСТЕМ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ХІМІЧНОЇ КІНЕТИКИ

Розглянемо систему рівнянь хімічної кінетики, яка описує механізм термічного розкладання ацетилену. Така система рівнянь подібна до систем з праць [1, 2] і має вигляд

$$\frac{dy_\ell}{dt} = \sum_{m=1}^{M_\ell} K_{\ell_m}\, y_{\ell_i}\, y_{\ell_j} \qquad \ell, i, j = \overline{1, N}. \qquad /1/$$

Причому

$$y(0) = (1, 0, \ldots, 0)$$

$$K = (0{,}024,\ 0{,}59,\ 0{,}358\cdot 10^6,\ 0{,}59,\ 0{,}966\times 10^8,\ 0{,}59,$$
$$0{,}966\times 10^8,\ 0{,}59,\ 0{,}966\times 10^8,\ 0{,}59,\ 0{,}966\times 10^8,\ 0{,}59,$$
$$0{,}966\times 10^8,\ 0{,}59,\ 0{,}966\times 10^8,\ 0{,}59,\ 0{,}966\times 10^8,\ 0{,}59,$$
$$0{,}666\times 10^7,\ 0{,}666\times 10^7,\ 0{,}666\times 10^7,\ 0{,}666\times 10^7,\ 0{,}666\times 10^7,\ 0{,}666\times 10^7,$$
$$0{,}666\times 10^7,\ 0{,}666\times 10^7,\ 0{,}666\times 10^7,\ 0{,}459\times 10^5,\ 0{,}715\times 10^6,\ 0{,}715\times 10^6,$$
$$0{,}536\times 10^6,\ 0{,}402\times 10^6,\ 0{,}302\times 10^6,\ 0{,}226\times 10^6,\ 0{,}17\times 10^6,\ 0{,}127\times 10^6,$$

$0,961 \times 10^7, 0,715 \times 10^6, 0,536 \times 10^6, 0,402 \times 10^6, 0,302 \times 10^6, 0,23 \times 10^6,$
$0,17 \times 10^6, 0,127 \times 10^6, 0)$.

При таких коефіцієнтах K_{ℓ_m} система рівнянь /I/ жорстка.

Вперше поняття жорсткого рівняння ввели Кертіш і Гіршфельдер [2], розглядаючи скінченно-різницеву схему для $dT/dt = aT$ і відносячи його до випадку $1/a\Delta t \ll 1$. Це ж саме наявне і в системі /I/. Жорсткість – це властивість математичної задачі, а не числового методу [7].

Основною проблемою при розв"язуванні таких систем є проблема числової стійкості. Для її забезпечення потрібно використовувати крок h, для якого число $h_i = h\lambda_i$ було всередині області стійкості. Тут λ_i – власні числа матриці Якобі, складені з часткових похідних по y правої частини системи /I/. При використанні звичайних методів необхідне число кроків інтегрування може виявитись більшим, ніж коефіцієнти жорсткості S системи $S = \dfrac{\max Re(-\lambda_i)}{\min Re(-\lambda_i)} \gg 1$. Тому запропоновано декілька зручних для жорстких систем алгоритмів їх інтегрування.

Різними методами розв"язування системи диференціальних рівнянь у часткових похідних можна звести до розв"язування системи звичайних диференціальних рівнянь. Але властивості звичайних диференціальних рівнянь можуть радикально відрізнятися від властивостей рівнянь у часткових похідних. Наприклад, застосування методу прямих до рівнянь у часткових похідних для ламінарного примежового шару, приводить до жорстких звичайних диференціальних рівнянь. Тому методи їх розв"язання можна застосувати в теорії пружності, гідродинаміці, газодинаміці, магнітогідродинаміці, фізиці плазми, при розрахунку атмосферних явищ й інших галузях.

Але алгоритми розв"язків жорстких задач на відміну від нежорстких досліджені ще недостатньо.

Для розв"язування системи /I/ використовували декілька методів.

I. Застосовували програму $DIFSUB$ [8] з використанням методу Адамса. Підпрограма $MATINV$ цієї програми розрахована на розв"язування системи, кількість невідомих якої не перевищує 22.

Однак матриця Якобі системи /I/ дуже рідко заповнена. Тому необхідно внести деякі зміни в алгоритми. Зокрема, замість прямого обернення матриці Якобі використовували метод її факторизації з допомогою підпрограми $DECOMP$ і $SOLVE$ [6]. Набір операторів

```
      DO  400  I = 1, N
  400 SAVE(9,I) = Y(1,I)
```

замінено послідовним розв"язуванням системи $PAX = Y$, де A – матриця Якобі PW; X – розв"язок системи /I/, $Y(1,I), I = 1,\dots,N$; Y – деякий відомий масив. Результати розрахунків показали, що при вхідних даних $H = 10^{-4}$, $HMIN = 10^{-2}$, $HMAX = 10^{-10}$, $EPS = 10^{-5}$ найвищий порядок апроксимації методу не перевищував 3. Описаний прийом дав змогу вдосконалити $DIFSUB$ та розв"язати нелінійні системи виду /I/ з більш ніж 22 невідомими.

2. Розкладаючи величину $y_{i+1} = y(x_i + h)$ в ряд по степенях h з точністю до h^4, одержуємо

$$y_{i+1} \approx y_i + y_i' h + y_i'' \frac{h^2}{2!} + y_i'''/3!\, h^3. \qquad /2/$$

Формулу /2/ застосовували для обчислення розв"язку системи /I/ на ЕОМ. Максимально досягнутий крок, який не приводить до втрати стійкості, дорівнює $0{,}22 \times 10^{-7}$. Вирази для похідних одержували диференціюванням системи /I/.

Використовуючи ідею Річардсона [7], можна записати формули

$$y_{i+1} = y_{i-2} + 3\,(y_i - y_{i-1}) + \frac{h^3}{2}\,(y_i''' + y_{i-1}''') + R_1,$$

$$R_1 = \frac{420\, h^7 y^7(\xi_1)}{100\,800}; \qquad /3/$$

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2}\,(y'_{i+1} + y'_i) - \frac{h^2}{10}\,(y''_{i+1} - y''_i) +$$

$$+ \frac{h^3}{120}\,(y'''_{i+1} + y'''_i) + R_2, \quad R_2 = -\frac{h^7 y^{(7)}(\xi_2)}{100800}. \qquad /4/$$

Формули /3/ і /4/, очевидно, точніші, ніж /2/, а час розрахунку значно менший.

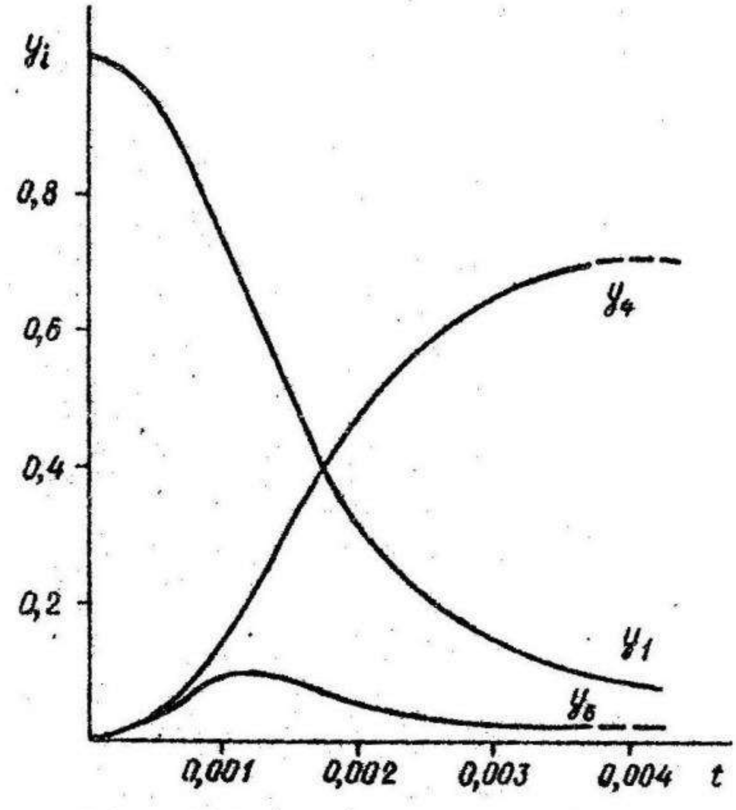


Рис. I.

Формулу /3/ використовували для знаходження першого наближення y_{i+1} , а /4/ дає уточнене значення

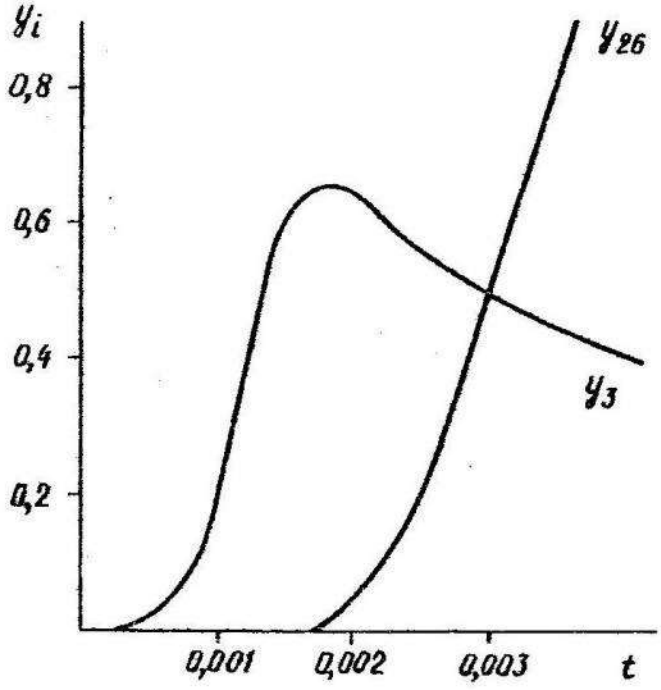


Рис. 2.

Для обчислення значень y_1 і y_2 застосовували формулу Тейлора. Потім ці значення уточнювали за формулою /3/.

На рис. I, 2 показані деякі компоненти y_i залежно від часу. Найбільше відхилення в результатах при обчисленні за програмою DIFSUB і формулами /3/, /4/ спостерігалося в при початкових часах і не перевищувало 7 %. Для всіх інших компонент y результати практично збіглися.

Список літератури: I. Г у т о р И.М. Кинетика образования и превращения этана при окислительном пиролизе метана. - Докл. АН УРСР. Сер. Б, 1979, № 5, с.433-436. 2. Г у т о р И.М., К у ч е р Р.В. Механизм окислительного пиролиза метана. - Укр. хим. журн. 1980, т.45, вып.6, с.549-552. 3. Д е м и д о в и ч Б.Г., М а р о н И.А., Ш у в а л о в Э.З. Численные методы анализа. -

М.: Наука, 1967. – 368 с. 4. Р о у ч П. Вычислительная гидродинамика. – М.: Мир, 1980. – 616 с. 5. С т е п а н о в В.В. Курс дифференциальных уравнений.– М.: Гостехиздат, 1952. – 468 с. 6. Ф о р с а й т Дж., М а л ь к о л ь м М., М о у л е р К. Машинные методы математических вычислений. – М.: Мир, 1980. – 277 с. 7. Х о л л Дж., У а т т Дж. Современные численные методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений. – М.: Мир, 1979. – 312 с. 8. Gear C.W. Algorithm 407, DIFSUB for solution of ordinary differential equations.- Communs. Ass. comput. Mech., 1971, 14, p.185-190. 9. Curtiss G.F., Hirschfelder J.O. Integration of stiff equations.- Proc. Nat. Aeronavt. Soc. 1952, v.38, p.235-248. 10. Richardson L.F. The approximate arithmetical solution by finite differences of physical problems involving differential equations, with an application to the stresses in a masonry dam.- Trans. Roy. Soc. London Ser. A., 1910, v.210, p.307-357.

Стаття надійшла до редколегії 05.10.83

УДК 519.21

І.Д.Квіт

ДОВІРЧІ ІНТЕРВАЛИ ДЛЯ ПОРЯДКОВИХ СТАТИСТИК

Нехай

$$x_1, \dots, x_n \qquad /1/$$

ряд незалежних спостережень над абсолютно неперервною або дискретною випадковою змінною ξ з функцією розподілу ймовірностей $F(x)$. Запишемо варіаційний ряд для незалежних спостережень /1/ у вигляді

$$x_{1n}, \dots, x_{jn}, \dots, x_{nn} \qquad /2/$$

Потрібно визначити довірчий інтервал для порядкової статистики
x_{jn}, $(j=1,\dots,n)$.

Відомо [I], що коли вибірка /I/ взята з абсолютно неперервної популяції, то функція розподілу ймовірностей порядкової статистики x_{jn} виражається формулою

$$\mathcal{P}\left\{x_{jn} \le x\right\} = \frac{n!}{(j-1)!(n-j)!}\int_0^{\mathcal{F}(x)} t^{j-1}(1-t)^{n-j}dt. \qquad /3/$$

За означенням квантилем порядку q j-ї порядкової статистики x_{jn} називається число $x_{jn;q}$, що задовольняє співвідношення

$$\mathcal{P}\left\{x_{jn} \le x_{jn;q}\right\} = q, \quad 0<q<1 \qquad /4/$$

Отже,

$$\frac{n!}{(j-1)!(n-j)!}\int_0^{\mathcal{F}(x_{jn;q})} t^{j}(1-t)^{n-j}dt = q, \quad 0<q<1.$$

Але відомо також [2], що

$$\mathcal{F}(x_{jn;q}) = \frac{j}{j+(n+1-j)F_q(2(n+1-j),2j)}, \quad 0<q\le 0{,}5;$$

$$\approx \frac{j-0{,}3}{n+0{,}4}, \quad q=0{,}5;$$

$$= \frac{j}{j+\dfrac{n+1-j}{F_{1-q}(2j,2(n+1-j))}}, \quad 0{,}5\le q<1, \qquad /5/$$

де $F_\alpha(\nu_1,\nu_2)$ – процентні точки розподілу Фішера з /ν_1, ν_2/ ступенями вільності. Позначаючи правий бік /5/ через γ, дістаємо співвідношення

$$\mathcal{F}(x_{jn;q}) = \gamma, \quad 0<q<1, \quad (j=1,\dots,n) \qquad /6/$$

для визначення квантиля $x_{jn;q}$ порядкової статистики x_{jn}. При q = 0,5 співвідношення /6/ визначає медіану j -ї порядкової статистики $x_{jn;0,5}$.

Із рівності /4/ дістаємо похідне співвідношення

$$\mathcal{P}\left\{x_{jn;q_1} < x_{jn} \le x_{jn;1-q_2}\right\} = 1-q_2-q_1,\ q_1>0,\ q_2>0,\ 0<q_1+q_2<1, \qquad /7/$$

яке вказує $(1-q_2-q_1)$ 100 %-ний довірчий інтервал для абсолютно неперервної порядкової статистики x_{jn}. При $q_1=0$ маємо однобічний нижній довірчий інтервал з верхньою межею $x_{jn;1-q_2}$; при $q_2=0$ дістаємо однобічний верхній довірчий інтервал з нижньою межею $x_{jn;q_1}$; при q_1 = 0,5 або q_2 = 0,5 межею буде медіана порядкової статистики x_{jn}. За умовою $q_1=q_2=q$, $0<q<0,5$ одержуємо $(1-2q)$ · 100 %-ний довірчий інтервал імовірнісно симетричний. В імовірнісно симетричному випадку співвідношення /7/ набуває вигляду

$$\mathcal{P}\left\{x_{jn;q} < x_{jn;1-q}\right\} = 1-2q,\quad 0<q<0,5. \qquad /8/$$

Імовірнісно симетричний інтерквантильний довірчий інтервал, визначений точками $x_{jn;q}$ та $x_{jn;1-q}$ при q = 0,25; 0,10; 0,01; ... відповідно називають інтерквартильним, інтердецильним, інтерцентильним тощо.

У випадку n = 9 і $\mathcal{F}(x)=1-e^{-x}$, $x>0$ дані про медіану $x_{j,9;0,5}$ порядкової статистики $x_{j,9}$, 95 %-ний довірчий інтервал $(x_{j,9;0,025};\ x_{j,9;0,975})$, інтерквартильний довірчий інтервал $(x_{j,9;0,25};\ x_{j,9;0,75})$, обчислені на основі формул /5/ і /6/, наведемо нижче:

j	$x_{j,9;0,025}$	$x_{j,9;0,25}$	$x_{j,9;0,5}$	$x_{j,9;0,75}$	$x_{j,9;0,975}$
1	0,003	0,032	0,077	0,154	0,410
2	0,029	0,114	0,198	0,318	0,659
3	0,078	0,218	0,337	0,496	0,916
4	0,147	0,345	0,500	0,696	1,206
5	0,237	0,498	0,693	0,936	1,556

6	0,356	0,690	0,933	I,233	I,988
7	0,5II	0,938	I,250	I,63I	2,593
8	0,729	I,299	I,7I5	2,232	3,57I
9	I,090	I,946	2,60I	3,459	5,975

Відомо [4], що коли дискретна випадкова змінна ξ набуває в зростаючому порядку значення $x_{(1)}, x_{(2)}, \ldots$ відповідно з імовірностями $\gamma_1, \gamma_2, \ldots$, причому $\sum_i \gamma_i = 1$, і отже, має функцію розподілу

$$\mathcal{F}(x) = \begin{cases} 0, & x \leq x_{(1)}, \\ \sum_{k=1}^{i} \gamma_k, & x_{(i)} \leq x < x_{(i+1)}, \quad (i = 1, 2, \ldots), \end{cases} \qquad /9/$$

тоді

$$\mathcal{P}\{x_{jn} \leq x_{(i)}\} = \frac{n!}{(j-1)!\,(n-j)!} \int_0^{\mathcal{F}(x_{(i)})} t^{j} (1-t)^{n-j} dt,$$

$$(j = 1, \ldots, n), \; (i = 1, 2, \ldots). \qquad /10/$$

Квантилем порядку q дискретної j-ї порядкової статистики x_{jn} називається число $x_{jn;q} = x_{(i)}$, що задовольняє нерівності

$$\mathcal{P}\{x_{jn} < x_{jn;q}\} \leq q, \; \mathcal{P}\{x_{jn} \leq x_{jn;q}\} \geq q, \; 0 < q < 1. \qquad /11/$$

Порівнюючи формули /10/ і /11/ з формулами /3/ і /4/, приходимо до висновку, що у дискретному випадку квантиль $x_{jn,q} = x_{(i)}$ шукають за допомогою нерівностей

$$\mathcal{F}(x_{(i-1)}) \leq \gamma, \quad \mathcal{F}(x_{(i)}) \geq \gamma, \qquad /12/$$

де функція $\mathcal{F}(x)$ задана виразом /9/, $\mathcal{F}(x_{(0)}) = 0$; γ позначає правий бік /5/. Довірчий інтервал для порядкової статистики x_{jn} складається тепер з окремих $x_{(i)}$ або й з однієї точки.

У випадку $n = 9$ та $\mathcal{F}(x) = \sum_{k=0}^{i} \frac{5^k}{k!} e^{-5}$, $i \leq x < i+1$, $(i = 0, 1, 2, \ldots)$, дані про медіану $x_{j,9;0,5}$ порядкової статистики $x_{j,9}$, 95 %-ний довірчий інтервал $(x_{j,9;0,025};\ x_{j,9;0,975})$, інтерквантильний довірчий інтервал $(x_{j,9;0,025};\ x_{j,9;0,75})$ обчислені на основі формул /5/ і /12/, наведемо нижче:

j	$x_{j,9;0,025}$	$x_{j,9;0,25}$	$x_{j,9;0,5}$	$x_{j,9;0,75}$	$x_{j,9;0,975}$
I	0	I	2	3	4
2	I	2	3	4	5
3	2	3	4	4	5
4	3	4	4	5	6
5	3	4	5	5	7
6	4	5	5	6	7
7	4	5	6	7	8
8	5	6	7	8	IO
9	6	7	8	9	II

Відзначимо, що процентні точки розподілу Фішера з формули /5/, можна взяти, наприклад, з довідника [3].

Список літератури: I. К в і т І.Д. Звужені до кінців інтерквантильні смуги довір"я. - Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат., I982, вип. I9, с.I8-2I. 2. К в і т І.Д. Методичні вказівки до курсу "Теорія надійності". Львів, I982. - 24 с. 3. Справочник по специальным функциям. - М.: Наука, I979. - 830 с. 4. Khatri C.J. Distributions of order statistics for discrete case. - Annals of the Institute of Statistical Mathematics, 1962, 14, p. 167-171.

Стаття надійшла до редколегії 3I.08.82

УДК 518:517.948

М.Я.Бартіш, Ю.В.Нікольський

ЧИСЕЛЬНИЙ МЕТОД МІНІМІЗАЦІЇ ФУНКЦІЙ З ПОБУДОВОЮ ДВОЇСТИХ БАЗИСІВ

Дослідимо один чисельний метод у роботі [1] для мінімізації достатньо гладкої сильно випуклої функції $f(x)$, визначеної на всьому просторі E_n. Він є модифікацією відомого методу двоїстих напрямків [2]. Обчислювальні формули мають вигляд

$$\tilde{x}_k = x_k - \tilde{\alpha}_k A_{k-1}^{-1} f'(x_k),$$

$$x_{k+1} = x_k - \alpha_k A_k^{-1} f'(x_k), \quad k=0,1,\ldots \qquad /1/$$

Вибір скалярних множників α_k та $\tilde{\alpha}_k$ здійснюється таким чином, щоб задовольнити виконання відповідних нерівностей

$$f(\tilde{x}_k) - f(x_k) \leq \varepsilon \tilde{\alpha}_k (f'(x_k), \tilde{p}_k), \quad \tilde{p}_k = -A_{k-1}^{-1} f'(x_k),$$

$$f(x_{k+1}) - f(x_k) \leq \varepsilon \alpha_k (f'(x_k), p_k), \quad p_k = -A_k^{-1} f'(x_k), \qquad /2/$$

де $\varepsilon \in (0, 1/2)$.

Мета досліджень – уточнення оцінок швидкості збіжності методу /1/–/2/ та побудова формул, які дають змогу обчислювати матрицю, обернену до A_k, використовуючи матриці A_{k-1}^{-1} та визначені на кожній ітерації вектори ε, ρ.

Матрицю A_k знаходимо за допомогою системи рівнянь

$$A_k \rho_{k-i} = \varepsilon_{k-i}, \quad i=0,1,\ldots,n-1, \qquad /3/$$

де

$\rho_{k-i} = x_{k-0,5i} - x_{k-0,5i-1}$, $i=0,2,\ldots,n-2$ при n парному або

$\varepsilon_{k-i} = f'(x_{k-0,5i}) - f'(x_{k-0,5i-1})$, $i=0,2,\ldots,n-1$ при n непарному;

$\rho_{k-i} = \tilde{x}_{k-0,5(i-1)} - x_{k-0,5(i-1)}$, $i=1,3,\ldots,n-1$ при n парному або

$\varepsilon_{k-i} = f'(\tilde{x}_{k-0,5(i-1)}) - f'(x_{k-0,5(i-1)})$, $i=1,3,\ldots,n-2$ при n непарному. /4/

Нескладно переконатись, що при виборі параметрів α_k та $\tilde{\alpha}_k$ з умови /2/, починаючи з деякого номеру N, для всіх $m > N$

правильне $\alpha_m = \tilde{\alpha}_m \equiv 1$. Надалі розглядатимемо послідовності точок $\{x_k\}$ та $\{\tilde{x}_k\}$, для яких виконано такий вибір скалярних множників.

Аналогічно в лемі 3.1 з праці [2] у випадку, коли послідовність векторів $\{p_k\}$ вибрана згідно з рівністю /3/, при виконанні умов

$$m_0 \|y\|^2 \leq (f''(x)y, y) \leq M_0 \|y\|^2, \; m_0 \leq M_0, \qquad /5/$$

$$(A_k^{-1} f'(x_k), f'(x_k)) > 0, \; (A_{k-1}^{-1} f(x_k), f'(x_k)) > 0 \qquad /6/$$

виконуватиметься $\lim\limits_{k \to \infty} \|A_k - f''(x_k)\| = 0$;

при виборі параметрів α_k та $\tilde{\alpha}_k$ зі співвідношення /2/ незалежно від вибору початкової точки x_0 для послідовності $\{x_k\}$ правильні твердження

$$f(x_{k+1}) < f(x_k), \; \|x_{k+1} - x_k\| \to 0,$$

$$f(\tilde{x}_k) < f(x_k), \; \|\tilde{x}_k - x_k\| \to 0$$

чинні такі оцінки:

$$\|A_k - f''(x_k)\| \leq C \|x_{k-0,5(n-2)} - x_*\| \text{ при } n \text{ парному},$$

$$\|A_k - f''(x_k)\| \leq C \|x_{k-0,5(n-1)} - x_*\| \text{ при } n \text{ непарному}. \qquad /7/$$

Тут і далі C позначає будь-яку незалежну від номеру ітерації константу. Оцінки /7/ одержують так, як і в праці [3] . Співвідношення /7/ дають змогу довести таку теорему.

<u>Теорема.</u> Якщо $f(x)$ - двічі неперервно-диференційована функція, для якої правильна умова /5/, матриця A_k для будь-якого $k \geq n-1$ визначається системою /3/-/4/ та задовольняє нерівності /6/, скалярні множники $\alpha_k, \tilde{\alpha}_k$ шукають згідно з /2/, то швидкість збіжності надлінійна та визначена оцінками:

$$\|x_{k+1} - x_*\| \leq C \|x_k - x_*\| \|x_{k-0,5n} - x_*\| \|x_{k-0,5(n-2)} - x_*\| \text{ для } n \text{ парного},$$

$$\|x_{k+1} - x_*\| \leq C \|x_k - x_*\| \|x_{k-0,5(n+1)} - x_*\| \|x_{k-0,5(n-1)} - x_*\| \text{ для } n \text{ непарного}.$$

Доведення. Спосіб побудови матриці A_k дає змогу переконатися у справедливості такого співвідношення:

$$A_k \rho_{k-1} = \varepsilon_{k-1},$$

звідси

$$x_k - A_k^{-1} f'(x_k) = \tilde{x}_k - A_k^{-1} f'(\tilde{x}_k),$$

а друга рівність в /1/ має вигляд

$$x_{k+1} = \tilde{x}_k - A_k^{-1} f'(\tilde{x}_k).$$

Тоді

$$\| x_{k+1} - x_* \| \le \| A_k^{-1} \| \| A_k - f''(x_{kc}) \| \| \tilde{x}_k - x_* \|,$$

$$x_{kc} = \tilde{x}_k + \theta_1 (\tilde{x}_k - x_*), \quad \theta_1 \in [0,1].$$

Оцінку норми $\| \tilde{x}_k - x_* \|$ можна одержати аналогічно

$$\| \tilde{x}_k - x_* \| \le \| A_{k-1}^{-1} \| \| A_{k-1} - f''(x_{kc1}) \| \| x_k - x_* \|,$$

$$x_{kc1} = x_k + \theta_2 (x_k - x_*), \quad \theta_2 \in [0,1].$$

Останні співвідношення дають змогу одержати оцінку швидкості /8/.

Оскільки система /3/ зображається у вигляді

$$A_k^{-1} = R_k E_k^{-1},$$

причому матриці R_{k+1} та E_{k+1} дістають з R_k та E_k відновленням двох стовпців у кожній з них, то нову матрицю E_{k+1}^{-1} можна записати за допомогою рекурентних співвідношень [4]. Нехай матриця E_k^{-1} вже побудована, тобто наявний базис $S_k, S_{k-1}, \dots, S_{k-n+1}$, який є рядками цієї матриці. Тоді система векторів $\bar{S}_{k+2}, \bar{S}_{k+1}, \dots, \bar{S}_{k-n+3}$, двоїстих до базису матриці E_{k+1}, будують таким чином:

$$\bar{S}_{k+2} = \frac{(S_{k-n+1}, \varepsilon_{k+1}) S_{k-n+2} - (S_{k-n+2}, \varepsilon_{k+1}) S_{k-n+1}}{\Delta},$$

$$\bar{S}_{k+1} = \frac{(S_{k-n+2}, \varepsilon_{k+2}) S_{k-n+1} - (S_{k-n+1}, \varepsilon_{k+2}) S_{k-n+2}}{\Delta},$$

$$\Delta = (S_{k-n+1}, \varepsilon_{k+1})(S_{k-n+2}, \varepsilon_{k+2}) - (S_{k-n+2}, \varepsilon_{k+1})(\varepsilon_{k-n+1}, \varepsilon_{k+2}),$$

$$\bar{S}_{k+1-j} = S_{k+1-j} - [(S_{k+1-j}, \varepsilon_{k+1}) \bar{S}_{k+1} + (S_{k+1-j}, \varepsilon_{k+2}) \bar{S}_{k+2}], \quad j = \overline{1, n-2},$$

$$\bar{S}_{k+2-j} = S_{k+2-j} - [(S_{k+2-j}, \varepsilon_{k+1}) \bar{S}_{k+1} + (S_{k+2-j}, \varepsilon_{k+2}) \bar{S}_{k+2}], \quad j = \overline{2, n-1}.$$

З огляду на двоїстість базисів $\varepsilon_k, \varepsilon_{k-1}, \ldots, \varepsilon_{k-n+1}$ та $S_k, S_{k-1}, \ldots, S_{k-n+1}$ правильні співвідношення

$$(\bar{S}_{k+1-j}, \varepsilon_{k+2-m}) = \delta_{jm} \quad j = 0,1,\ldots,n-1 \quad m = 1,2,\ldots,n,$$

$$(\bar{S}_{k+2-j}, \varepsilon_{k+2-m}) = \delta_{jm} \quad j, m = 0,1,\ldots,n-1,$$

де δ_{jm} – символ Кронекера $(\delta_{jj} = 1, \delta_{jm} = 0,\ j \neq m)$.

У цьому випадку для визначення напрямків ρ_k та $\tilde{\rho}_k$ беруть формули

$$\rho_k = -\sum_{i=0}^{n-1} \rho_{k-i} S^*_{k-i} f'(x_k) = -\sum_{i=0}^{n-1} (S_{k-i}, f'(x_k))\rho_{k-i},$$

$$\tilde{\rho}_k = -\sum_{i=0}^{n-1} \rho_{k-i-2} S^*_{k-i-2} f'(x_k) = -\sum_{i=0}^{n-1} (S_{k-i-2}, f'(x_k))\rho_{k-i-2}.$$

Список літератури: 1. Бартиш М.Я., Никольский Ю.В. Метод двойственных направлений с ускоренной сходимостью. – В кн.: Оптимальное управление в механических системах. К., 1979, т.1, с.60. 2. Данилин Ю.М., Пшеничный Б.Н. О методах минимизации с ускоренной сходимостью. Журн. вычислительной мат. и мат. физики. 1970, 10, № 6, с. 1341-1354. 3. Пшеничный Б.Н., Данилин Ю.М. Численные методы в экстремальных задачах. – М.: Наука, 1975. 4. Фадеев Д.К., Фадеева В.Н. Вычислительные методы линейной алгебры. – М.: Физматгиз, 1970. – 656 с.

Стаття надійшла до редколегії 14.04.82

З М І С Т

УДК 518:517

Об одном методе решения систем нелинейных алгебраических уравнений с сверхлинейной скоростью сходимости. Б а р т и ш М.Я. – Вестн. Львов. ун-та. Сер. мех.-мат., вып. 23. Задачи прикладной математики и механики. Львов: Вища школа. Изд-во при Львов. ун-те, 1985, с.3-[illegible]. /на укр. яз./.

Рассматривается новый итерационный метод решения систем нелинейных алгебраических уравнений. Доказана сходимость метода и даны рекомендации по его практической реализации. Библиогр.: 5 назв.

УДК 518:517.9

Исследование быстроты сходимости метода Канторовича для систем линейных [illegible] уравнений. Ж у к М.В., Д з в о н ы к А.Я. – Вестн. Львов. ун-та, Сер. мех.-мат., вып. 23. Задачи прикладной математики и механики. Львов: Вища школа. Изд-во при Львов. ун-те, 1985, с. [illegible] - 14 /на укр. яз./

Доказана теорема, устанавливающая сходимость и оценки быстроты сходимости метода Канторовича для систем линейных дифференциальных уравнений. Библиогр.: 5 назв.

УДК 534.111

Резонансные колебания струны, движущейся вдоль своей оси, при учете затухания. Д у д з я н ы й И.М. – Вестн. Львов. ун-та. Сер. мех.-мат., вып. 23. Задачи прикладной математики и механики. Львов: Вища школа. Изд-во при Львов. ун-те, 1985, с.15 – 19 /на укр. яз./.

Исследуются вынужденные поперечные колебания струны в резонансной зоне, движущейся с некоторой скоростью вдоль своей оси, при учете затухания, пропорционального первой степени скорости перемещения. Решение строится при помощи асимптотического метода нелинейной механики. Библиогр.: 2 назв.

УДК 517.944:947

О задаче без начальных условий для параболических уравнений второго порядка. М а р т ы н е н к о Мария Д. - Вестн. Львов. ун-та. Сер. мех.-мат., вып. 23. Задачи прикладной математики и механики. Львов: Вища школа. Изд-во при Львов. ун-те, 1985, с. 20 - 22 /на укр. яз./.

Приведен пример задачи без начальных условий для параболического уравнения второго порядка, разрешимой без ограничений на границу поверхности.

УДК 518:517.948

Априорные оценки и оценки скорости сходимости разностной задачи Дирихле для уравнения Пуассона в пространстве. Д у д ы к е в и ч А.Т. - Вестн. Львов. ун-та. Сер. мех.-мат., вып. 23. Задачи прикладной математики и механики. Львов: Вища школа. Изд-во при Львов. ун-те, 1985, с. 22 - 28 /на укр. яз./.

Задача Дирихле для трехмерного уравнения Пуассона аппроксимируется разностной схемой четвертого порядка точности на двадцатисемиточечном шаблоне. Мажорантным методом получены априорные оценки и оценки скорости сходимости этой схемы на параллелепипедоидальной сетке. Библиогр.: 4 назв.

УДК 519.6

Оптимальный по локальной погрешности численный метод второго порядка. П у с т о м е л ь н и к о в а Н.И. - Вестн. Львов. ун-та, Сер. мех.-мат., вып.23. Задачи прикладной математики и механики. Львов: Вища школа. Изд-во при Львов. ун-те, 1985, с. 28 - 30 /на укр. яз./.

Построен и обоснован одношаговый, явный, дробно-рациональный численный метод 2-го порядка, который характеризуется жестко устойчивым оператором перехода. Предпринята попытка оптимизировать локальную погрешность метода. Библиогр.: 4 назв.

УДК 537.533.33

Внешняя пространственная задача Неймана для уравнения Лапласа в случае незамкнутых поверхностей. Ш и р и й И.И. - Вестн. Львов. ун-та. Сер. мех.-мат., вып.23. Задачи прикладной математики и механики. Львов: Вища школа. Изд-во при Львов. ун-те, 1985, с. 30 - 35 /на укр. яз./.

Дается применение метода граничных алементов для решения пространственной задачи Неймана для уравнения Лапласа на случай незамкнутых поверхностей. Библиогр.: 3 назв.

УДК 518.517.948

Комплекс программ расчета сложных электронно-оптических систем. Б а к а л е ц В.А., П у ч к а В.А. - Вестн. Львов. ун-та. Сер. мех.-мат., вып.23. Задачи прикладной математики и механики. Львов: Вища школа. Изд-во при Львов. ун-те, 1985, с. 35 - 39 /на укр. яз./.

Описывается комплекс программ для решения пространственных граничных задач теории потенциала в случае разомкнутых электронно-оптических конфигураций. Алгоритмом численного решения избран метод интегральных уравнений, который использует методику выделения особенности. Ил. 1. Библиогр.: 5 назв.

УДК 517.958

Задача Неймана для уравнения Гельмгольца на плоскости в случае разомкнутых границ. С и б и л ь Ю.Н. - Вестн. Львов. ун-та. Сер. мех.-мат., вып.23. Задачи прикладной математики и механики. Львов: Вища школа. Изд-во при Львов. ун-те, 1985, с. 40 - 44 /на укр. яз./.

Рассмотрена задача Неймана для уравнения Гельмгольца, когда граничные условия заданы на системе прямолинейных отрезков, причем функции граничных условий с разных сторон могут не совпадать между собой. Доказаны существование единственного решения исходной задачи, а также эквивалентность ее некоторому интегро-дифференциальному уравнению первого рода. Исследовано численное решение полученного уравнения. Библиогр.: 3 назв.

УДК 518:517.944/947

О третьей пространственной задаче для уравнения теплопроводности. Левицкая С.М. - Вестн. Львов. ун-та. Сер. мех.-мат., вып. 23. Задачи прикладной математики и механики. Львов: Вища школа. Изд-во при Львов. ун-те, 1985, с. 44 - 49 /на укр. яз./.

Предлагается методика решения третьей пространственной задачи для уравнения теплопроводности в случае разомкнутых областей. Решение ищется в виде теплового потенциала простого слоя путем сведения его к рекуррентной последовательности интегральных уравнений первого рода. Библиогр.: 3 назв.

УДК 517.947:534

Численное решение осесимметричной задачи Дирихле для волнового уравнения. Музычук А.Е. - Вестн. Львов. ун-та. Сер. мех.-мат., вып. 23. Задачи прикладной математики и механики. Львов: Вища школа. Изд-во при Львов. ун-те, 1985, с. 50 - 55 /на укр.яз./.

Путем интегрального преобразования Чебышева-Лагерра нестационарная задача сведена к бесконечной треугольной системе задач Дирихле для неоднородного уравнения Гельмгольца. Задачи в пространстве изображений решаются методом интегральных уравнений. Ил. 2. Библиогр.: 3 назв.

УДК 681.3:06:51

Моделирование работы М-автоматов в машинной среде ассемблерного уровня. Костив О.В. - Вестн. Львов. ун-та. Сер. мех.-мат., вып. 23. Задачи прикладной математики и механики. Львов: Вища школа. Изд-во при Львов. ун-те, 1985, с. 56 - 60 /на укр.яз./.

Приводится описание системы, интерпретирующей работу М-автоматов, ориентированных на сложностный анализ алгоритмов символьных преобразований, в машинной среде ассемблерного уровня. Интерпретатор включает средства настройки на алгебру пользователя и отладки программ, написанных на М-языке. Библиогр.: 2 назв.

УДК 517.958:519.6

Построение апостериорных оценок численного решения краевых задач для уравнения Штурма - Лиувилля. Ш и н к а р е н к о Г.А. - Вестн. Львов. ун-та. Сер. мех.-мат., вып. 23. Задачи прикладной математики и механики. Львов: Вища школа. Изд-во при Львов. ун-те, 1985, с.61 - 67 /на укр. яз./.

Построены апостериорные оценки погрешности аппроксимации метода конечных элементов. Доказана сходимость предложенной схемы. Приведены примеры численных расчетов. Табл. 1. Ил. 2. Список лит.: 2 назв.

УДК 536.24

Температурное поле в пластине с теплоактивными включениями при наличии теплообмена на боковых поверхностях. П и с к о з у б И.З. - Вестн. Львов. ун-та. Сер. мех.-мат., вып. 23. Задачи прикладной математики и механики. Львов: Вища школа. Изд-во при Львов. ун-те, 1985, с. 68 - 72 /на укр. яз./.

Методом сингулярных интегральных уравнений решена задача о двумерном квазистационарном взаимодействии температурных полей в пластине от источников тепла и системы тонких теплоактивных включений. Учитывается теплоотдача с боковых поверхностей пластины и включений. Приводятся численные результаты. Ил. 2. Библиогр.: 10 назв.

УДК 517.9

Исследование нестационарного температурного поля в бесконечном слое с круговой линией раздела граничных условий методом полиномов Чебышева-Лагерра. Г а л а з ю к В.А., Г и р н я к Н.А. - Вестн. Львов. ун-та. Сер. мех.-мат., вып. 23. Задачи прикладной математики и механики. Львов: Вища школа. Изд-во при Львов. ун-те, 1985, с. 72 - 77 /на укр. яз./.

Предложена методика исследования нестационарных температурных полей в плоско-параллельном слое при нагреве его поверхности интенсивными локальными источниками тепла. С помощью метода полиномов Чебышева-Лагерра задача сведена к последовательности интегральных уравнений Фредгольма второго рода. Библиогр.: 2 назв.

УДК 539.3

Задача нарушения контакта при сжатии упругих полуплоскостей. Сулим Г.Т., Мартыняк Р.М. - Вестн. Львов. ун-та. Сер. мех.-мат., вып. 23. Задачи прикладной математики и механики. Львов: Вища школа. Изд-во при Львов. ун-те, 1985, с. 78 - 82 /на укр. яз./.

Рассматривается плоская контактная задача о сжатии двух упругих полуплоскостей, взаимодействующих без трения, на линии раздела которых под действием приложенных усилий образуются зоны нарушения контакта. Для некоторых частных случаев нагружения приведены точные решения. Ил. 1. Библиогр.: 7 назв.

УДК 539.3

Периодическая система параллельных тонких упругих включений в плоскости. Опанасович В.К., Драган М.С. - Вестн. Львов. ун-та. Сер. мех.-мат., вып.23. Задачи прикладной математики и механики. Львов: Вища школа. Изд-во при Львов. ун-те, 1985, с. 83 - 89 /на укр. яз./.

Рассмотрена задача об определении напряженно-деформированного состояния пластины с периодической системой изотропных тонких прямолинейных упругих включений. Приведен численный анализ коэффициентов интенсивности напряжений. Ил. 3. Библиогр.: 5 назв.

УДК 541.124

К методу интегрирования систем дифференциальных уравнений химической кинетики. Паздерский Ю.А., Юринец В.Е., Баран В.П., Евтушенко А.А. - Вестн. Львов. ун-та. Сер. мех.-мат., вып. 23. Задачи прикладной математики и механики. Львов: Вища школа. Изд-во при Львов. ун-те, 1985, с. 89 - 94 /на укр. яз./.

Приводится решение жесткой системы уравнений химической кинетики на ЭВМ двумя способами. Результаты сравниваются и представлены в виде графиков. Совпадение результатов свидетельствует о достоверности полученных решений. Ил. 2. Библиогр.: 10 назв.

УДК 519.21

Доверительные интервалы для порядковых статистик. К в и т И.Д. - Вестн. Львов. ун-та. Сер. мех.-мат., вып. 23. Задачи прикладной математики и механики. Львов: Вища школа. Изд-во при Львов. ун-те, 1985, с. 94 - 98 /на укр. яз./.

На основании процентных точек распределения Фишера указывается метод построения медианы и доверительных интервалов для элементов вариационного ряда в случае выборок из абсолютно непрерывной или дискретной генеральной совокупности с известным распределением вероятностей. Библиогр.: 4 назв.

УДК 518:517.948

Численный метод минимизации функций с построением двойственных базисов. Б а р т и ш М.Я., Н и к о л ь с к и й Ю.В. - Вестн. Львов. ун-та. Сер. мех.-мат., вып. 23. Задачи прикладной математики и механики. Львов: Вища школа, Изд-во при Львов. ун-те, 1985, с. 99 - 102 /на укр. яз./.

Предложен и исследован численный метод минимизации гладких выпуклых функций, являющийся модификацией метода двойственных направлений. Построены рекуррентные формулы построения данной матрицы, что позволяет уменьшить объем вычислений на каждой итерации. Библиогр.: 4 назв.

Министерство высшего и среднего
специального образования УССР

Вестник Львовского университета
Серия механико-математическая
Выпуск 23

ЗАДАЧИ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ

Издается с 1965 г.

Львов. Изд-во при Львовском государственном университете
издательского объединения "Вища школа" /290000, Львов-центр,
ул. Университетская, 1/

/На украинском языке/

Редактор В.В.Войтович
Художній редактор С.В.Копотюк
Технічний редактор Г.А.Степанюк
Коректор О.А.Тростянчин

Н/К

Підписано до друку 29.11.84 . БГ 14025 .
Формат 60х84/16. Папір друк. № 3. Офс. друк.
Умовн. друк. арк. 6,51 Умовн. фарб. відб. 6,85
Обл.-вид. арк. 4,89 . Тираж 600 прим. Вид. № 1293.
Зам. 3998 . Ціна 70 к. Замовне.

Видавництво при Львівському державному університеті
видавничого об"єднання "Вища школа", 290000, Львів,
вул. Університетська, 1.

Обласна книжкова друкарня, 290000, Львів,
вул. Стефаника, 11.

70 к.

Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат., 1985, вип. 23, 1—112.