УДК 517.956

С.П.Лавренюк

НЕЛОКАЛЬНА ЗАДАЧА ДЛЯ КВАЗІЛІНІЙНОГО ПАРАБОЛІЧНОГО РІВНЯННЯ

Розглянемо задачу

$$u_t = u_{xx} + f(x,t,u); \tag{I}$$

$$\begin{cases} a_0 u_x(0,t) + a_1 u_x(1,t) + b_0 u(0,t) + b_1 u(1,t) = 0, \\ c_0 u_x(0,t) + c_1 u_x(1,t) + d_0 u(0,t) + d_1 u(1,t) = 0; \end{cases} \tag{2}$$

$$u(x,0) = 0 \tag{3}$$

в області $Q_T = \{(x,t):\ 0<x<1,\ 0<t<T\}$. Припустимо, що крайові умови (2) посилено регулярні [3]. Відомо [2], що в просторі $L^2(0,1)$ існує база Рісса $\{X_k(x)\}$, яка складається з власних і приєднаних функцій відповідної задачі Штурма–Ліувілля та містить лише скінченну кількість приєднаних функцій.

Нехай $\lambda_1, \ldots, \lambda_N, \lambda_{2N+1}, \ldots$ — власні значення задачі, $X_{2k-1}(x)$ –приєднані функції, що відповідають власним значенням λ_k і власним функціям $X_{2k}(x)$, $k=1,\ldots,N$. Розглянемо банахів простір $C^1(\bar{Q}_T)$. Нехай $\hat{C}^1(\bar{Q}_T)$ — множина тих функцій, які задовольняють умови (2), (3). Якщо вибрати функцію $v(x,t)$ з простору $\hat{C}^1(\bar{Q}_T)$, то формально розв"язок задачі (2), (3) для рівняння

$$u_t = u_{xx} + g(x,t) \tag{4}$$

можна записати у вигляді [I]

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{N} \Big[\int_0^t g_{2k}(\tau) e^{-\lambda_k (t-\tau)} d\tau\, X_{2k}(x) +$$

$$+\int_0^t g_{2k-1}(\tau)e^{-\lambda_k(t-\tau)}d\tau\,(X_{2k-1}(x)+\rho_k t X_{2k}(x))]+$$

$$+\sum_{k=2N+1}^{\infty}\int_0^t g_k(\tau)e^{-\lambda_k(t-\tau)}d\tau\, X_k(x),$$

де $g(x,t)=f(x,t)\cdot v(x,t)$. (5)

Легко перевірити, що у випадку, коли $g(x,t)$ має неперервну похідну по t і $g(x,0)=0$, то функція (5) задовольняє крайові та початкову умови (2), (3), а також майже для всіх $x\in(0,1)$ і для всіх $t\in[0,T]$ рівняння (4). Виходячи з рівності (5), можемо тепер майже всюди розв"язок задачі (4), (2), (3) одержати як результат дії деякого відображення A на функцію $v(x,t)$. Звернемо увагу на той факт, що відображення A, яке визначається правою частиною рівності (5), кожну функцію $v(x,t)$ з простору $\hat{C}^1(\bar{Q}_T)$ переводить у функцію $u(x,t)$ цього ж простору, причому для всіх $t\in[0,T]$, $u_{xx}(x,t)\in L^2(0,1)$.

Позначимо через $B_\mu=\{v(x,t): v\in\hat{C}^1(\bar{Q}_T),\ \|v\|\le\mu\}$. Очевидно, B_μ – повний метричний простір. Нехай $D=Q_T\times(-\mu,\mu)$. Припускаємо, що функція $f(x,t,y)$ задовольняє в області D умови:

1) $f, f_t, f_y \in C(\bar{D})$

2) $|f_t(x,t,y_1)-f_t(x,t,y_2)|\le\mu_{11}|y_1-y_2|$,

$|f_y(x,t,y_1)-f_y(x,t,y_2)|\le\mu_{12}|y_1-y_2|$

для всіх $(x,t,y_1),(x,t,y_2)\in\bar{D}$. Введемо такі позначення:

$\mu_1=\sup\limits_k\max\limits_{[0,1]}|X_k(x)|$, $\mu_2=\max\limits_{\bar{D}}|f_t(x,t,y)|$,

$\mu_3=\max\limits_{\bar{D}}|f_y(x,t,y)|$, $\mu_4=\sup\limits_k\max\limits_{[0,1]}|Y_k(x)|$,

$$\mu_5 = \max_{\bar{D}} |f(x,t,y)|, \quad \mu_6 = \sup_k \frac{k^2}{|\lambda_k|},$$

$$\mu_8 = \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}}, \quad p = \max_{1 \le k \le N} |p_k|,$$

$$\mu_9 = \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k \operatorname{Re} \lambda_k} + \sum_{k=2N+1}^{\infty} \frac{1}{k \operatorname{Re} \lambda_k},$$

$$\mu_{10} = \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{\operatorname{Re} \lambda_k} + \sum_{k=2N+1}^{\infty} \frac{1}{\operatorname{Re} \lambda_k},$$

$$\mu_{13} = \mu_4 \left(\mu_3 + \mu_{11} + \mu \cdot \mu_{12}\right).$$

Як відомо [3] , будь-яка функція $\varphi(x) \in L^2(0,1)$ може бути зображена у вигляді ряду

$$\varphi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k X_k(x),$$

де

$$\varphi_k = \int_0^1 \varphi(x) \bar{Y}(x) dx, \quad k = 1, 2, \ldots,$$

причому

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\varphi_k|^2 \le \mu_7 \int_0^1 \varphi^2(x) dx.$$

Легко перевірити, що для довільних функцій $v, v_1, v_2 \in B_\mu$

$$\|Av\| \le \mu_{14}, \quad \|Av_1 - Av_2\| \le \mu_{15} \|v_1 - v_2\|, \tag{6}$$

де

$$\mu_{14} = \mu_1 \mu_4 \mu_5 \mu_{10} (2 + pT) + 2\mu_1 \mu_6 (1 + pT)(\mu_5 \mu_7 \mu_8 +$$

$$+ \mu_9 (\mu_2 + \mu \mu_3)) + \mu_1 \mu_4 \mu_{10} ((\mu_2 + \mu \mu_3)(2 + pT) + p\mu_5),$$

$$\mu_{15} = \mu_1 \mu_3 \mu_4 \mu_{10} (1 + pT) + \mu_1 \mu_{10} \mu_{13} (2 + pT) +$$

$$+ p\mu_1\mu_3\mu_4\mu_{10} + 2\mu_1\mu_6((1+pT)\mu_3\mu_4\mu_7\mu_8 +$$
$$+ \mu_9\mu_{13}(2+pT)).$$

Теорема. Нехай функція $f(x,t,y)$ задовольняє умови I), 2), $f(x,0,0)=0$ і $\mu_{14} \leq \mu, \mu_{15} < 1$. Тоді існує єдиний розв"язок майже всюди задачі (I) - (3).

Доведення. Розглядаємо рівняння

$$u = Av$$

в просторі B_μ. Оскільки на основі (6) оператор A задовольняє принципу стискуючих відображень, то він має єдину нерухому точку u в просторі B_μ, яка і буде розв"язком майже всюди задачі (I) - (3).

Список літератури: I. Ионкин Н.И., Моисеев Е.И. О задаче для уравнения теплопроводности с двуточечными краевыми условиями. - Дифференциальные уравнения, I979, т. I5, № 7, с. I284-I295. 2. Михайлов В.П. О базисах Рисса в $L^2(0,1)$. - Докл. АН СССР, I962, т. I44, № 5, с. 98I-985. 3. Наймарк М.А. Линейные дифференциальные операторы. - М.: Наука, I969. - 245 с.

Стаття надійшла до редколегії 05.03.84