УДК 517.946

В.М.Цимбал

ЗАСТОСУВАННЯ МЕТОДУ ІНТЕГРАЛІВ ЕНЕРГІЇ В ОДНІЙ СИНГУЛЯРНО ЗБУРЕНІЙ ЗАДАЧІ

Дослідження сингулярно збуреної задачі звичайно складається з двох етапів: побудови формального асимптотичного розвинення деяким асимптотичним методом та його обгрунтування, яке зводиться до одержання відповідної оцінки залишкового члена. У випадку сингулярно збурених задач для гіперболічних рівнянь на другому етапі виникають труднощі, зумовлені неможливістю використання методів [4], що добре розвинені в випадку еліптичних і параболічних сингулярно збурених задач. Одним з небагаточисленних методів, який вдається використати для сингулярно збурених задач для гіперболічних рівнянь, є метод інтегралів енергії [3].

Застосуємо метод інтегралів енергії до одержання оцінки в $D=\{(x,t): 0\leq x\leq l, 0\leq t\leq T\}$ розв"язку такої задачі:

$$\varepsilon\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)+a(x,t)\frac{\partial u}{\partial t}+b(x,t)u+ \\ +\int_0^T\int_0^l K(x,t;\xi,\eta)u(\xi,\eta)\,d\xi\,d\eta=f(x,t,\varepsilon), \tag{1}$$

$$u(x,0)=0,\ \frac{\partial u(x,0)}{\partial t}=0,\ u(0,t)=0,\ u(l,t)=0, \tag{2}$$

де $\varepsilon>0$ – малий параметр.

<u>Теорема</u>. Нехай виконуються умови:

1) $a(x,t),\ f(x,t,\varepsilon)\in C(D),\ b(x,t)\in C^1(D),\ K(x,t;\xi,\eta)\in C$ в $D\times D$;

2) $a(x,t)>0,\ b(x,t)>0$ в D;

3) $\dfrac{\ell T^2 e^{\alpha T}}{ab}\int\limits_0^T\int\limits_0^\ell\int\limits_0^T\int\limits_0^\ell K^2(x,t;\xi,\eta)\,d\xi\, d\eta\, dx\, dt < 1,$

де $a=\min\limits_{(x,t)\in D} a(x,t);\ b=\min\limits_{(x,t)\in D} b(x,t);\ \alpha=\dfrac{1}{b}\max\limits_{(x,t)\in D}\left|\dfrac{\partial b(x,t)}{\partial t}\right|.$

Тоді наявна оцінка

$$\|u\|_{L_2(D)}\le C\|f\|_{L_2(D)}, \tag{3}$$

де C – константа, яка не залежить від ε.

Доведення. Виходимо зі співвідношення, що легко перевірити

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\varepsilon\left\{\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2\right\}+b(x,t)u^2\right)-$$

$$-2\varepsilon\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\,\frac{\partial u}{\partial t}\right)+2a(x,t)\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2=2f\frac{\partial u}{\partial t}+$$

$$+\frac{\partial b(x,t)}{\partial t}u^2-2\frac{\partial u}{\partial t}\int\limits_0^T\int\limits_0^\ell K(x,t;\xi,\eta)\,u(\xi,\eta)\,d\xi\, d\eta. \tag{4}$$

Нехай τ довільне $0\le\tau\le T$. Проінтегрувавши (4) по області $D_\tau=\{(x,t): 0\le x\le \ell,\ 0\le t\le\tau\le T\}$ з врахуванням формули Гауса – Остроградського і умов (2), одержимо

$$\int\limits_0^\ell\left\{\varepsilon\left[\left(\frac{\partial u(x,\tau)}{\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial u(x,\tau)}{\partial x}\right)^2\right]+b(x,\tau)u^2(x,\tau)\right\}dx+$$

$$+2\iint\limits_{D_\tau}a(x,t)\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2dx\,dt=2\iint\limits_{D_\tau}f\,\frac{\partial u}{\partial t}\,dx\,dt+$$

$$+\iint\limits_{D_\tau}\frac{\partial b}{\partial t}u^2dx\,dt-2\iint\limits_{D_\tau}\frac{\partial u}{\partial t}\left(\int\limits_0^T\int\limits_0^\ell K(x,t;\xi,\eta)\,u(\xi,\eta)\,d\xi\, d\eta\right)dx\,dt. \tag{5}$$

Застосування нерівності Коші з параметром дає

$$2\left|\int_0^\tau\int_0^l f\frac{\partial u}{\partial t}\,dxdt\right| \le \delta\int_0^\tau\int_0^l \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 dxdt + \frac{1}{\delta}\int_0^\tau\int_0^l f^2\,dxdt. \qquad (6)$$

Останній доданок у (5) з використанням нерівності Коші з параметром й інтегральної нерівності Коші можна оцінити таким чином:

$$2\left|\int_0^\tau\int_0^l \frac{\partial u}{\partial t}\left(\int_0^T\int_0^l K(x,t;\xi,\eta)\,u(\xi,\eta)\,d\xi d\eta\right)dxdt\right| \le q\int_0^\tau\int_0^l\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 dxdt +$$

$$+\frac{lT}{q}\left(\int_0^T\int_0^l\int_0^T\int_0^l K^2(x,t;\xi,\eta)\,d\xi d\eta dxdt\right)\int_0^T\int_0^l u^2 d\xi d\eta. \qquad (7)$$

Виберемо у (6), (7) $\delta = q = a$. Тоді (5) з врахуванням (6), (7) оцінюємо як

$$\int_0^l u^2(x,\tau)\,dx \le \frac{1}{ab}\int_0^T\int_0^l f^2\,dxdt + \alpha\int_0^\tau\int_0^l u^2\,dxdt +$$

$$+\left(\frac{lT}{ab}\int_0^T\int_0^l\int_0^T\int_0^l K^2(x,t;\xi,\eta)\,d\xi d\eta dxdt\right)\int_0^T\int_0^l u^2 d\xi\, d\eta. \qquad (8)$$

Введемо позначення $y(\tau) = \int_0^l u^2(x,\tau)\,dx,$

$$c = \frac{1}{ab}\int_0^T\int_0^l f^2\,dxdt,\quad \beta = \frac{lT}{ab}\int_0^T\int_0^l\int_0^T\int_0^l K^2(x,t;\xi,\eta)\,d\xi d\eta dxdt.$$

Перепишемо (8) у вигляді

$$y(\tau) \le C + \alpha \int_0^{\tau} y(t)dt + \beta \int_0^{T} y(t)dt = Q(\tau). \tag{9}$$

Після диференціювання $Q(\tau)$ з врахуванням (9) дістаємо

$$Q'(\tau) \le \alpha Q(\tau). \tag{10}$$

Проінтегрувавши (10) від 0 до τ, після очевидних оцінок одержимо

$$y(\tau) \le Ce^{\alpha T} + \beta e^{\alpha T} \int_0^{T} y(t)dt. \tag{11}$$

Провівши інтегрування (10) по τ від 0 до T, одержимо

остаточну оцінку, де $C = \left(\dfrac{Te^{\alpha T}}{b - \dfrac{lT^2 e^{\alpha T}}{a} \int_0^T \int_0^l \int_0^T \int_0^l K^2(x,t;\xi,\eta) d\xi d\eta dx dt} \right)$

Теорема доведена.

Зауваження 1. Ми не зупиняємося на побудові асимптотики розв"язку задачі (1), (2), яку легко можна побудувати методом примежового шару [2] з необхідними змінами [1], що зв"язані з наявністю фредгольмового доданка.

Зауваження 2. Аналогічну процедуру застосовують до одержання оцінки розв"язку задачі для рівняння

$$\varepsilon \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + a(x,t)\frac{\partial u}{\partial t} + b(x,t)u +$$

$$+ \int_0^T \int_0^l K(x,t;\xi,\eta)\, u(\xi,\eta) d\xi d\eta = f(x,t,\varepsilon)$$

з умовами (2).

Список літератури: 1. Васильева А.Б., Бутузов В.Ф. Асимптотические разложения решений сингулярно возмущенных уравнений. - М.: Наука, 1973. - 280 с. 2. Вишик М.И., Люстерник Л.А. Регулярное вырождение и пограничный слой для линейных дифференциальных уравнений с малым параметром. – Усп. мат. наук, 1957, 12, № 5, с. 3–122. 3. Курант Р. Уравнения с частными производными. – М.: Мир, 1964. – 830 с. 4. Eckhaus W. Formal approximations and singular perturbations. SIAM Review, 1977, 19, N4, p. 288-292.

Стаття надійшла до редколегії 01.09.82

УДК 517.946

В.М.Флюд, В.М.Цимбал

ЗМІШАНА ЗАДАЧА ДЛЯ ГІПЕРБОЛІЧНОГО РІВНЯННЯ З ДЕКІЛЬКОМА МАЛИМИ ПАРАМЕТРАМИ

Результат цієї замітки доповнює результати праць [I, 4].

В області $D=\{(x,t): 0\le x\le l,\ 0\le t\le T\}$ розглянемо змішану задачу

$$\varepsilon^2\mu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)+\varepsilon\left(a(x,t)\frac{\partial u}{\partial t}+b(x,t)\frac{\partial u}{\partial x}\right)+c(x,t)u=f(x,t), \tag{I}$$

$$u(x,0;\varepsilon,\mu)=\frac{\partial u}{\partial t}(x,0;\varepsilon,\mu)=u(0,t;\varepsilon,\mu)=u(l,t;\varepsilon,\mu)=0, \tag{2}$$

де $0<\varepsilon\ll 1$, $0<\mu\ll 1$ – параметри.

Припустимо, що виконуються такі умови:

I) $a(x,t)>0,\ c(x,t)>0,\ (x,t)\in D,\ b(0,t)>0,\ b(l,t)<0,\ t\in[0,T]$;

2) $a(x,t),\ b(x,t),\ c(x,t),\ f(x,t)$ – неперервні та неперервно диференційовані по x і t в області D;

3) $f(0,0)=f(l,0)=0$.

Відомо, що при даних припущеннях розв"язок задачі (I) – (2) існує і єдиний при фіксованих значеннях параметрів ε і μ.

Користуючись методом Вішика-Люстерника [2], побудуємо асимптотичне розвинення розв"язку задачі (I) – (2). Шукатимемо