для линейных дифференциальных уравнений с малым параметром. - Усп. мат. наук, I957, I2, № 5, с. 3-I22. 3. Курант Р. Уравнения с частными производными. - М.: Мир, I964. - 830 с. 4. Eckhaus W., Formal approximations and singular perturbations. SIAM Review, 1977, 19, N4, p. 288-292.

Стаття надійшла до редколегії 0I.09.82

УДК 5I7.946

В.М.Флюд, В.М.Цимбал

ЗМІШАНА ЗАДАЧА ДЛЯ ГІПЕРБОЛІЧНОГО РІВНЯННЯ З ДЕКІЛЬКОМА МАЛИМИ ПАРАМЕТРАМИ

Результат цієї замітки доповнює результати праць [I, 4].

В області $D=\{(x,t): 0\le x\le l,\ 0\le t\le T\}$ розглянемо змішану задачу

$$\varepsilon^2\mu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)+\varepsilon\left(a(x,t)\frac{\partial u}{\partial t}+b(x,t)\frac{\partial u}{\partial x}\right)+c(x,t)u=f(x,t), \qquad (I)$$

$$u(x,0;\varepsilon,\mu)=\frac{\partial u}{\partial t}(x,0;\varepsilon,\mu)=u(0,t;\varepsilon,\mu)=u(l,t;\varepsilon,\mu)=0, \qquad (2)$$

де $0<\varepsilon\ll 1$, $0<\mu\ll 1$ - параметри.

Припустимо, що виконуються такі умови:

I) $a(x,t)>0,\ c(x,t)>0,\ (x,t)\in D,\ b(0,t)>0,\ b(l,t)<0,\ t\in[0,T]$;

2) $a(x,t),\ b(x,t),\ c(x,t),\ f(x,t)$ - неперервні та неперервно диференційовані по x і t в області D;

3) $f(0,0)=f(l,0)=0$.

Відомо, що при даних припущеннях розв"язок задачі (I) - (2) існує і єдиний при фіксованих значеннях параметрів ε і μ.

Користуючись методом Вішика-Люстерника [2], побудуємо асимптотичне розвинення розв"язку задачі (I) - (2). Шукатимемо його у вигляді

$$u(x,t;\varepsilon,\mu)=\sum_{i+j=0}^{1}\varepsilon^i\mu^j v_{ij}(x,t)+\sum_{i+j=0}^{1}\varepsilon^i\mu^j \Pi_{ij}(x,\tau)+\mu\sum_{i+j=0}^{1}\varepsilon^i\mu^j Q_{ij}(x,\xi)+$$

$$+\sum_{i+j=0}^{1}\varepsilon^i\mu^j Z_{ij}(\eta,t)+\sum_{i+j=0}^{1}\varepsilon^i\mu^j Z^*_{ij}(\zeta,t)+\sum_{i+j=0}^{1}\varepsilon^i\mu^j P_{ij}(\eta,\tau)+$$

$$+\sum_{i+j=0}^{1}\varepsilon^i\mu^j P^*_{ij}(\zeta,\tau)+R(x,t;\varepsilon,\mu), \qquad (3)$$

де $\tau=\frac{t}{\varepsilon}$, $\xi=\frac{t}{\varepsilon\mu}$, $\eta=\frac{x}{\varepsilon}$, $\zeta=\frac{\ell-x}{\varepsilon}$; функції $v_{ij}(x,t)$, $\Pi_{ij}(x,\tau)$, $Q_{ij}(x,\xi)$, $Z_{ij}(\eta,t)$, $Z^*_{ij}(\zeta,t)$, $P_{ij}(\eta,\tau)$, $P^*_{ij}(\zeta,\tau)$ визначаються з ітераційного процесу, описаного далі.

Зауважимо, що (3) містить тільки члени до першого порядку по ε, μ розв"язку задачі (I) – (2). Для одержання асимптотичного розвинення розв"язку вищого порядку слід вимагати додаткових умов на коефіцієнти та вільний член (I). Тому, не накладаючи цих додаткових умов, обмежимось даним випадком.

Регулярну частину розвинення $v(x,t;\varepsilon,\mu)=\sum_{i+j=0}^{1}\varepsilon^i\mu^j v_{ij}(x,t)$ знаходимо як результат підстановки виразу $v(x,t;\varepsilon,\mu)$ у рівняння (I) і зрівнювання коефіцієнтів при відповідних степенях ε і μ :

$$c(x,t)v_{00}(x,t)=f(x,t);\ c(x,t)v_{ij}(x,t)=-\left(a(x,t)\frac{\partial v_{i-1,j-1}}{\partial t}+b(x,t)\frac{\partial v_{i-1,j}}{\partial x}\right),\quad (i,j=0,1). \qquad (4)$$

Очевидно, $v(x,t;\varepsilon,\mu)$, взагалі кажучи, жодну з умов (2) не задовольняє. Тут і надалі вважаємо, що функція з хоч одним від"ємним індексом тотожно нульова.

Функції $\Pi(x,\tau;\varepsilon,\mu)=\sum_{i+j=0}^{1}\varepsilon^i\mu^j\Pi_{ij}(x,\tau)$ і $Q(x,\xi;\varepsilon,\mu)=$ $=\mu\sum_{i+j=0}^{1}\varepsilon^i\mu^j Q_{ij}(x,\xi)$ служать для того, щоб у сумі з $v(x,t;\varepsilon,\mu)$ задовольнити перші дві умови (2). За допомогою рівняння знаходимо $\Pi(x,\tau;\varepsilon,\mu)$

$$a(x,0)\frac{\partial \Pi}{\partial \tau}+c(x,0)\Pi=[a(x,0)-a(x,\varepsilon\tau)]\frac{\partial \Pi}{\partial \tau}+[c(x,0)-c(x,\varepsilon\tau)]\Pi-$$
$$-\varepsilon b(x,\varepsilon\tau)\frac{\partial \Pi}{\partial x}-\mu\frac{\partial^2 \Pi}{\partial x^2}+\varepsilon^2\mu\frac{\partial^2 \Pi}{\partial x^2}$$

Розклавши коефіцієнти в ряд Тейлора в околі $t=0$, підставивши замість $\Pi(x,\tau;\varepsilon,\mu)$ її вираз і зрівнявши коефіцієнти при відповідних степенях ε і μ , одержимо

$$a(x,0)\frac{\partial \Pi_{ij}}{\partial \tau}+c(x,0)\Pi_{ij}=g_{ij}(x,\tau),\quad (i,j=0,1), \tag{5}$$

де $g_{ij}(x,\tau)\,(i,j=0,1)$ – функція, явний вигляд якої легко виписати, причому $g_{00}(x,\tau)=0$.

Аналогічно, застосовуючи відповідні регуляризуючі перетворення $\xi=\frac{t}{\varepsilon\mu}$, $\eta=\frac{x}{\varepsilon}$, $\zeta=\frac{l-x}{\varepsilon}$, $\tau=\frac{t}{\varepsilon}$ і рекурентний процес теорії сингулярних збурень, одержуємо відповідні рівняння для визначення функцій $Q_{ij}(x,\xi)$, $\mathcal{I}_{ij}(\eta,t)$, $\mathcal{I}^*_{ij}(\zeta,t)$, $P_{ij}(\eta,\tau)$, $P^*_{ij}(\zeta,\tau)$

$$\frac{\partial^2 Q_{ij}}{\partial \xi^2}+a(x,0)\frac{\partial Q_{ij}}{\partial \xi}=h_{ij}(x,\xi),\qquad (i,j=0,1); \tag{6}$$

$$b(0,t)\frac{\partial \mathcal{I}_{ij}}{\partial \eta}+c(0,t)\mathcal{I}_{ij}=q_{ij}(\eta,t),\qquad (i,j=0,1); \tag{7}$$

$$-b(l,t)\frac{\partial \mathcal{I}^*_{ij}}{\partial \zeta}+c(l,t)\mathcal{I}^*_{ij}=S(\zeta,t),\qquad (i,j=0,1); \tag{8}$$

$$a(0,0)\frac{\partial P_{ij}}{\partial \tau}+b(0,0)\frac{\partial P_{ij}}{\partial \eta}+c(0,0)P_{ij}=r_{ij}(\eta,\tau),\ (i,j=0,1); \tag{9}$$

$$a(l,0)\frac{\partial P^*_{ij}}{\partial \tau}-b(l,0)\frac{\partial P^*_{ij}}{\partial \zeta}+c(l,0)P^*_{ij}=r^*_{ij}(\zeta,\tau),\ (i,j=0,1), \tag{10}$$

де $h_{ij}(x,\xi)$, $q_{ij}(\eta,t)$, $S_{ij}(\zeta,t)$, $r_{ij}(\eta,\tau)$, $r^*_{ij}(\zeta,\tau)$ – деякі лінійні комбінації відповідно $Q_{00}(x,\xi)$, $\mathcal{I}_{00}(\eta,t)$, $\mathcal{I}^*_{00}(\zeta,t)$,

$P_\infty(\eta,\tau)$, $P^*_\infty(\zeta,\tau)$ і їхніх похідних, причому $h_\infty(x,\xi)=q_\infty(\eta,t)=\xi_\infty(\zeta,t)=$ $=z_\infty(\eta,\tau)=z^*_\infty(\zeta,\tau)=0$. Функції $Z_{ij}(\eta,t)$ і $Z^*_{ij}(\zeta,t)$ служать для того, щоб сумісно з $V_{ij}(x,t)$ задовольнити відповідно третю та четверту умови (2), а функції $P_{ij}(\eta,\tau)$ і $P^*_{ij}(\zeta,\tau)$ – щоб ліквідувати нев"язку, яку вносять $\Pi_{ij}(x,\tau)$ і $Q_{ij}(x,\xi)$ на сторони $x=0$ і $x=l$ та $Z_{ij}(\eta,t)$ і $Z^*_{ij}(\zeta,t)$ на сторону $t=0$.
Використовуючи (2), (3) і третю умову нашого припущення, одержуємо такі умови для шуканих функцій:

$$\Pi_{ij}(x,0)=-V_{ij}(x,0)-Q_{ij-1}(x,0), \qquad (i,j=0,1); \tag{II}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial Q_{ij}}{\partial \xi}(x,0)=-\dfrac{\partial \Pi_{ij}}{\partial \tau}(x,0)-\dfrac{\partial V_{i-1\,j}}{\partial t}(x,0), \\ Q_{ij}(x,\xi)\xrightarrow[\xi\to-\infty]{}0, \end{cases} \qquad (i,j=0,1); \tag{I2}$$

$$Z_{ij}(0,t)=-V_{ij}(0,t), \qquad (i,j=0,1); \tag{I3}$$

$$Z^*_{ij}(0,t)=-V_{ij}(l,t), \qquad (i,j=0,1); \tag{I4}$$

$$\begin{cases} P_{ij}(\eta,0)=-Z_{ij}(\eta,0), \\ P_{ij}(0,\tau)=-\Pi_{ij}(0,\tau), \end{cases} \qquad (i,j=0,1); \tag{I5}$$

$$\begin{cases} P^*_{ij}(\zeta,0)=-Z^*_{ij}(\zeta,0), \\ P^*_{ij}(0,\tau)=-\Pi_{ij}(l,\tau), \end{cases} \qquad (i,j=0,1). \tag{I6}$$

Отже, функції $\Pi_{ij}(x,\tau)$, $Q_{ij}(x,\xi)$, $Z_{ij}(\eta,t)$, $Z^*_{ij}(\zeta,t)$ знаходимо як розв"язки відповідно задач для звичайних диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами (5)–(II), (6)–(I2), (7)–(I3), (8)–(I4), а $P_{ij}(\eta,\tau)$ і $P^*_{ij}(\zeta,\tau)$ – як розв"язки відповідних змішаних задач (9)–(I5) і (I0)–(I6) для диференціальних рівнянь із частинними похідними першого порядку зі сталими коефіцієнтами.

Легко показати, що функції $\Pi_{ij}(x,\tau)$, $Q_{ij}(x,\xi)$, $Z_{ij}(\eta,t)$, $Z^*_{ij}(\zeta,t)$ є функціями примежового шару. Розв"язки задач (9)-(I5) і (I0)-(I6) неважко записати в явному вигляді, причому з умови 3) випливає $P_{00}(\eta,\tau)=0$ і $P^*_{00}(\zeta,\tau)=0$, а отже, легко переконатись, що $z_{10}(\eta,\tau)=z_{01}(\eta,\tau)=0$ і $z^*_{10}(\zeta,\tau)=z^*_{01}(\zeta,\tau)=0$.

З явного вигляду для $P_{ij}(\eta,\tau)$ та $P^*_{ij}(\zeta,\tau)$ видно, що вони є функціями так званого кутового примежового шару.

Для залишкового члена $R(x,t;\varepsilon,\mu)$ методом інтегралів енергії [3] одержано оцінку

$$\| R(x,t;\varepsilon,\mu) \|_{L_2(D)} = O((\varepsilon+\mu)^{3/2}). \qquad (I7)$$

Доведене сформулюємо у вигляді теореми.

Теорема. Припустимо, що в області D виконуються умови I), 2), 3). Тоді розв"язок задачі (I)-(2) допускає асимптотичне зображення виду (3), де $U_{ij}(x,t)$ визначаються з (4); функції звичайного примежового шару $\Pi_{ij}(x,\tau)$, $Q_{ij}(x,\xi)$, $Z_{ij}(\eta,t)$, $Z_{ij}(\zeta,t)$ - відповідно розв"язки задач (5)-(II), (6)-(I2), (7)-(I3), (8)-(I4); функції кутового примежового шару $P_{ij}(\eta,\tau)$, $P^*_{ij}(\zeta,\tau)$ - розв"язки задач (9)-(I5), (I0)-(I6); залишковий член $R(x,t;\varepsilon,\mu)$ допускає оцінку (I7).

Список літератури: I. Бутузов В.Ф. Угловой погранслой в смешанных сингулярно возмущенных задачах для гиперболических уравнений. - Мат. сб., I977, № 3, с. 460-485. 2. Вишик М.И., Люстерник Л.А. Регулярное вырождение и пограничный слой для линейных дифференциальных уравнений с малым параметром. - Усп. мат. наук, I957, № 5, с. 3-I22. 3. Курант Р. Уравнения с частными производными. - М.: Мир, I964. - 830 с. 4. Цымбал В.Н. Угловой пограничный слой в смешанной сингулярно возмущенной задаче для гиперболического уравнения. - В кн.: Асимптотические методы нелинейной механики. К., I98I, с. I48-I52.

Стаття надійшла до редколегії I0.0I.83