УДК 517.946

Г.-В.С.Гупало, Г.П.Лопушанська

ЗАДАЧА ДІРІХЛЕ ДЛЯ НЕОДНОРІДНОГО ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОГО РІВНЯННЯ ДРУГОГО ПОРЯДКУ ЕЛІПТИЧНОГО ТИПУ В ПРОСТОРІ УЗАГАЛЬНЕНИХ ФУНКЦІЙ

Розглянемо задачу Діріхле для диференціального рівняння другого порядку еліптичного типу, коли граничні значення та права частина рівняння – узагальнені функції з певних класів.

I. Нехай Ω – область в R^n, $n\geq 3$, обмежена замкненою $n-1$ – вимірною поверхнею S класу C^∞; $D(\bar\Omega)$, $D(S)$ – простори нескінченно диференційованих (основних) функцій в $\bar\Omega = \Omega \cup S$ і на S відповідно; $D_0(\bar\Omega)$ – простір нескінченно диференційованих функцій в $\bar\Omega$, які дорівнюють нулеві на поверхні S; $D'(\bar\Omega)$, $D'(S)$, $D_0'(\bar\Omega)$ – простори лінійних неперервних функціоналів (узагальнених функцій) відповідно на $D(\bar\Omega)$, $D(S)$, $D_0(\bar\Omega)$; $(\mathcal{F},\psi)$ – дія узагальненої функції $\mathcal{F}\in D'(\bar\Omega)$ $(\mathcal{F}\in D_0'(\bar\Omega))$ на основну функцію $\psi\in D(\bar\Omega)$ $(\psi\in D_0(\bar\Omega))$, $\langle H,\varphi\rangle$ – дія $H\in D'(S)$ на $\varphi\in D(S)$.

2. Постановка задачі. Нехай $\mathcal{F}\in D_0'(\bar\Omega)$, $H\in D'(S)$.
Знайти розв"язок рівняння

$$\mathfrak{M}u \equiv \sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_k} + \sum_{i=1}^{n} b_i(x)\frac{\partial u}{\partial x_i} + c(x)u = \mathcal{F} \tag{1}$$

в області Ω, який задовольняє на поверхні S умову

$$u = H. \tag{2}$$

Вважаємо, що $a_{ik}(x)$, $b_i(x)$, $c(x)\in C^\infty(\Omega)$, $i,k=\overline{1,n}$, $a_{ik}=a_{ki}$, $c(x)\leq 0$ в Ω. У такій постановці задачу Діріхле для рівняння Пуассона розглянуто в [1].

Узагальнену функцію $u \in D'(\bar{\Omega})$ називатимемо розв"язком задачі (I)–(2), якщо

$$(u, \mathcal{M}\psi) = (\mathcal{F}, \psi) - \langle H, Q\psi \rangle, \ \forall \psi \in D_0(\bar{\Omega}). \tag{3}$$

Тут такі самі позначення, як у праці [3], тобто $\mathcal{M}$ – спряжений оператор до оператора $\mathcal{M}: Q \equiv a\frac{d}{d_\nu} + (\beta - b), a = \left[\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{n} a_{ik} n_k\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}$; $b = \sum_{i=1}^{n} e_i n_i, e_i = b_i - \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial a_{ik}}{\partial x_k}$; β – довільна функція з $D(S)$; n_i – напрямні косинуси внутрішньої нормалі n ; $\frac{d}{d_\nu}$ – диференціювання по напрямку конормалі, $\nu_i = \frac{1}{a}\sum_{k=1}^{n} a_{ik} n_k$ – напрямні косинуси конормалі.

Теорема I. Розв"язок задачі (I)–(2) в розумінні (3) єдиний.

Доведення. Дійсно, нехай існують два розв"язки u_1 і u_2 задачі (I)–(2). Тоді для узагальненої функції $u = u_1 - u_2$ з рівності (3) одержуємо

$$(u, \mathcal{M}\psi) = 0, \ \forall \psi \in D_0(\bar{\Omega}). \tag{4}$$

Згідно з працею [3] існує єдиний розв"язок $\psi(x)$ рівняння $\mathcal{M}\psi = \chi$, який задовольняє умову $\psi|_S = 0$, для кожної $\chi \in D(\bar{\Omega})$. Тоді з (4) дістаємо, що $(u, \chi) = 0$, $\forall \chi \in D(\bar{\Omega})$, отже, $u = 0$ в $D'(\bar{\Omega})$.

3. Нехай $H \in D'(S)$. Вважаємо [2], що функція $u(x)$, визначена в області Ω, набуває на S узагальнених граничних значень H, коли

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{S_\varepsilon} u(x_\varepsilon)\varphi(x_\varepsilon)dS_\varepsilon = \langle H, \varphi \rangle, \forall \varphi \in D(S), \tag{5}$$

де S_ε – поверхня в Ω, паралельна до поверхні S ; $\varphi(x_\varepsilon) = \varphi(x); x_\varepsilon \in S_\varepsilon; x \in S;$ $x_\varepsilon = x + \varepsilon\tau(x)$, $\tau(x)$ – орт внутрішньої нормалі до S в точці x.

Теорема 2. Нехай $\mathcal{F} = 0$. Якщо функція $u(x)$ задовольняє рівняння (I) і $u = H$ на поверхні S у розумінні (5), то u є розв"язком задачі (I)–(2) в розумінні (3).

Доведення. Коли $\mathcal{F}=0$ і $u=H$ на поверхні S в розумінні (5), то маємо узагальнену задачу Діріхле для рівняння $\mathfrak{M}u=0$, яка розглянута в праці [2]. Її розв"язок згідно з теоремою I із [2] має вигляд

$$u(x)=2<K,\ Q_y G(x,y)>,\ x\in\Omega, \tag{6}$$

де $<K,g>=<H,\varphi_g>;\ \forall g\in D(S)$; φ_g – розв"язок інтегрального рівняння

$$g(y)=\varphi(y)+2\int_S Q_y G(x,y)\,\varphi(x)\,d_x S,\ y\in S; \tag{7}$$

$G(x,y)$ – головний фундаментальний розв"язок [3] рівняння $\mathfrak{M}u=0$ в R^n.

Для доведення теореми досить показати, що

$$\int_\Omega <2K,Q_y G(x,y)>\mathfrak{N}\psi(x)dx=$$

$$=-<K,Q\psi+2\int_S Q_y G(x,y)Q_x\psi(x)d_x S>,\ \forall\psi\in D_0(\bar\Omega). \tag{8}$$

Справді,

$$\int_\Omega <2K,Q_y G(x,y)>\mathfrak{N}\psi(x)dx=<2K,\int_\Omega Q_y G(x,y)\mathfrak{N}\psi(x)dx>. \tag{9}$$

Розглянемо

$$\int_\Omega G(x,z)\,\mathfrak{N}\psi(x)dx=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\Omega\setminus T_\varepsilon} G(x,z)\,\mathfrak{N}\psi(x)dx,$$

де T_ε – окіл точки z, означений нерівністю $\sum\limits_{r,s=1}^{n} A_{rs}(z)(x_r-z_r)(x_s-z_s)\leq\varepsilon^2$; A_{rs} – відношення алгебраїчного доповнення елемента a_{rs} у визначнику A, складеного з коефіцієнтів a_{rs} рівняння, до самого визначника A. Застосуємо формулу Гріна [3] до області $\Omega\setminus T_\varepsilon$ і перейдемо до границі при $\varepsilon\to 0$. Враховуючи, що $\psi\in D_0(\bar\Omega)$, одержуємо

$$\int_\Omega G(x,z)\,\mathfrak{N}\psi(x)dx=-\int_S G(x,z)\,Q_x\psi(x)d_x S-\psi(z),\ z\in\Omega. \tag{10}$$

Згідно з (I0) і формулою стрибка конормальної похідної потенціалу простого шару [3], маємо

$$\int_{\Omega} Q_y G(x,y) \mathcal{N}\psi(x)dx = -\int_{S} Q_y G(x,y) Q_x \psi(x) d_x S - \frac{1}{2} Q\psi(y). \tag{II}$$

Підставивши (II) в (9), записуємо

$$\int_{\Omega} \langle 2K, Q_y G(x,y) \rangle \mathcal{N}\psi(x)dx =$$

$$= -\langle K, Q\psi + 2\int_{S} Q_y G(x,y) Q_x \psi(x) d_x S \rangle, \ \forall \psi \in D_0(\bar{\Omega}).$$

Отже, теорема доведена.

4. Нехай $\Gamma(x,y)$ – функція Гріна задачі Діріхле для області Ω. Справедлива теорема, яка дає представлення розв"язку задачі (I)-(2).

<u>Теорема 3</u>. Узагальнена функція u, визначена рівністю

$$(u,\psi) = (\mathcal{F}, \int_{\Omega} \Gamma(x,y)\psi(x)dx) + \langle H, Q_y \int_{\Omega} \Gamma(x,y)\psi(x)dx \rangle, \forall \psi \in D(\bar{\Omega}), \tag{I2}$$

є розв"язком задачі (I)-(2) в розумінні (3).

<u>Доведення</u>. Використовуючи основні властивості функції Гріна, переконуємось, що рівність (I2) визначає однозначно узагальнену функцію $u \in D'(\bar{\Omega})$.

Залишилось показати справедливість рівності (3), тобто

$$(\mathcal{F}, \int_{\Omega} \Gamma(x,y) \mathcal{N}\psi(x)dx) + \langle H, Q_y \int_{\Omega} \Gamma(x,y) \mathcal{N}\psi(x)dx \rangle =$$

$$= (\mathcal{F}, \psi) - \langle H, Q\psi \rangle, \ \forall \psi \in D_0(\bar{\Omega}). \tag{I3}$$

Згідно з формулою Стокса [3]

$$\int_{\Omega} \Gamma(x,y) \mathcal{N}\psi(x)dx = \psi(y), \quad y \in \bar{\Omega}, \tag{I4}$$

$$Q_y \int_{\Omega} \Gamma(x,y) \mathcal{N}\psi(x)dx = -Q\psi(y), \quad y \in S. \tag{I5}$$

З (I4) і (I5) випливає справедливість рівності (I3). Теорема доведена.

Список літератури: I. Гупало Г.-В.С. Задача Діріхле для рівняння Пуассона. - Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат., 1976, вип. II, с. 2I-25. 2. Гупало Г.С. Про узагальнену задачу Діріхле для диференціального рівняння 2-го порядку еліптичного типу. - Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат., 1969, вип. 4, с. 59-6I. 3. Миранда К. Уравнения с частными производными эллиптического типа. М.: Изд-во иностр. лит., 1957. - 230 с.

Стаття надійшла до редколегії 20.02.84

УДК 5I7.946

Г.-В.С.Гупало, Г.П.Лопушанська

УЗАГАЛЬНЕНА ЗАДАЧА НЕЙМАНА ДЛЯ НЕОДНОРІДНОГО ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОГО РІВНЯННЯ ДРУГОГО ПОРЯДКУ ЕЛІПТИЧНОГО ТИПУ

Розглянемо задачу Неймана для неоднорідного диференціального рівняння другого порядку еліптичного типу, коли права частина граничної умови та вільний член рівняння - узагальнені функції з певних класів.

Нехай Ω - область в R^n, $n \geq 3$ обмежена замкненою $n-1$ - вимірною поверхнею S класу C^∞. В Ω розглядаємо еліптичне диференціальне рівняння другого порядку з нескінченно диференційованими коефіцієнтами

$$\mathfrak{M}u \equiv \sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_k} + \sum_{i=1}^{n} b_i(x)\frac{\partial u}{\partial x_i} + c(x)u = \mathcal{F}, \tag{I}$$

крім того, вважаємо, що $c(x) \leq 0$, $a_{ik} = a_{ki}$.

Через $D(\bar{\Omega})$, $D(S)$ позначимо простори нескінченно диференційованих функцій в $\bar{\Omega} = \Omega \cup S$ і на S відповідно;