З (I4) і (I5) випливає справедливість рівності (I3). Теорема доведена.

Список літератури: I. Гупало Г.-В.С. Задача Діріхле для рівняння Пуассона. - Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат., 1976, вип. II, с. 2I-25. 2. Гупало Г.С. Про узагальнену задачу Діріхле для диференціального рівняння 2-го порядку еліптичного типу. - Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат., 1969, вип. 4, с. 59-6I. 3. Миранда К. Уравнения с частными производными эллиптического типа. М.: Изд-во иностр. лит., 1957. - 230 с.

Стаття надійшла до редколегії 20.02.84

УДК 5I7.946

Г.-В.С.Гупало, Г.П.Лопушанська

УЗАГАЛЬНЕНА ЗАДАЧА НЕЙМАНА ДЛЯ НЕОДНОРІДНОГО ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОГО РІВНЯННЯ ДРУГОГО ПОРЯДКУ ЕЛІПТИЧНОГО ТИПУ

Розглянемо задачу Неймана для неоднорідного диференціального рівняння другого порядку еліптичного типу, коли права частина граничної умови та вільний член рівняння - узагальнені функції з певних класів.

Нехай Ω - область в R^n, $n \geq 3$ обмежена замкненою $n-1$ - вимірною поверхнею S класу C^∞. В Ω розглядаємо еліптичне диференціальне рівняння другого порядку з нескінченно диференційованими коефіцієнтами

$$\mathcal{M}u \equiv \sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_k} + \sum_{i=1}^{n} b_i(x)\frac{\partial u}{\partial x_i} + c(x)u = \mathcal{F}, \qquad (I)$$

крім того, вважаємо, що $c(x) \leq 0$, $a_{ik} = a_{ki}$.

Через $D(\Omega)$, $D(S)$ позначимо простори нескінченно диференційованих функцій в $\bar{\Omega} = \Omega \cup S$ і на S відповідно;

$\mathcal{D}_N(\bar{\Omega})=\{\psi\in \mathcal{D}(\bar{\Omega}): Q\psi|_S=0\}$, де $Q=\alpha\frac{d}{d\nu}+(\beta-b)$ [3];

$\mathcal{D}'(\bar{\Omega})$, $\mathcal{D}'_N(\bar{\Omega})$, $\mathcal{D}'(S)$ - простори лінійних неперервних функціоналів (узагальнених функцій) відповідно на $\mathcal{D}(\bar{\Omega})$, $\mathcal{D}_N(\bar{\Omega})$, $\mathcal{D}(S)$, $(\mathcal{F},\psi)$ - дія узагальненої функції $\mathcal{F}\in\mathcal{D}'(\bar{\Omega})$ $(\mathcal{F}\in\mathcal{D}'_N(\bar{\Omega}))$ на основну функцію $\psi\in\mathcal{D}(\bar{\Omega})$ $(\psi\in\mathcal{D}_N(\bar{\Omega}))$, $\langle B,\varphi\rangle$ - дія $B\in\mathcal{D}'(S)$ на $\varphi\in\mathcal{D}(S)$.

Постановка задачі. Нехай $\mathcal{F}\in\mathcal{D}'_N(\bar{\Omega})$, $B\in\mathcal{D}'(S)$. Знайти розв"язок рівняння (I) в області Ω, який задовольняє на поверхні S умову

$$Pu=B, \qquad (2)$$

де $P\equiv\alpha\frac{d}{d\nu}+\beta$ [3]; $\alpha,\beta\in\mathcal{D}(S)$ і $\alpha\neq0$; $\beta\neq0$ на поверхні S.

Узагальнену функцію $u\in\mathcal{D}'(\bar{\Omega})$ називаємо розв"язком задачі (I)-(2), якщо

$$(u,\mathcal{N}\psi)=(F,\psi)+\langle B,\psi\rangle,\ \forall\psi\in\mathcal{D}_N(\bar{\Omega}). \qquad (3)$$

Позначення операторів $\mathcal{N}$, P, Q ті ж, що й в працях [2, 3].

Теорема I. Розв"язок задачі (I)-(2) у розумінні (3) єдиний.

Доведення. Нехай u_1 і u_2 - два розв"язки задачі (I)-(2). Тоді для узагальненої функції $u=u_1-u_2$ з (3) одержуємо, що

$$(u,\mathcal{N}\psi)=0,\ \forall\psi\in\mathcal{D}_N(\bar{\Omega}). \qquad (4)$$

Звідси, використовуючи відповідні теореми з праці [3], міркуваннями, як і в праці [2] отримуємо, що $u=0$ в $\mathcal{D}'(\bar{\Omega})$, тобто $u_1=u_2$.

Теорема 2. Якщо $\mathcal{F}=0$, $B\in\mathcal{D}'(S)$, $u(x)$ - розв"язок в області Ω однорідного рівняння $\mathcal{M}u=0$, який задовольняє граничну умову

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{S_\varepsilon} Pu(x_\varepsilon)\psi(x_\varepsilon)dS_\varepsilon = \langle B,\psi\rangle,\ \forall\psi\in D(S) \tag{5}$$

(S_ε – паралельна до S поверхня, $x_\varepsilon = x+\varepsilon\tau(x)$, $x\in S$, $x_\varepsilon\in S_\varepsilon$, $\psi(x_\varepsilon)=\psi(x)$[2]), то функція $u(x)$ є розв"язком задачі Неймана для цього однорідного рівняння у розумінні (3).

<u>Доведення</u>. Розв"язок $u(x)$ однорідного рівняння $\mathcal{M}u=0$ в області Ω, який задовольняє умову (5), згідно з працею [I] існує для кожної $B\in D'(S)$ єдиний і має вигляд

$$u(x)=\langle 2C, G(x,y)\rangle,\ \ x\in\Omega, \tag{6}$$

де $G(x,y)$ – головний фундаментальний розв"язок [3] рівняння $\mathcal{M}u=0$ в R^n, $\langle C,g\rangle=\langle B,\psi_g\rangle$, $\forall g\in D(S)$; ψ_g – розв"язок інтегрального рівняння $g(y)=-\psi(y)+2\int_S P_x G(x,y)\psi(x)d_xS$.

Для доведення теореми досить показати, що

$$\int_\Omega \langle 2C, G(x,y)\rangle \mathcal{N}\psi(x)dx = \langle C, -\psi(y)+2\int_S P_x G(x,y)\psi(x)d_xS\rangle,\ \forall\psi\in D(\bar\Omega). \tag{7}$$

Справді

$$\int_\Omega \langle 2C, G(x,y)\rangle \mathcal{N}\psi(x)dx = \langle 2C, \int_\Omega G(x,y)\mathcal{N}\psi(x)dx\rangle. \tag{8}$$

Аналогічними міркуваннями показуємо [2], що

$$\int_\Omega G(x,z)\mathcal{N}\psi(x)dx = \int_S \psi(x)P_x G(x,z)d_xS-\psi(z),\ z\in\Omega. \tag{9}$$

Згідно з (9) і формулою стрибка для потенціалу подвійного шару [3] маємо

$$\int_\Omega G(x,y)\mathcal{N}\psi(x)dx = \int_S \psi(x)P_x G(x,y)d_xS-\frac{\psi(y)}{2},\ y\in S. \tag{I0}$$

Підставивши (I0) в (8), остаточно одержуємо

$$\int_\Omega \langle 2C, G(x,y)\rangle \mathcal{N}\psi(x)dx = \langle C, -\psi(y)+2\int_S P_x G(x,y)\psi(x)d_xS\rangle$$

Нехай $\Gamma(x,y)$ – функція Гріна задачі Неймана [3]. Означимо узагальнені функції $U_{\mathcal{F}}$, U_{B} рівностями

$$(U_{\mathcal{F}},\psi)=(\mathcal{F},\int_{\Omega}\Gamma(x,y)\psi(x)dx),\ \forall\psi\in\mathcal{D}(\bar{\Omega}), \tag{11}$$

$$(U_{B},\psi)=-\langle B,\int_{\Omega}\Gamma(x,y)\psi(x)dx\rangle,\ \forall\psi\in\mathcal{D}(\bar{\Omega}). \tag{12}$$

Справедлива теорема, яка дає представлення розв"язку задачі (1)-(2).

<u>Теорема 3</u>. Узагальнена функція

$$U=U_{\mathcal{F}}+U_{B} \tag{13}$$

є розв"язком задачі (1)-(2) в розумінні (3).

<u>Доведення</u>. Згідно з властивостями функції Гріна [3], легко переконатися, що узагальнені функції $U_{\mathcal{F}}$ і $U_{B}\in\mathcal{D}'(\bar{\Omega})$ формулами (11) і (12) визначаються однозначно. Залишається показати справедливість рівності (3), тобто

$$(U_{\mathcal{F}}+U_{B},\mathcal{N}\psi)=(\mathcal{F},\psi)+\langle B,\psi\rangle,\ \forall\psi\in\mathcal{D}_{N}(\bar{\Omega}). \tag{14}$$

Дійсно, згідно з (11), (12) і формулою Стокса [3] записуємо

$$(U_{\mathcal{F}},\mathcal{N}\psi)=(\mathcal{F},\psi),\ \forall\psi\in\mathcal{D}_{N}(\bar{\Omega}), \tag{15}$$

$$(U_{B},\mathcal{N}\psi)=\langle B,\psi\rangle,\ \forall\psi\in\mathcal{D}_{N}(\bar{\Omega}). \tag{16}$$

Підставивши (15) і (16) в (14), переконуємось, що теорема доведена.

<u>Список літератури</u>: 1. Гупало Г.С. Про узагальнену задачу Неймана для диференціального рівняння 2-го порядку еліптичного типу. - Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат., 1969, вип. 4, с. 57-58. 2. Гупало Г.-В.С., Лопушанська Г.П. Задача Діріхле для неоднорідного диференціального рівняння другого порядку еліптичного типу в просторі узагальнених функцій. - У цьому ж збірнику, с. 16-20. 3. Миранда К. Уравнения с частными производными эллиптического типа. - М.: Изд-во иностр. лит., 1957. - 250 с.

Стаття надійшла до редколегії 20.02.84