УДК 517.946

В.М.Кирилич

МНОГОФАЗНА ЗАДАЧА ТИПУ СТЕФАНА ДЛЯ ГІПЕРБОЛІЧНОЇ СИСТЕМИ ПЕРШОГО ПОРЯДКУ

У верхній півплощині $t>0$ розглянемо систему

$$\frac{\partial u_i}{\partial t}+\lambda_i(x,t)\frac{\partial u_i}{\partial x}=F_i(x,t,u),\ i=\overline{1,n} \qquad (1)$$

Нехай γ_0 і γ_{m+1} - гладкі криві задані відповідно рівняннями $x=\varphi_0(t)$ і $x=\varphi_{m+1}(t)$ $(\varphi_0(0)=0,\ \varphi_0(t)<\varphi_{m+1}(t)$ $\forall t>0)$, $m\geq 0$, $T>0$ - задане число. Криві γ_i: $x=\varphi_i(t)(\varphi_i(0)=0, \varphi_i(t)<\varphi_{i+1}(t)\ \forall t>0$ розділяють область $G=\{(x,t)\in\mathbb{R}^2,\ \varphi_0(t)<x<\varphi_{m+1}(t), 0<t\leq T\}$ на $m+1$ компонент зв"язності G_j.

В (1) λ_i і F_i - задані функції відповідно в $\bar G$ і $\bar G\times\mathbb{R}^n$, $u=(u_1(x,t),\dots,\ u_n(x,t))$. Припускаємо, що $\lambda_i(x,t)\in C(\bar G)$, $F_i(x,t,u)$ - неперервна по всіх змінних в $\bar G\times\mathbb{R}^n$, неперервно диференційована по x, u і похідні по u рівномірно обмежені, $\varphi_i(t)\in C^1[0,T]$. Нехай також при всіх $t\geq 0$ і при кожному $\rho=\overline{0,m}$ перші d_ρ штук серед величин $\lambda_i^\rho(\varphi_\rho(t),t)-\varphi_\rho'(t)$ - додатні, решта - від"ємні; при $\rho=\overline{1,m+1}$ вважаються виконаними аналогічні припущення відносно величин $\lambda_i^{\rho-1}(\varphi_\rho(t),t)-\varphi_\rho'(t)$.

Введемо позначення $N=(m+1)n, d=\max\limits_\rho d_\rho, 0<d<n$.

Не обмежуючи загальності, вважаємо, що $\lambda_d(\varphi_{m+1}(t),t)\equiv 1$, $\lambda_{d+1}(\varphi_0(t),t)\equiv -1$. Цього завжди можна досягти відповідною заміною змінних [4].

Ставиться задача в області G_j, треба знайти розв"язки $u_1^j(x,t),\dots,u_n^j(x,t), j=\overline{0,m}$ системи (1) і функції $\varphi_0(t),\dots,\varphi_{m+1}(t)$, $m\geq 0$ на інтервалі $]0,T]$ так, щоб задовольнялись умови

$$\sum_{j=0}^{m}\sum_{i=1}^{n}\Big[\sum_{k=j}^{j+1}\alpha_{ij}^{kr}(t,\varphi(t))u_i^j(\varphi_k(t),t)+$$
$$+\int_{\varphi_j(t)}^{\varphi_{j+1}(t)}\beta_{ij}^{r}(y,t)u_i^j(y,t)dy\Big]=h^r(t,\varphi(t)),$$
$$0\le t\le T,\quad r=\overline{1,N}, \tag{2}$$

$$\varphi_i'(t)=g_i(t,\varphi(t),u(\varphi(t),t)),\ i=\overline{0,m+1},\quad m\ge 0, \tag{3}$$
$$0\le t\le T,$$
$$|\varphi'(t)|<1,\quad t\in[0,T], \tag{4}$$

де $\varphi(t)=(\varphi_0(t),\dots,\varphi_{m+1}(t)),\ u(x,t)=(u_1^j(x,t),\dots,u_n^j(x,t))$.
Ця задача є деяким варіантом многофазної двосторонньої задачі типу Стефана для системи (I) у випадку виродження лінії задавання початкових умов. Такого типу задачі для гіперболічних рівнянь вивчались у працях [I – 8] .

Припускаємо, що виконані такі умови: $\alpha_{ij}^{kr}(t,\varphi(t))$, $h^r(t,\varphi(t))\in C([0,T]\times\mathbb{R}^{m+1})$, $\beta_{ij}^{r}(y,t)\in C(\bar{G})$.

Функції g_i , визначені та неперервні по всіх аргументах в $G_T=[0,T]\times[-T,T]\times[-1,1]\times\mathbb{R}^{m(1+n)+1}$ мають неперервні обмежені похідні по $\varphi(t)$ і $u(x,t)$ і, крім того,
$$\sup_{G_T}|g_i(t,y,z)|<1,\quad i=\overline{0,m+1}. \tag{5}$$
Введемо матриці
$$\alpha_j^{l}(t,\varphi(t))=\|\alpha_{ij}^{lr}(t,\varphi(t))\|,\ i=\overline{1,d},\quad r=\overline{1,N},$$

$$\alpha_j^2(t,\varphi(t)) = \| \alpha_{ij}^{j+1,2}(t,\varphi(t)) \|, \quad i = \overline{d+1, n}, \quad z = \overline{1,N}$$

$$A(t,\varphi(t)) = \| \alpha_0^1(t,\varphi(t)) \ldots \alpha_m^1(t,\varphi(t)) \alpha_0^2(t,\varphi(t)) \ldots \alpha_m^2(t,\varphi(t)) \|,$$

$$B(t,\varphi(t)) = (-1) \| \alpha_0^2(t,\varphi(t)) \ldots \alpha_m^2(t,\varphi(t)) \alpha_0^1(t,\varphi(t)) \ldots \alpha_m^1(t,\varphi(t)) \|.$$

Припускаємо, що

$$\det A(0,0) \neq 0, \tag{6}$$

$$| A^{-1}(0,0) B(0,0) | < 1 \tag{7}$$

(через $|\cdot|$ позначена одна із евклідових норм матриці).

<u>Теорема</u>. При виконанні всіх вказаних вище припущеннях існує таке $\bar{t} \in]0,T]$, яке не залежить від шуканого розв"язку, що задача (I)–(4) має єдиний узагальнений розв"язок класу $u_i^j(x,t) \in C[G(\bar{t})]$, $\varphi_i(t) \in C^1[0,\bar{t}]$.

Доведення теореми проводиться за наступною схемою. Нехай $D_\varphi^1([0,T])$ – клас довільно фіксованих допустимих функцій $\varphi(t) = (\varphi_0(t), \ldots, \varphi_{m+1}(t))$, тобто функцій, які мають на $[0,T]$ неперервні перші похідні, задовольняють умови $\varphi_i(0) = 0$, $\varphi_i(t) < \varphi_{i+1}(t)$ для всіх $t \in]0,T]$ і зв"язані з $\lambda_i^s(x,t)$ названим вище способом. Тоді в UG_j маємо задачу, яку можна розв"язати методом з праці [3] при $N = g$.

Цей розв"язок є деяким інтегрофункціональним оператором, визначеним на множині допустимих функцій $D_\varphi^1([0,T])$:

$$u_i^j(x,t) = U_i^j(x,t,\varphi_0(t),\dots,\varphi_{m+1}(t)),$$

$$j=\overline{0,m},\ i=\overline{1,n},\ \varphi\in D_\varphi^1([0,T]). \tag{8}$$

Для цього розв"язку справедлива оцінка [I]

$$|u_i^j(\varphi(t)t)| \leq Ce^{\alpha t},\ i=\overline{1,n},\ j=\overline{0,m},\ \varphi(t)\in D_\varphi^1([0,T]), \tag{9}$$

де C і α – додатні константи, які не залежать від $u_i^j(x,t)$, $\varphi(t)$.

Умови (3) з врахуванням оцінок (9) дають змогу знайти значення $t=t_0$, при якому виконуються умови (4) з $T=t_0$.

Підставляючи (8) у (3) та інтегруючи по t від 0 до t, одержуємо для визначення $\varphi_0(t),\dots,\varphi_{m+1}(t)$ систему інтегрофункціональних рівнянь Вольтерра

$$\varphi_i(t) = \int_0^t g_i(\tau,\varphi(\tau),U_i^j(\varphi(\tau),\tau,\varphi(\tau)))d\tau, \tag{10}$$

$$i=\overline{0,m+1},\ j=\overline{0,m},\ m\geq 0.$$

Розв"язок системи (10) шукають методом ітерацій для значень t, не більших деякого $t_1>0$. На цьому доведення теореми закінчується, і $\bar{t} = \min(t_0,t_1)$. У випадку лінійності функцій $\varphi_i(t)$ і якщо $\det A(t,\varphi(t))\neq 0$, то теорема має глобальний характер.

Список літератури: I. Мельник З.О. Задача с неизвестными границами для гиперболической системы первого порядка. - В кн.: Уравнения в частных производных и задачи со свободной границей. К.: Наук. думка, 1983, с. 77-79. 2. Мельник З.О. Смешанная задача с неизвестной границей для общего двумерного гиперболического уравнения второго порядка. - Докл. АН УССР. Сер. А, 1983, № 8, с. 13-15. 3. Мельник З.О., Кирилич В.М. Задача без начальных условий с интегральными ограничениями для гиперболических уравнений и систем на прямой. - Укр. мат. журн., 1983, т. 35, № 6, с. 771-776. 4. Мельник Т.Е. Задача типа Стефана для гиперболической системы первого порядка. – Укр. мат. журн., 1982, т. 34, № 3, с. 380-384. 5. Мельник Т.Е. Двухфазная задача типа Стефана для общего двухмерного гиперболического уравнения второго порядка. – В кн.: Уравнения в частных производных и задачи со свободной границей. К.: Наук. думка, 1983, с. 79-82. 6. Мельник Т.Е. Сопряжение решений гиперболического уравнения второго порядка вдоль неизвестной границы. – Докл. АН УССР. Сер. А, 1980, № 12, с. 10-12. 7. Rubinstein L. Application of the integral equations to the solutions of several Stefan problems.- Free Boundary Probl. Proc. Semin. Pavia, 1979,N1, p.383-450. 8. Lee Da-tsin, Yu Wen-tsu. Boundary value problems for the first order quasi-linear hyperbolic systems and their applications.- J. Differ. Equat., 1981,v.41, N1, p.1-26.

Стаття надійшла до редколегії 20.02.84