УДК 517.946

І.Б.Киричинська, В.М.Кирилич

НЕЛОКАЛЬНА ЗАДАЧА ДЛЯ НАВАНТАЖЕНОЇ ГІПЕРБОЛІЧНОЇ СИСТЕМИ РІВНЯНЬ ПЕРШОГО ПОРЯДКУ НА ПРЯМІЙ

Розглянемо змішану задачу для навантаженої гіперболічної системи рівнянь першого порядку з нелокальними граничними умовами. У праці [5] показано, що задачі з нелокальними (інтегральними) умовами певною невиродженою заміною можна звести до навантажених рівнянь. Нелокальні задачі для рівнянь гіперболічного типу вивчені у працях [2 – 5] .

Нехай в області $G=\{(x,t),\ 0<x<l,\ 0<t\le T,\ T>0\}$ розглядається навантажена гіперболічна система першого порядку

$$(D_t+\lambda_i(x,t)D_x)u_i=\int_0^l\sum_{j=1}^n a_{ij}(x,t,\xi)u_j(\xi,t)d\xi+f_i(x,t,u),\quad i=\overline{1,n}, \tag{1}$$

де $\lambda_i,\ a_{ij}:\ \bar G\to\mathbb{R},\ f:\ \bar G\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ – задані неперервні функції; f_i – лінійна відносно $u=(u_1(x,t),\dots,u_n(x,t))$; функції $\lambda_i\ (x,t)$ перенумеровані таким чином, що

$$\lambda_1(x,t)\le\dots\le\lambda_k(x,t)<0<\lambda_{k+1}(x,t)\le\dots\le\lambda_n(x,t).$$

В області G треба знайти функції $u_1(x,t),\dots,u_n(x,t)$, які задовольняють початкові

$$u_i(x,0)=g_i(x),\quad 0\le x\le l,\quad i=\overline{1,n} \tag{2}$$

і граничні умови

$$\sum_{p=1}^{2}\sum_{j=1}^{n}\alpha_{ij}^{p-1}(t)u_j(p-1,t)=h_i(t),\ 0\le t\le T,\quad i=\overline{1,n}, \tag{3}$$

де $g_i:[0,l]\to\mathbb{R},\ \alpha_{ij}^{p-1},\ h_i:[0,T]\to\mathbb{R}$ – задані неперервно диференційовані функції.

Припускаємо додатково, що виконується умова

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11}^{0}(t)\dots\alpha_{1k}^{0}(t)\alpha_{1,k+1}^{1}(t)\dots\alpha_{1n}^{1}(t) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \alpha_{n1}^{0}(t)\dots\alpha_{nk}^{0}(t)\alpha_{n,k+1}^{1}(t)\dots\alpha_{nn}^{1}(t) \end{vmatrix} \neq 0 \tag{4}$$

для всіх $t \in [0,T]$ і умови узгодження системи (I), початкових умов (2) і умов (3):

$$\sum_{\rho=1}^{2}\sum_{j=1}^{n}\alpha_{ij}^{\rho-1}(0)g_j(\rho-1)=h_i(0),\ i=\overline{1,n}, \tag{5}$$

$$\sum_{\rho=1}^{2}\sum_{j=1}^{n}\alpha_{ij}^{\rho-1}(0)\ g_j(\rho-1)+$$

$$+\sum_{\rho=1}^{2}\sum_{j=1}^{n}\alpha_{ij}^{\rho-1}(0)\Big[\lambda_j(\rho-1,0)g_j'(\rho-1)+ \tag{6}$$

$$+\int_0^t\sum_{m=1}^{n}a_{jm}(\rho-1,0,\xi)\,g_m(\xi)d\xi+f_i(\rho-1,0,g(\rho-1))\Big]=h_i'(0),$$

$$(i=\overline{1,n}).$$

Умова (4) - це аналог умови Лопатинського для випадку класичних граничних задач.

Мають місце такі теореми.

<u>Теорема I</u>. Нехай I) функції $\lambda_i(x,t),\ a_{ij}(x,t,\xi)\in C(\bar{G})$, $f_i(x,t,u)\in C(\bar{G}\times\mathbb{R}^n)$; 2) функції $g_i(x)\in C[0,\ell]$, $\alpha_{ij}^{\rho-1}(t),\ h_i(t)\in C[0,T]$; 3) виконуються умови (4) і умова (5).

Тоді задача (I)-(3) має в $\bar{G}$ єдиний узагальнений неперервний розв"язок у значенні [2, 3] .

Теорема 2. Нехай виконані умови теореми I і, крім того:

I) функції $\lambda_i(x,t) \in C^1(G), a'_{ijx} \in C(\bar{G}), f'_{ix} \in (\bar{G} \times \mathbb{R}^n)$;

2) функції $h_i(t), \alpha_{ij}^{p-1}(t) \in C^1[0,T], g_i(x) \in C^1[0,l]$;

3) виконуються умови узгодженості (6).

Тоді задача (I)-(3) має в $\bar{G}$ єдиний класичний розв"язок.

Доведення теорем I, 2 проводиться за допомогою комбінації методу характеристик [I] і методики з праць [2 - 5], що дає змогу звести задачу (I)-(3) до системи лінійних інтегральних рівнянь типу Вольтерра другого роду, яка розв"язується послідовними наближеннями.

Зауваження. Якщо в (I) функції $f_i(x, t, u)$ - нелінійні відносно u, то для такого випадку при умовах

I) $|f_i(x,t,u)| < \alpha(t)|u|$, $\alpha(t)$ - не обов"язково обмежена функція;

2) $\forall T>0, \ \forall U>0, \ x \in [0,1], \ t \in [0,T], \ |u^1|, |u^2| \in U, \exists L:$

$$|f_i(x,t,u^1) - f_i(x,t,u^2)| \leq L\,|u^1 - u^2|$$

наявні локальні теореми коректної розв"язності, аналогічні теоремам I, 2.

Список літератури: I. Аболиня В.Э., Мышкис А.Д. О смешанной задаче для линейной гиперболической системы на плоскости. - Уч. зап. Латв. ун-та, 1958, 20, вып. 3, с. 87-104. 2. Кирилич В.М. Задача с неразделенными граничными условиями для гиперболической системы первого порядка на прямой. - Вестн. Львов. ун-та. Сер. мех.-мат., 1984, вып. 22, с. 90-94. 3. Мельник З.О., Кирилич В.М. Задача без начальных условий с интегральными ограничениями для гиперболических уравнений и систем на прямой. - Укр. мат. журн., 1983, т. 35, № 6, с. 771-776. 4. Мельник З.О. Задача с интегральными ограничениями для гиперболического уравнения второго порядка. - В кн.: Общая теория граничных задач. К.: Наук. думка, 1983, с. 281-282. 5. Нахушев А.М. Нагруженные уравнения и их приложения. - Дифференциальные уравнения, 1983, т. 19, № I, с. 86-94.

Стаття надійшла до редколегії 20.02.84