УДК 517.5

М.М.Шеремета

АНАЛОГИ ТЕОРЕМИ БОРЕЛЯ ДЛЯ АНАЛІТИЧНИХ ФУНКЦІЙ

Якщо ціла функція має скінченний порядок, то за класичною теоремою Бореля логарифми її максимуму модуля і максимального члена еквівалентні. Вкажемо аналоги цієї теореми для функцій, які аналітичні в областях, відмінних від $\mathbb{C}$.

Нехай F – аналітична у півплощині $\{s: \operatorname{Re} s<0\}$ функція, задана абсолютно збіжним у цій півплощині рядом $F(s)= \sum_{n=0}^{\infty} a_n \exp\{s\lambda_n\}$, $0=\lambda_0<\lambda_1<\lambda_n\uparrow\infty$ $(n\to\infty)$. Приймемо $M(\sigma,F)=\sup\{|F(\sigma+it)|: t\in R\}$, $\mu(\sigma,F)=\max\{|a_n|\exp(\sigma\lambda_n): n\geq 0\}$, $\sigma<0$. Через $n(t)$ позначимо лічильну функцію послідовності (λ_n).

Теорема 1. Нехай Φ – додатна неперервна зростаюча до ∞ на $[0,\infty)$ функція, φ – функція, обернена до Φ, а L – додатна неперервна зростаюча до ∞ на $[0,\infty)$ функція така, що $\lim\limits_{x\to\infty} L(\lambda x)/L(x)=c(\lambda)<\infty$ для кожного $\lambda\in(0,\infty)$. Тоді, коли

$$\varlimsup_{\sigma\to 0}\frac{\ln M(\sigma,F)}{|\sigma|\Phi(1/|\sigma|)}=A<\infty,\quad \lim_{\sigma\to 0}\frac{\ln M(\sigma,F)}{|\sigma|L(1/|\sigma|)}=\infty,$$

$$\varlimsup_{t\to\infty}\frac{\varphi(t)\ln n(t)}{L(\varphi(t))}=\gamma<\infty,$$

то $\ln M(\sigma,F)\sim\ln\mu(\sigma,F)$ при $\sigma\to 0$.

Наслідок 1. Якщо $\ln\ln M(\sigma,F)=O(\ln(1/|\sigma|))$ і $\ln(1/|\sigma|)=O(\ln M(\sigma,F))$ при $\sigma\to 0$, а $\ln n(t)=O(\ln t)$ при $t\to\infty$, то $\ln M(\sigma,F)\sim\ln\mu(\sigma,F)$ при $\sigma\to 0$.

Нехай $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ – аналітична в крузі $\{z: |z|<1\}$ функція, $M(r,f)=\max\{|f(z)|: |z|=r\}$, $\mu(r,f)=\max\{|a_n|r^n: n\geq 0\}$, $r<1$. Порядком ρ і нижнім логарифмічним порядком λ функції f називаються величини

$$\rho = \overline{\lim_{r\to 1}} \frac{\ln^+ \ln M(r,f)}{-\ln(1-r)}, \quad \lambda = \underline{\lim_{r\to 1}} \frac{\ln^+ M(r,f)}{-\ln(1-r)}.$$

З наслідку I неважко одержати таку теорему.

Теорема 2*. Якщо $\rho < \infty$ і $\lambda = \infty$, то $\ln M(r,f) \sim \ln \mu(r,f)$ $(r \to 1)$.

Умова $\lambda = \infty$ в теоремі 2 істотна, на що вказує наступний приклад. Нехай $\omega(x) = \frac{1}{2}\{1 + \ln_3 x + (1 - \ln_3 x)\sin(\ln_3 x)\}$ при $x \geq \exp_3 1$ і $\omega(x) \equiv 1$ при $0 \leq x \leq \exp_3 1$, а $f_0(z) = \sum_{n=0}^{\infty} n^{\omega(n)} z^n$. Можна показати, що f_0 має порядок $\rho = 0$, нижній логарифмічний порядок $\lambda = 2$ і, незважаючи на те, що $\overline{\lim_{r\to 1}} \frac{\ln^+ M(r,f_0)}{\ln \mu(r,f_0)} \geq \infty$, для функції f_0 має місце нерівність $\underline{\lim_{r\to 1}} \frac{\ln M(r,f_0)}{-\ln(1-r)} = \infty$, тобто співвідношення $\ln M(r,f_0) \sim \ln \mu(r,f_0)$ не виконується навіть на будь-якій послідовності (r_k), яка прямує до I.

Стаття надійшла до редколегії 02.01.84

---

* Shankar H. The maximum term and maximum modulus of an analytic function.- Glas. mat., 1978, vol.13, №2, p.271-275.