УДК 517.53

М.В.Заболоцький

ПРО РЕГУЛЯРНІСТЬ РОСТУ НЕВАНЛІННІВСЬКИХ ХАРАКТЕРИСТИК СУБГАРМОНІЧНИХ ФУНКЦІЙ

А.Бернштейн [5] і А.А.Гольдберг [1] незалежно один від одного довели таку теорему.

Теорема. Нехай f – ціла функція порядку $\rho \le 0,5$, $\rho(r)$ – її уточнений порядок, $V(r) = r^{\rho(r)}$. Тоді границі $\lim\limits_{r\to\infty} N(r,f^{-1})/V(r)$ та $\lim\limits_{r\to\infty} T(r,f)/V(r)$ існують чи не існують одночасно, а при існуванні рівні.

Добре видно, що теорема справедлива для субгармонічних в $\mathbb{R}^2$ функцій порядку $\rho \le 0,5$. У праці [3] доведено справедливість теореми для субгармонічних в $\mathbb{R}^m$, $m \ge 2$ функцій нульового уточненого порядку. Для субгармонічних в $\mathbb{R}^m$, $m \ge 3$ функцій додатного порядку теорема неправильна.

Побудуємо функцію порядку $0 < \rho < 1$, субгармонічну в $\mathbb{R}^4$, для якої сформульований вище результат неправильний. Те, що ми обмежуємося випадком $m = 4$, пояснюється чисто технічними міркуваннями.

Нехай $0 < \rho < 1$, $|x| = r$, $\rho_1(r)$ та $\rho_2(r)$ – уточнені порядки такі, що $V_1(r) = r^{\rho_1(r)} = r^{\rho}(2 - \cos^2 \ln \ln^2 r)$, $V_2(r) = r^{\rho_2(r)} = r^{\rho}(1 - \sin^2 \ln\ln r + 1/\ln\ln r)$, $r > 1$.

Маємо $V_1(r) + V_2(r) \sim 2r^{\rho}$, $V_1(r_n) = 2r_n^{\rho}$, $V_1(s_n) \sim s_n^{\rho}$, $V_1(s_n) \sim V_2(s_n)$, $n \to \infty$, де $r_n = \exp\exp(\pi/2 + n\pi)$, $s_n = \exp\exp(\pi n)$.

Нехай $u(x) = u_1(x) + u_2(x)$, $x_1 = r\cos\theta$, де u_1, u_2 – субгармонічні в $\mathbb{R}^4$ функції, гармонічні всюди за винятком відповідно від'ємної та додатної півосей OX_1, $u_i(0) = 0$, $i = 1,2$, $N(r,u_1) = V_1(r)$, $N(r,u_2) = V_2(r)$, $r \ge r_0$.

Отже, $N(r,u) \sim 2r^{\rho}$, $r \to \infty$.

Позначимо $k_1 = \pi\rho(\rho+2)/(2\sin\pi\rho)$, $k_2 = 4k_1(\rho+1)\times$ $\times(\pi\rho(\rho+2))^{-1}$. Враховуючи міркування з [2, 3], одержуємо $(0<\theta<\pi)$

$$u(x)=k_1\left(\frac{\sin(\rho+1)\theta}{\sin\theta}V_1(r)+\frac{\sin(\rho+1)(\pi-\theta)}{\sin(\pi-\theta)}V_2(r)\right)+o(r^\rho),\ r\to\infty.$$

Обчислимо $T(r_n, u)$ і $T(s_n, u)$. Маємо ([4], лема 4.7)$(r\to\infty)$

$$T(r_n,u)=4k_1\pi^{-1}2r_n^\rho\int_0^{\pi/(\rho+1)}\sin(\rho+1)\theta\sin\theta\,d\theta+$$

$$+o(r_n^\rho)=4k_2\sin\frac{\pi}{2(\rho+1)}\cos\frac{\pi}{2(\rho+1)}r_n^\rho(1+o(1)),$$

$$T(s_n,u)=4k_1\pi^{-1}s_n^\rho 4\cos(\pi\rho/2)\int_{\frac{\pi\rho}{2(\rho+1)}}^{\frac{\pi}{2}}\cos(\rho+1)\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)\times$$

$$\times\sin\theta\,d\theta+o(s_n^\rho)=4k_2\sin\frac{\pi(1-\rho)}{2}\cos\frac{\pi}{2(\rho+1)}(1+o(1))s_n^\rho.$$

Таким чином, $\lim\limits_{r\to\infty}T(r,u)/r^\rho$ не існує.

Зауваження. Добре видно, що $\max\{u(x):|x|=r_n\}=$ $=(1+o(1))r_n^\rho(2k_1(\rho+1))$, $\max\{u(x):|x|=s_n\}=(1+o(1))s_n^\rho\left(2k_1\sin\frac{\pi(\rho+1)}{2}\right)$.

Отже, не існує границі $\lim\limits_{r\to\infty}(\max\limits_{|x|=r}u(x))/r^\rho$.

Список літератури: І. Гольдберг А.А. О целых функциях без конечных валироновских дефектных значений. – Теория функций, функциональный анализ и их приложение, 1972, вып. 15, с. 244-255. 2. Гольдберг А.А., Островский И.В. Распределение значений мероморфных функций. – М.: Наука, 1970. – 592 с. 3. Заболоцкий Н.В. Некоторые соотношения для неванлинновских характеристик δ-субгармонических функций порядка <1. – Теория функций, функциональный анализ и их приложение, 1983, вып. 39, с. 49-56. 4. Хейман У., Кеннеди П. Субгармонические функции. – М.: Мир, 1980. – 304 с. 5. Baernstein A. A nonlinear tauberian theorem in function theory. – Trans. Amer. Math.

Soc., 1969, vol. 146, p. 87-104.

Стаття надійшла до редколегії 14.06.83

УДК 517.53

О.Б.Скасків

ПРО РІСТ ЦІЛИХ РЯДІВ ДІРІХЛЕ НУЛЬОВОГО ПОРЯДКУ ЗА РІТТОМ

Нехай F – ціла функція, задана абсолютно збіжним в усій площині рядом Діріхле

$$F(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{z\lambda_n}, \quad 0\le\lambda_0<\lambda_1<\ldots<\lambda_n\uparrow+\infty\ (n\to+\infty), \tag{1}$$

$M(x)=\sup\{|F(x+iy)|:|y|<\infty\}$, $\mu(x)$, $\nu(x)$ – відповідно максимальний член і центральний індекс ряду (1).

У праці [1] показано, що умова

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{\lambda_{n+1}-\lambda_n}<+\infty \tag{2}$$

є необхідною і достатньою в класі всіх цілих функцій (1) для виконання при $x\to+\infty$ зовні множини скінченної міри співвідношення

$$F(x+iy)=(1+o(1))\,a_{\nu(x)}e^{(x+iy)\lambda_{\nu(x)}}. \tag{3}$$

Уточнимо умову (2) для класу цілих функцій (1), які задовольняють умову

$$\ln M(x)\le Ax^{\rho},\quad 1<\rho<+\infty, \tag{4}$$

при всіх досить великих x.