Soc., 1969, vol. 146, p. 87-104.

Стаття надійшла до редколегії 14.06.83

УДК 517.53

О.Б.Скасків

ПРО РІСТ ЦІЛИХ РЯДІВ ДІРІХЛЕ НУЛЬОВОГО ПОРЯДКУ ЗА РІТТОМ

Нехай F - ціла функція, задана абсолютно збіжним в усій площині рядом Діріхле

$$F(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{z\lambda_n}, \quad 0\le\lambda_0<\lambda_1<\ldots<\lambda_n\uparrow+\infty\ (n\to+\infty), \tag{1}$$

$M(x)=\sup\{|F(x+iy)|:|y|<\infty\}$, $\mu(x)$, $\nu(x)$ - відповідно максимальний член і центральний індекс ряду (1).

У праці [1] показано, що умова

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda_{n+1}-\lambda_n}<+\infty \tag{2}$$

є необхідною і достатньою в класі всіх цілих функцій (1) для виконання при $x\to+\infty$ зовні множини скінченної міри співвідношення

$$F(x+iy)=(1+o(1))\,a_{\nu(x)}\,e^{(x+iy)\lambda_{\nu(x)}}. \tag{3}$$

Уточнимо умову (2) для класу цілих функцій (1), які задовольняють умову

$$\ln M(x)\le Ax^{\rho}, \quad 1<\rho<+\infty, \tag{4}$$

при всіх досить великих x.

Надалі через C_0 позначатимемо довільну вимірну множину з $[0,+\infty[$, для якої $\int\limits_{C_0\cap[0,x]} dx = o(x)$ при $x\to+\infty$.

Теорема I. Нехай для функції (I) виконується (4). Якщо

$$\lambda_n^{-\frac{1}{p-1}} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{\lambda_{k+1}-\lambda_k} = o(1) \quad (n\to+\infty), \tag{5}$$

то (3) виконується при $x\to+\infty$ зовні деякої множини C_0 . З іншого боку, для кожної (λ_n) такої, що

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{\lambda_{k+1}-\lambda_k} \geq b\lambda_n^{\frac{1}{p-1}} \quad (n\geq 0),\ b>0 \tag{6}$$

існує ціла функція (I), для якої виконується (4), а співвідношення (3) не виконується при $y=0$ і для всіх x з деякої множини E такої, що $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{-1}\int\limits_{E\cap[0,x]} dx = q>0.$

Наведена теорема підсилює відповідні результати для класів функцій (I) з умовою на ріст (4) із праць [I – 3] .

Доведення першого твердження теореми I аналогічне доведенню відповідного твердження з праці [I] і базується на такій лемі.

Лема. Нехай (ε_k) – послідовність невід"ємних чисел [I]. Рівності

$$\nu(x\pm\varepsilon_{\nu(x)}) = \nu(x) \tag{7}$$

на проміжку $[0,R]$ виконуються всюди, крім, можливо, множини, міра якої не перевищує числа $C(F)+2\cdot\sum_{k=0}^{\nu(R-0)}\varepsilon_k$, де $C(F)$ – постійна, залежна тільки від F , а $\nu(x)$ – центральний індекс ряду (I).

Згідно з працею [I] приймемо $\delta_\nu = \max\{(j-l+1)^{-\frac{3}{2}}\sum_{m=l}^{j}(\lambda_{m+1}-\lambda_m)^{-1}: l\leq\nu-1\leq j\leq k_0(\nu)-1\}$, де для кожного $\nu\in N$ $k_0(\nu)$ таке, що $\lambda_{k_0(\nu)}\leq 5\lambda_\nu<\lambda_{k_0(\nu)+1}$. Зрозуміло, що із (5) випливає співвідношення

$$\sum_{k\leq n}\delta_k = o(\lambda_n^{\frac{1}{p-1}}) \quad (n\to+\infty).$$

Тому існує $C_k \uparrow +\infty \ (k \to +\infty)$ така, що

$$\sum_{k=1}^{n} C_k \delta_k = O\left(\lambda_n^{\frac{1}{p-1}}\right). \ (n \to +\infty). \tag{8}$$

Із (4), застосовуючи нерівність Коші та приймаючи $x = \left(\frac{\lambda n}{pA}\right)^{\frac{1}{p-1}}$, для всіх досить великих n одержуємо

$$\ln|a_n| \leq -\lambda_n x + Ax^p = -A_p \lambda_n^{\frac{p}{p-1}}, \ A_p = (pA)^{-\frac{1}{p-1}} \left(1 - \frac{1}{p}\right).$$

З іншого боку, $0 \leq \ln\mu(x) = \ln|a_\nu| + \lambda_\nu x$, тому

$$x \geq -\frac{\ln|a_\nu|}{\lambda_\nu} \geq A_p \lambda_\nu^{\frac{1}{1-p}}. \tag{9}$$

Приймемо тепер $\varepsilon_k = C_k \delta_k$. Застосовуючи лему, одержуємо, що рівності (7) виконуються на $[0, +\infty[$ всюди, крім деякої множини E, для якої з (8) і (9) випливає

$$0 \leq \overline{\lim_{x \to +\infty}}\, x^{-1} \int_{E \cap [0,x]} dx \leq \lim_{\nu \to +\infty} \left(A_p \lambda_\nu^{\frac{1}{p-1}}\right)^{-1} \sum_{k=1}^{\nu} C_k \delta_k = 0,$$

тобто рівності (7) на $[0, +\infty[$ виконуються зовні деякої множини C_0. Подальше доведення першого твердження теореми І збігається з доведенням у праці [І]. Для доведення другого твердження теореми І досить розглянути при виконанні умови (6) цілу функцію (І) з коефіцієнтами

$$a_n = \exp\left\{-\beta \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\lambda_n - \lambda_k}{\lambda_{k+1} - \lambda_k}\right\} (n \geq 1), \ a_0 = 1,$$

де $\beta = \beta(p, A, B) > 0$ – потрібно вибрати досить великим.

Друге твердження теореми І вказує на те, що в умові (5) не можна, взагалі кажучи, замінити $o(1)$ на $O(1)$. Справедлива така теорема.

Теорема 2. Нехай для функції (І) виконується

$$\ln M(x) \leq o(x^p) \quad (x \to +\infty).$$

Якщо
$$\lambda_n^{-\frac{1}{p-1}} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{\lambda_{k+1}-\lambda_k} = O(1) \quad (n \to +\infty),$$
то співвідношення (3) виконується при $x \to +\infty$ зовні деякої множини C_0.

На закінчення відзначимо, що в класі цілих функцій (I), які задовольняють (4), необхідною і достатньою для виконання співвідношення (3) при $x \to +\infty$ зовні деякої множини E такої, що $\lim\limits_{x \to +\infty} x^{-1} \int\limits_{E \cap [0,x]} dx = 0$, є умова
$$\lim_{n \to +\infty} \lambda_n^{-\frac{1}{p-1}} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{\lambda_{k+1}-\lambda_k} = 0.$$

Список літератури: I. С к а с к и в О.Б. Максимум модуля и максимальный член целого ряда Дирихле. - К., 1983. - 23 с. - Рукопись деп. в УкрНИИНТИ, № 464.УК - Д83. 2. Ш е р е м е т а М.Н. Метод Вимана-Валирона для целых функций, заданных рядами Дирихле. - Докл. АН СССР, 1978, т. 240, № 5, с. 1036-1039. 3. Ш е р е м е т а М.М. Асимптотичні властивості цілих функцій повільного росту, заданих рядами Діріхле. - Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат., 1981, вип. 18, с. 74-75.

Стаття надійшла до редколегії 19.03.84