УДК 517.535.4

В.М.Сороківський

ПРО ПОВЕДІНКУ В ПІВСМУЗІ АНАЛІТИЧНИХ ФУНКЦІЙ, ЗАДАНИХ РЯДАМИ ДІРІХЛЕ

Нехай $\Lambda=(\lambda_n)$ – зростаюча послідовність додатних чисел таких, що $\sum_1^\infty (1/\lambda_n)<\infty$, а $S(\Lambda)$ – клас аналітичних у півплощині $\{z: \operatorname{Re} z<0\}$ функцій f, заданих рядами Діріхле виду

$$f(z)=\sum_1^\infty a_n e^{z\lambda_n},$$

абсциса абсолютної збіжності яких дорівнює 0. Для $f\in S(\Lambda)$ приймемо

$$M_f(x)=\sup\{|f(x+iy)|: y\in R\},\ M_f(x,h)=\sup\{|f(x+iy)|: x\le\sigma, |y|\le h\},$$
$$h>0,\ x<0,$$

$$\rho=\overline{\lim_{x\to 0}}\,|x|\ln^+\ln M_f(x),\ \rho_h=\overline{\lim_{x\to 0}}\,|x|\ln^+\ln M_f(x,h),\ \rho_0=\overline{\lim_{x\to 0}}\,|x|\ln^+\ln|f(x)|.$$

А.М.Гайсин [1] вказав достатні умови на Λ, при виконанні яких для функцій $f\in S(\Lambda)$ виконується рівність $\rho=\rho_h$. У праці [3] вказані умови, при яких $\rho=\rho_0$. Доведено таке твердження: якщо $f\in S(\Lambda)$

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{\ln\lambda_n}{\lambda_n}\ln\frac{1}{|H'(\lambda_n)|}=0,\ H(z)=\prod_{n=1}^{\infty}(\lambda_k-z)/(\lambda_k+z), \qquad (1)$$

то $\rho_0=\rho$, причому умова (1) для виконання цієї рівності суттєва. Зрозуміло, що коли (1) виконується, то $\rho_h=\rho_0$. Виникає питання про можливість виконання цієї рівності у випадку невиконання (1).

Доведемо наступне твердження.

Теорема I. Нехай $f\in S(\Lambda)$ і виконується умова

$$\frac{n}{\lambda_n}\ln^2\lambda_n \to 0\,(n\to\infty), \tag{2}$$

тоді для будь-якого $h>0$ виконується $\rho_0=\rho_h$.

Умова (2) не накладає ніяких обмежень на близкість двох сусідніх показників. Тому з (2) не випливає (I). Можливо, що $\rho_0=\rho_h$ для будь-якої функції $f\in S(\Lambda)$, але застосовувана методика не дає змоги позбутися умови (2).

Нехай

$$h(t)=\frac{1}{2\pi i}\int_{x-i\infty}^{x+i\infty}\frac{H(z)}{(1+z)^2}e^{-tz}dz,\ \sigma_0=\min\left\{\frac{1}{2},\frac{\lambda_1}{2}\right\}.$$

Доведено [3] , що $h(t)=0$ при $t>0$ і $|h(t)|\le K e^{\sigma_0 t}, t\le 0.$

Приймемо [2]

$$\omega_B(\mu,\alpha,f)=e^{-\alpha\mu}\int_{-\infty}^{0}h(t)\Big(\int_0^t f(t+\alpha-\eta)e^{\mu\eta}d\eta\Big)dt,\ \alpha<0.$$

Для доведення теореми I потрібні такі леми.

Лема I. Нехай $f\in S(\Lambda)$. Тоді

$$a_k=\omega_B(\lambda_k,\alpha,f)/B'(\lambda_k),\ k=1,2,\cdots\ B(z)=\frac{H(z)}{(1+z)^2}.$$

Лема 2. Нехай $f\in S(\Lambda)$ і $0<\varphi_0<\frac{\pi}{2}$. Тоді для будь-якого $\alpha<0$ і для всіх z з кута

$$\frac{\pi}{2}+\varphi_0<\arg(z-\alpha)<\frac{3\pi}{2}-\varphi_0 \tag{3}$$

наявне зображення

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma\frac{\omega_B(\mu,\alpha,f)}{B(\mu)}e^{\mu z}d\mu, \tag{4}$$

де Γ – границя кута $|\arg\mu|<\varphi_0(\infty e^{i\varphi_0},0,\infty e^{-i\varphi_0})$.

Лема 3. Якщо виконується умова (2), то

$$-\ln|H(re^{i\varphi})|\le\varepsilon(r)\Big(\frac{r}{\ln r}+\frac{r}{\ln^2 r|\sin\varphi|}\Big),\ 0\le|\varphi|<\frac{\pi}{2}, \tag{5}$$

де $\varepsilon(r)\to 0$ при $r\to\infty$.

Доведемо теорему I. Якщо $\rho_0 = \infty$, то рівність $\rho_0 = \rho_h$ очевидна. Нехай $\rho_0 < \infty$. Тоді для всіх $t \in]-\infty, 0[$ маємо

$$|f(t)| \leq \mathcal{K}_2 \exp(\exp(\rho_1 / |t|)), \; \rho_1 = \rho_0 + \delta, \; \delta > 0. \tag{6}$$

Нехай $\sigma < 0$, $h > 0$, $0 < \varepsilon < 1$ – фіксовані числа, а $\alpha = (1-\varepsilon)\sigma$, $z = x + iy$. Оцінимо $|f(z)|$ у півсмузі $S_{\sigma,h} = \{z : Re z \leq \sigma, |Im z| \leq h\}$. Приймемо $\varphi_0 = arctg \dfrac{|\sigma - \alpha|}{2h}$. Тоді при $z \in S_{\sigma,h}$, $\arg \mu = \varphi_0$ маємо

$$Re((z-\alpha)\mu) = Re[(x - \alpha + iy)|\mu|(\cos\varphi_0 - i \sin\varphi_0)] =$$

$$= (x-\alpha)|\mu| \cos\varphi_0 - y|\mu| \sin\varphi_0 \leq -|\sigma - \alpha||\mu| \cos\varphi_0 - y|\mu| \frac{|\sigma-\alpha|}{2h} \cos\varphi_0 =$$

$$= -|\sigma - \alpha||\mu| \left(1 + \frac{y}{2h}\right) \cos\varphi_0 \leq$$

$$\leq -\frac{|\sigma - \alpha|}{2} |\mu| \cos\varphi_0 = -\frac{\varepsilon}{2} |\sigma||\mu| \cos\varphi_0 . \tag{7}$$

Добре видно, що (7) справедливе при $\arg \mu = -\varphi_0$. Крім того,

$$|\omega_B(\mu, \alpha, f)| \leq |e^{-\alpha\mu}| \int_{-\infty}^{0} |h(t)| \left(\int_{0} |f(t + \alpha - \eta)||e^{\mu\eta}||d\eta| \right) |dt| \leq$$

$$\leq |e^{-\alpha\mu}| \max_{(t-\eta) \in (-\infty, 0)} |f(t - \alpha - \eta)| \left| \int_{-\infty}^{0} |h(t)||t||dt| \leq \mathcal{K} I(\alpha, f) |e^{-\alpha\mu}| \right| \int_{\infty}^{0} e^{\sigma_0 t} |t||dt| =$$

$$= \mathcal{K}_1 I(\alpha, f) |e^{-\alpha\mu}|, \tag{8}$$

де $\mathcal{K}_1 > 0$ – стала $\quad I(\alpha, f) = \max\{|f(\zeta + \alpha)| : \zeta \leq 0\}$.

Враховуючи (7) і (6), з (8) одержуємо

$$|\omega_B(\mu, \alpha, f) e^{\mu z}| \leq \mathcal{K}_2 I(\alpha, f) |e^{\mu(z-\alpha)}| \leq \mathcal{K}_1 \mathcal{K}_2 e^{-\frac{\varepsilon}{2}|\sigma||\mu| \cos\varphi_0} \times$$

$$\times \max\{\exp(e^{\rho_1/|\zeta + \alpha|}) : \zeta \leq 0\} \leq \mathcal{K}_3 e^{-\frac{\varepsilon}{2}|\sigma||\mu| \cos\varphi_0} \exp(e^{\rho_1/|\alpha|}). \tag{9}$$

Нехай $\nu_1(\sigma) = \cos\varphi_0$, $\nu_2(\sigma) = \sqrt{\varepsilon^2 |\sigma|^2 + h^2}$, $r = r(\sigma) = \exp(2\varepsilon(1 + \sqrt{1 + \nu_1(\sigma)\nu_2(\sigma)})/|\sigma|\nu_1(\sigma))$.

Враховуючи лему 3, маємо

$$-\ln|H(re^{\pm i\varphi_0})| \leq \frac{r\varepsilon^2}{\ln r} + \frac{\varepsilon^4 r}{\ln^2 r |\sin\varphi|} = \frac{\varepsilon^2 r}{\ln r} + \frac{\varepsilon^3 r \nu_2(\sigma)}{\ln^2 r |\sigma|}, \; r \geq r_0(\varepsilon). \tag{10}$$

З (4), беручи до уваги (I0) і (9) при $r=|\mu|$ і $z\in S_{\sigma,h}$ одержуємо

$$|f(z)|\leq \frac{2\mathcal{K}_3}{2\pi}\exp\left(e^{\rho_1/|\sigma|}\right)\int\limits_0^{\infty}\frac{\exp\left(-\frac{\varepsilon}{2}|\sigma|r\cos\varphi_0\right)}{|B(re^{i\varphi_0})|}\,dr\leq$$

$$\leq \frac{\mathcal{K}_3}{\pi}\exp\left(e^{\rho_1/|\sigma|}\right)\left(\int\limits_0^{r_0(\varepsilon)}+\int\limits_{r_0(\varepsilon)}^{r(\sigma)}+\int\limits_{r(\sigma)}^{\infty}\right)\frac{\exp\left(-\frac{\varepsilon}{2}|\sigma|r\cos\varphi_0\right)}{|B(re^{i\varphi_0})|}\,dr\leq$$

$$\leq \frac{\mathcal{K}_3}{\pi}\exp\left(e^{\rho_1/|\sigma|}\right)\left\{\mathcal{K}_4+\left(\int\limits_{r_0(\varepsilon)}^{r(\sigma)}+\int\limits_{r(\sigma)}^{\infty}\right)\exp\left(-\frac{\varepsilon}{2}|\sigma|r\cos\varphi_0+\frac{\varepsilon^2 r}{\ln r}+\frac{\varepsilon^3 r\nu_2(\sigma)}{\ln^2 r|\sigma|}\right)dr\right\}\leq$$

$$\leq \frac{\mathcal{K}_3}{\pi}\exp\left(e^{\rho_1/|\sigma|}\right)\left\{\mathcal{K}_4+\int\limits_{r_0(\varepsilon)}^{r(\sigma)}\exp\left(\frac{\varepsilon^2 r}{\ln r}+\frac{\varepsilon^3 r\nu_2(\sigma)}{|\sigma|\ln^2 r}\right)dr+\int\limits_{r(\sigma)}^{\infty}\exp\left(-\frac{\varepsilon|\sigma|r\nu_1(\sigma)}{4}\right)dr\right\}\leq$$

$$\leq \frac{\mathcal{K}_3}{\pi}\exp\left(e^{\rho_1/|\sigma|}\right)\left\{\mathcal{K}_4+r(\sigma)\exp\left(\frac{\varepsilon|\sigma|r\nu_1(\sigma)}{4}\right)+\frac{4}{\varepsilon|\sigma|\nu_1(\sigma)}e^{-r(\sigma)\varepsilon|\sigma|\nu_1(\sigma)}\right\}=$$

$$=\frac{\mathcal{K}_3}{\pi}(1+o(1))\exp\left(e^{\rho_1/|\sigma|}\right)\exp\left(\delta\left(\frac{o(1)\varepsilon}{|\sigma|}\right)\right)=\frac{\mathcal{K}_3}{\pi}(1+o(1))\exp\left(e^{\rho_1/((1-\varepsilon)|\sigma|)}\right)$$

при $\sigma\to 0$.

Автор висловлює вдячність Б.В.Винницькому та М.М.Шереметі за допомогу під час підготовки праці.

Список літератури: I. Г а й с и н А.М. Оценка роста функции, представленной рядом Дирихле, в полуполосе. - Мат. сб., I982, т. II7 (I59), № 2, с. 4I2-424. 2. Л е о н т ь е в А.Ф. Ряды экспонент. - М.: Наука, I976. - 535 с. 3. С о р о к и в с к и й В.М. О росте рядов Дирихле, абсолютно сходящихся в полуплоскости. К., I983. - I4 с. - Рукопись деп. в УкрНИИНТИ, № 880, УК-Д83.

Стаття надійшла до редколегії I6.04.84