УДК 517.535.4

О.В.Веселовська

ПРО АПРОКСИМАЦІЮ ТА РІСТ ЦІЛИХ ГАРМОНІЙНИХ В $\mathbb{R}^n$ ФУНКЦІЙ

Нехай S^n, K_R^n – відповідно одинична сфера та куля радіуса R у просторі $\mathbb{R}^n$, $n \geq 3$ з центрами в початку координат. Клас гармонійних в K_R^n і неперервних на замиканні $\bar{K}_R^n$ функцій позначимо через H_R, $0 < R < \infty$. Відомо [3], що для функції $u \in H_R$ при всіх r, $0 < r < R$ має місце розклад у ряд

$$u(rx) = \sum_{k=0}^{\infty} Y^{(k)}(x;u) r^k, \quad x \in S^n, \tag{1}$$

де $Y^{(k)}$ – сферичні гармоніки степеня k, які виражаються через многочлени Гегенбауера C_k^ν таким чином [5]:

$$Y^{(k)}(x;u) = \frac{\Gamma(\nu)(k+\nu)}{2\pi^{\nu+1} r^k} \int_{S^n} C_k^\nu[(x,y)] u(ry) dS(y), \tag{2}$$

де $k = 0, 1, \ldots$, $x \in S^n$, $\nu = (n-2)/2$, (x,y) – скалярний добуток в $\mathbb{R}^n$.

Похибку апроксимації функції $u \in H_R$ гармонійними многочленами визначимо як

$$E_R^k(u) = \inf_{\mathcal{P} \in \mathcal{P}_k} \{\max_{y \in \bar{K}_R^n} |u(y) - \mathcal{P}(y)|\}, \tag{3}$$

де $\mathcal{P}_k$ – множина гармонійних многочленів степеня щонайбільше k.

У праці [6] з умови швидкості спадання похибки E_R^k знайдено для простору $\mathbb{R}^3$ необхідні та достатні умови продовжуваності функції з класу H_R до цілої гармонійної функції скінченного порядку та скінченного типу. Дослідимо аналогічні питання для n – вимірного простору.

Нехай v - ціла гармонійна в R^n функція і $M(r,v)=\max_{x\in S^n}|v(rx)|$.
За аналогією до праці [4] визначимо узагальнений порядок функції v

$$\rho_{\alpha\beta}(v)=\overline{\lim_{r\to\infty}}\frac{\alpha(\ln M(r,v))}{\beta(r)},$$

де α,β - функції одного з класів L^0, Λ [4].

Теорема. Функція $u\in H_R$ продовжується до цілої гармонійної функції тоді і лише тоді, коли

$$\lim_{k\to\infty}\sqrt[k]{E_R^k(u)}=0, \tag{4}$$

де E_R^k визначені співвідношенням (3).

При цьому, якщо для всіх c, $0<c<\infty$, виконується одна з таких умов:

а) $\alpha,\beta\in\Lambda$, $d\ln F(t,c)/d\ln t=O(1)$, $t\to\infty$;

б) $\alpha,\beta\in L^0$, $\lim_{t\to\infty}(d\ln F(t,c)/d\ln t)=\mu$, $0<\mu<\infty$,

де $F(t,c)=\beta^{-1}(c\alpha(t))$, то

$$\rho_{\alpha\beta}(u)=\overline{\lim_{k\to\infty}}\frac{\alpha(\mu k)}{\beta(e^{\mu}R[E_R^k(u)]^{-1/k})}, \tag{5}$$

причому при виконанні умови а) число μ вважається довільним додатним.

Для доведення теореми скористаємось наступними лемами.

Лема I. Якщо $u\in H_R$, то

$$\max_{x\in S^n}|Y^{(k)}(x;u)|R^k\leqslant\frac{2(k+2\nu)^{2\nu}}{\nu\Gamma(2\nu)}E_R^{k-1}(u),\ k\in N.$$

Доведення. Беручи до уваги те, що гармонійний многочлен - сума однорідних гармонійних многочленів, із співвідношення (2) на основі теореми додавання [5] для довільних многочлена

$\mathcal{P} \in \mathcal{P}_{k-1}$ і $\tau < R$ одержуємо

$$Y^{(k)}(x;u)\tau^k = \frac{\Gamma(\nu)(k+\nu)}{2\pi^{\nu+1}} \int\limits_{S^n} C_k^\nu[(x,y)]\{u(\tau y) - \mathcal{P}(\tau y)\}\, dS(y).$$

Звідси, враховуючи, що $\max\limits_{0\le\theta\le\pi} |C_k^\nu(\cos\theta)| = C_k^\nu(1)$ [5],

маємо

$$|Y^{(k)}(x;u)|\tau^k \le \frac{(k+2\nu)^{2\nu}}{\nu\Gamma(2\nu)} \max_{\tau y\in \bar{K}_R^n} |u(\tau y) - \mathcal{P}(\tau y)|. \qquad (6)$$

Далі з означення E_R^k випливає, що існує многочлен $\mathcal{P}^* \in \mathcal{P}_{k-1}$ такий, що

$$\max_{\tau y\in \bar{K}_R^n} |u(\tau y) - \mathcal{P}^*(\tau y)| \le 2E_R^{k-1}(u). \qquad (7)$$

Приймаючи в нерівності (6) $\mathcal{P} = \mathcal{P}^*$ і враховуючи (7) та довільність τ, приходимо до твердження леми.

<u>Лема 2</u>. Для цілої гармонійної функції v при всіх $\tau > eR$ справедлива оцінка

$$E_R^k(v) \le \sqrt{2(2\nu)!}\,(2\nu+1)(k+2\nu)^{2\nu}\mathcal{M}(\tau,v)(R/\tau)^k,\ k\in Z_+. \qquad (8)$$

<u>Доведення</u>. Зі співвідношень (I), (3) та леми 2.I з праці [2] знаходимо, що

$$E_R^k(v) \le \max_{\tau x\in \bar{K}_R^n} \Big|v(\tau x) - \sum_{m=0}^{k} Y^{(m)}(x;v)\tau^m\Big| \le$$

$$\le \left(\sqrt{2}/\sqrt{(2\nu)!}\right)\mathcal{M}(\tau,v)\sum_{m=k+1}^{\infty}(m+2\nu)^{\nu}(R/\tau)^m \le$$

$$\le (eR/\tau)^k \int_k^\infty (t+2\nu)^{2\nu} e^{-t}\,dt = (R/\tau)^k \sum_{S=0}^{2\nu} \frac{(2\nu)!\,(k+2\nu)^{2\nu-S}}{(2\nu-S)!},$$

а оскільки остання сума не перевищує $(2\nu+1)!\,(k+2\nu)^{2\nu}$, то лема 2 повністю доведена.

Доведення теореми. Нехай функція $u \in H_R$ продовжується до цілої гармонійної функції, яку ми також позначатимемо через u. Тоді співвідношення (4) безпосередньо випливає з леми 2.

Навпаки, за допомогою леми I знаходимо

$$\left|\sum_{k=0}^{\infty} Y^{(k)}(x;u)r^k\right| \leq \left|Y^{(0)}(x;u)\right| + \frac{2}{\nu\Gamma(2\nu)}\sum_{k=1}^{\infty}(k+2\nu)^{2\nu}E_R^{k-1}(u)\left(\frac{r}{R}\right)^k, \tag{9}$$

звідки, беручи до уваги (4), випливає рівномірна збіжність ряду в правій частині рівності (I) на компактних підмножинах R^n, тобто ми продовжили функцію $u \in H_R$ на R^n, задавши її рядом (I).

Тепер встановимо справедливість співвідношення (5). Для цього розглянемо цілі функції

$$g_1(z) = \sum_{k=0}^{\infty}\left[1/\left(\sqrt{2(2\nu)!}(2\nu+1)(k+2\nu)^{2\nu}\right)\right]E_R^k(u)(z/R)^k,$$

$$g_2(z) = \sum_{k=1}^{\infty}\left[2/(\nu\Gamma(2\nu))\right](k+2\nu)^{2\nu}E_R^{k-1}(u)(z/R)^k.$$

З нерівностей (8) і (9) випливає, що

$$\mu(r,g_1) \leq M(r,u) \leq |Y^{(0)}(x;u)| + M(r,g_2), \quad r > eR,$$

де $\mu(r,g_1)$ – максимальний член степеневого ряду функції g_1, $M(r,g_2) = \max_{|z|=r}|g_2(z)|$. Звідси

$$\rho_{\alpha\beta}(g_1) \leq \rho_{\alpha\beta}(u) \leq \rho_{\alpha\beta}(g_2). \tag{10}$$

Використовуючи формулу, що виражає узагальнений порядок цілої функції однієї комплексної змінної у термінах її тейлорівських коефіцієнтів [4, I] і належність функції β до одного з класів L^0, Λ, приходимо до рівності $\rho_{\alpha\beta}(g_1) = \rho_{\alpha\beta}(g_2)$, що разом з нерівністю (10) завершує доведення теореми.

Зауважимо, що співвідношення (5) при $\alpha(t) = \beta(t) = \ln t$ і $\alpha(t) = t$, $\beta(t) = t^{\rho}$, $p = 1/\rho$, де ρ – порядок цілої гармонійної в R^n функції u, дає відповідно формули для порядку і типу функції u.

Виражаємо глибоку вдячність А.А.Кондратюку за керівництво роботою.

Список літератури: 1. Б а л а ш о в С.К. О связи роста целой функции обобщенного порядка с коэффициентами ее степенного разложения и распределением корней. – Изв. вузов. Сер. мат., 1972, № 8, с. 10–18. 2. В е с е л о в с к а я О.В. О росте целых гармонических в R^n функций. – Изв. вузов. Сер. мат., 1983, № 10, с. 13–17. 3. Т и м а н А.Ф., Т р о ф и м о в В.Н. Введение в теорию гармонических функций. М., 1968. – 207 с. 4. Ш е р е м е т а М.Н. Связь между асимптотикой аналитических функций и коэффициентами их степенных разложений. – Автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук, Ростов-на-Дону, 1969. – 14 с. 5. Berens H., Butzer P.L., Pawelke S. Limitierungsverfahren von Reihen mehrdimensionaler Kugelfunktionen und deren Saturationsverhalten. – Publs. Res. Inst. Math. Sci., 1968, vol. 4, № 2, p. 201–268. 6. Kapoor C.P., Nautiyal A. Approximation of entire harmonic functions in R^3. – Indian J. Pure and Appl. Math., 1982, vol. 13, № 9, p. 1024–1030.

Стаття надійшла до редколегії 25.10.83

УДК 517.574

Я.В.Васильків

ПРО АСИМПТОТИЧНУ ПОВЕДІНКУ δ – СУБГАРМОНІЧНИХ ФУНКЦІЙ ЦІЛКОМ РЕГУЛЯРНОГО ЗРОСТАННЯ

Нехай $\lambda(r)$ – додатна, неспадна, неперервна, необмежена на $]0,+\infty[$ функція, яка називається функцією зростання, Λ_δ – клас δ -субгармонічних у C функцій скінченного λ -типу [8], Λ_s – підклас субгармонічних функцій з Λ_δ. Припустимо, що існує стала $M>0$ така, що для всіх $r>0$ виконується

$$\lambda(2r) \le M\lambda(r).$$