Виражаємо глибоку вдячність А.А.Кондратюку за керівництво роботою.

Список літератури: 1. Б а л а ш о в С.К. О связи роста целой функции обобщенного порядка с коэффициентами ее степенного разложения и распределением корней. - Изв. вузов. Сер. мат., 1972, № 8, с. 10-18. 2. В е с е л о в с к а я О.В. О росте целых гармонических в $R^n$ функций. - Изв. вузов. Сер. мат., 1983, № 10, с. 13-17. 3. Т и м а н А.Ф., Т р о ф и м о в В.Н. Введение в теорию гармонических функций. М., 1968. - 207 с. 4. Ш е р е м е т а М.Н. Связь между асимптотикой аналитических функций и коэффициентами их степенных разложений. - Автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук, Ростов-на-Дону, 1969. - 14 с. 5. Berens H., Butzer P.L., Pawelke S. Limitierungsverfahren von Reihen mehrdimensionaler Kugelfunktionen und deren Saturationsverhalten. - Publs. Res. Inst. Math. Sci., 1968, vol. 4, N2, p. 201-268. 6. Kapoor C.P, Nautiyal A. Approximation of entire harmonic functions in $R^3$. - Indian J. Pure and Appl. Math., 1982, vol. 13, N9, p. 1024-1030.

Стаття надійшла до редколегії 25.10.83

УДК 517.574

Я.В.Васильків

## ПРО АСИМПТОТИЧНУ ПОВЕДІНКУ $\delta$ - СУБГАРМОНІЧНИХ ФУНКЦІЙ ЦІЛКОМ РЕГУЛЯРНОГО ЗРОСТАННЯ

Нехай $\lambda(r)$ - додатна, неспадна, неперервна, необмежена на $]0,+\infty[$ функція, яка називається функцією зростання, $\Lambda_\delta$ - клас $\delta$ -субгармонічних у $C$ функцій скінченного $\lambda$ -типу [8], $\Lambda_s$ - підклас субгармонічних функцій з $\Lambda_\delta$. Припустимо, що існує стала $M>0$ така, що для всіх $r>0$ виконується

$$\lambda(2r)\le M\lambda(r).$$

Означення I. Функція $\omega \in \Lambda_\delta$ називається $\delta$ -субгармонічною функцією цілком регулярного зростання, якщо для довільних $\eta, \varphi \in [0, 2\pi]$ існує границя

$$\lim_{r\to\infty} \frac{1}{\lambda(r)} \int_\eta^\varphi \omega(re^{i\theta})\, d\theta.$$

Клас таких функцій позначимо через $\Lambda_\delta^\circ$.

Відомо [I] , що підклас $\Lambda_E^\circ \subset \Lambda_\delta^\circ$ функцій $\omega = \ln|f|$, де $f$ - ціла, при $\lambda(r) = r^{\rho(r)}$; $\rho(r)$ - уточнений порядок [6] , суміщається з класом цілих функцій цілком регулярного зростання в сенсі Левіна-Пфлюгера [6] .

А.А.Кондратюк дав узагальнення теорії Левіна-Пфлюгера, вперше ввівши класи $\Lambda^\circ$ мероморфних функцій цілком регулярного зростання [4] .

Використовуючи метод рядів Фур"є, дослідимо асимптотичну поведінку функції $\omega(re^{i\theta}) \in \Lambda_\delta^\circ$ при $r\to\infty$ зовні виняткової множини з нульовою лінійною щільністю [5] .

Лема I (про одностайну неперервність). Нехай $\omega \in \Lambda_\delta$. Тоді для довільних $\varepsilon > 0$ і $\eta > 0$ знайдуться $\delta_0 > 0$ і множина $E\eta \in \mathbb{R}_+$ з верхньою лінійною щільністю, яка не перевищує $\eta$ такі, що при $r \notin E\eta$ і $|\varphi - \theta| < \delta_0$ виконується

$$|\omega(re^{i\theta}) - \omega(re^{i\varphi})| < \varepsilon\lambda(r).$$

Доведення близьке до доведення теореми I з праці [5] .

Оскільки $\Lambda_\delta = \Lambda_s - \Lambda_s$ [2] , то достатньо розглянути випадок $\omega \in \Lambda_s$. Формулу Пуассона-Йенсена для функції $\omega \in \Lambda_s$ [7] $(r = 2\rho)$ запишемо у вигляді

$$\omega(re^{i\theta}) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{c_k(2r,\omega)}{2^{|k|}} e^{ik\theta} + \int_{|a|\le r/2} \ln\left|1 - \frac{e^{-i\theta} a}{r}\right| d\mu(a) -$$

$$-\int\limits_{|a|\le 2r} \ln\left(2\left|1-\frac{\bar{a}e^{i\theta}}{4r}\right|\right)d\mu(a)+\int\limits_{r/2<|a|\le 2r}\ln\left|1-\frac{e^{-i\theta}a}{r}\right|d\mu(a), \tag{I}$$

де $\mu$ – міра асоційована за Ріссом з функцією $\omega$, а

$$c_k(r,\omega)=c_k(r)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\omega(re^{i\theta})e^{-ik\theta}d\theta,\ k\in Z. \tag{2}$$

Позначимо суму перших трьох доданків в (I) через $G(r,\theta)$. Ряд у правій частині (I), поділений на $\lambda(r)$, збігається рівномірно по $r$ і $\theta$ [8]. Враховуючи рівномірну неперервність функції $\ln|1-z|$ у крузі $\{z:|z|\le\frac{1}{2}\}$, приходимо до одностайної неперервності по $\theta$ сім"ї функцій $\{G(r,\theta)/\lambda(r), r>0\}$.

Позначимо останній доданок у правій частині (I) через $F(z)$, $z=re^{i\theta}$. Якщо для деяких додатних чисел $\delta$ і $R$ виконується $|\theta-\varphi|<\delta^3$ і $R/2\le|z|=r\le R$, то, прийнявши $\xi=re^{i\varphi}$, одержимо

$$F(\xi)-F(z)=\int\limits_{r/2<|a|\le 2r}\ln\left|\frac{\xi-a}{z-a}\right|d\mu(a)\le\int\limits_{R/4<|a|\le 2R}\ln\left(1+\frac{2\delta^3R}{|z-a|}\right)d\mu(a).$$

Приймемо $H=\delta R$, $S=\mu(\{z: R/4<|z|\le 2R\})$. Позначимо через $\mu^*$ звуження $\mu$ на кільце $\{z: R/4<|z|\le 2R\}$. З огляду на теорему 4 з праці [3] в $C$ знайдеться система кругів зі загальною сумою радіусів $2H$ така, що коли $z$ не належить вказаній системі кругів, то для всіх $t$ має місце нерівність

$$\mu_z^*(t)=\mu^*(\{a:|z-a|\le t\})\le\frac{S}{H}t.$$

Тоді для всіх $z=re^{i\theta}$, $R/2\le|z|\le R$ зовні цієї системи кругів і для всіх $\xi=re^{i\varphi}$, що задовольняють умову $|\theta-\varphi|<\delta^3$, виконується

$$F(\xi)-F(z)\le\int\limits_{R/4<|a|\le 2R}\ln\left(1+\frac{2\delta^3R}{|z-a|}\right)d\mu(a)=\int\limits_{C}\ln\left(1+\frac{2\delta^3R}{|z-a|}\right)d\mu^*(a)=$$

$$= \int_0^{+\infty} \ln\left(1+\frac{2\delta^3 R}{t}\right) d\mu_z^*(t) \leq \int_0^{S} \ln\left(1+\frac{2\delta^2 S}{t}\right) dt \leq$$

$$\leq \sqrt{2}\,\delta\sqrt{S}\int_0^S \frac{dt}{\sqrt{t}} = 2\sqrt{2}\,\delta S \leq A\delta\lambda(r), \tag{3}$$

де $A$ – деяка стала, не залежна від $R$.

Приймемо тепер $R_n = 2^n$, $n \in N$ і для кожного $R_n$ побудуємо множину виняткових кругів з сумою радіусів $2\delta R_n$ таку, що для всіх $z$, які лежать зовні цієї множини, і для всіх $\xi$ таких, що $|\theta-\varphi|<\delta^3$, $R_n/2 \leq |z| = |\xi| \leq R_n$, виконується нерівність (3).

Тоді всі центри множини виняткових кругів лежать у кільці

$$\left\{z : \left(\frac{1}{4}-2\delta\right)R_n < |z| < (2+2\delta)R_n\right\}.$$

Крім того, виключимо круг $\{z : |z| \leq 1\}$. Тоді в крузі $\{z : |z| \leq r\}$ містяться точки виняткових кругів, сума радіусів яких не перевищує $1+2\delta(R_1+\ldots+R_n)$, де $R_n$ – найбільше число таке, що $\left(\frac{1}{4}-2\delta\right)R_n \leq r$. Отже, ця сума радіусів не перевищує

$$1+4\delta R_n \leq 1+\frac{16\delta}{1-8\delta}\, r \leq 1+20\delta r \leq 1+\frac{\eta}{2}\, r, \tag{4}$$

якщо $\delta < \eta/40$.

Визначимо тепер множину $E_\eta$ таким чином: $r \in E_\eta$, якщо існує $re^{i\theta}$, яке належить множині виняткових кругів. Тоді при $r \notin E_\eta$, $\delta < \eta/40$ і $|\varphi-\theta| < \delta^3$ виконується (3), причому з (4) випливає, що верхня лінійна щільність множини $E_\eta$ не перевищує $\eta$.

Помінявши місцями $\varphi$ і $\theta$, отримаємо, що при $r \notin E_\eta$ $|\theta-\varphi| < \delta^3$ виконується $F(z)-F(\xi) \leq A\delta\lambda(r)$, яка разом з (3) дає одностайну неперервність по $\theta$ сім'ї функцій

$$\left\{F(re^{i\theta})/\lambda(r),\ r \notin E_\eta\right\}.$$

Лема 2. Для того щоб функція $\omega \in \Lambda_\delta$ належала класу $\Lambda_\delta^0$, необхідно та досить, щоб для кожного $k \in \mathbb{Z}$ існувала скінчення границя

$$\lim_{r\to\infty} \frac{c_k(r,w)}{\lambda(r)} = c_k, \tag{5}$$

де $c_k(r,w)$ визначені в (2).

Доведення цілком аналогічне доведенню теореми I з праці [4].

Означення 2. Якщо $w \in \mathring{\Lambda}_\delta$, то функція

$$h(\theta,w) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{ik\theta},$$

де $c_k$ визначаються співвідношеннями (5), називається індикатором функції $w$.

Лема 3 [5]. Якщо функція $\lambda(r)$ опукла відносно $\ln r$, то

$$M_\gamma \le 1 + M^3(\gamma-1),$$

де $1<\gamma<2$ і $M_\gamma = \sup\left\{\frac{\lambda(\gamma r)}{\lambda(r)} : r>0\right\}$.

Наведемо ще дві леми.

Лема 4. Нехай $w \in \mathring{\Lambda}_\delta$. Тоді мають місце твердження:

I) $h(\theta,w)$ – неперервна функція;

2) для кожного $q$, $1 \le q < +\infty$,

$$\lim_{r\to\infty} \left\| \frac{w(re^{i\theta})}{\lambda(r)} - h(\theta,w) \right\|_q = 0,$$

де $\|\cdot\|_q$ – норма в просторі $L_q[0,2\pi]$.

Лема 5. Нехай $w \in \Lambda_\delta$. Тоді для кожного $k \in \mathbb{Z}$ існує стала $A_k > 0$ така, що при $1<\gamma<2$, $r>0$ виконується

$$|c_k(\gamma r,w) - c_k(r,w)| \le A_k(\gamma-1)\lambda(r).$$

Теорема. Нехай $w \in \mathring{\Lambda}_\delta$. Тоді існує $E_0$ множина нульової лінійної щільності така, що

$$\lim_{\substack{r\to\infty \\ r\notin E_0}} \frac{w(re^{i\theta})}{\lambda(r)} = h(\theta,w)$$

рівномірно для $\theta \in R$.

Навпаки, нехай $\omega \in \Lambda_\delta$, функція $\lambda(r)$ опукла відносно $\ln r$ та існують $E_0$ множина нульової лінійної щільності, а також дійсна функція $H(\theta)$ такі, що

$$\lim_{\substack{r\to\infty \\ r\notin E_0}} \frac{\omega(re^{i\theta})}{\lambda(r)} = H(\theta)$$

рівномірно для $\theta\in\mathbb{R}$. Тоді $\omega\in\Lambda_\delta^{\circ}$ і $h(\theta,\omega)=H(\theta)$ для всіх $\theta\in\mathbb{R}$.

<u>Доведення</u>. Беручи до уваги леми I, 4, доведення першої частини теореми дістаємо аналогічно доведенню теореми 5 з праці [4].

Зауважимо, що функція $H(\theta)$ неперервна на $\mathbb{R}$ і $2\pi$ - періодична, оскільки функція $\frac{1}{\lambda(r)}\omega(re^{i\theta})$ неперервна по $\theta$ на $\mathbb{R}$ для значень $r$ з деякої необмеженої множини, $2\pi$ - періодична і прямує до $H(\theta)$ рівномірно по $\theta$. Позначимо через $d_k$ коефіцієнти Фур"е функції $H(\theta)$. Тоді для довільного $\varepsilon>0$, $\gamma r\notin E_0$, $1<\gamma$, $r>R_1=R_1(\varepsilon)$ маємо

$$|c_k(\gamma r)-d_k\lambda(\gamma r)|<\varepsilon\lambda(\gamma r),\ k\in\mathbb{Z}. \tag{6}$$

Оскільки множина $E_0$ має нульову лінійну щільність, то для довільного $\gamma_0$, $1<\gamma_0<2$ знайдеться $R_2=R_2(\gamma_0)$ таке, що при $E_0\ni r>R_2$ існує $\gamma$, $1<\gamma\le\gamma_0$, для якого $\gamma r\notin E_0$. Тоді, використавши леми 3,5 і співвідношення (6), при $E_0\ni r>R_0=\max(R_1,R_2)$ дістаємо

$$|c_k(r)-d_k\lambda(r)|\le|c_k(\gamma r)-d_k\lambda(\gamma r)|+$$
$$+|c_k(\gamma r)-c_k(r)|+|d_k||\lambda(\gamma r)-\lambda(r)|\le$$
$$\le M\varepsilon\lambda(r)+A_k(\gamma_0-1)\lambda(r)+|d_k|M^3(\gamma_0-1)\lambda(r).$$

Звідси випливає, що $\lim\limits_{r\to+\infty}\frac{1}{\lambda(r)}c_k(r,\omega)=d_k$. На підставі леми 2 $\omega\in\Lambda_\delta^{\circ}$. Теорема доведена.

Висловлюємо щиру подяку А.А.Кондратюку за керівництво роботою.

Список літератури: І. А з а р и н В.С. О регулярности роста коэффициентов Фурье логарифма модуля целой функции. - Теория функций, функциональный анализ и их приложение, 1977, вып. 27, с. 9-21. 2. В а с и л ь к і в Я.В. Деякі властивості $\delta$ -субгармонічних функцій скінченного $\lambda$ -типу. - Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат., 1983, вип. 21, с. 14-21. 3. Г р и ш и н А.Ф. О регулярности роста субгармонических функций. - Теория функций, функциональный анализ и их приложение, 1968, вып. 6, с. 3-29. 4. К о н д р а т ю к А.А. Метод рядов Фурье для целых и мероморфных функций вполне регулярного роста. - Мат. сб., 1978, т 106 /148/, № 3, с. 386-408. 5. К о н д р а т ю к А.А. Асимптотична поведінка та кількість дефектних значень цілих функцій цілком регулярного зростання. - Доп. АН УРСР, 1981, № 5, с. 11-13. 6. Л е в и н Б.Я. Распределение корней целых функций. - М.: Гостехиздат, 1956. - 632 с. 7. Х е й м а н У., К е н н е д и П. Субгармонические функции. - М.: Наука, 1980. - 304 с. 8. Noverraz P. Fonctions plurisousharmoniques et analytiques dans les espaces topologiques complexes. - Ann. Inst. Fourier, Grenoble, 1969, N 19, p. 419-493.

Стаття надійшла до редколегії 14.02.83

УДК 517.51

Л.Є.Базилевич

## ПРО СЕЛЕКЦІЮ ФУНКЦІЇ ВІДСТАНІ ДО КОМПАКТА

З довільним компактом $M \subset \mathbb{R}^n$ пов"язане многозначне відображення $\varphi : [0,\infty[ \to 2^{\mathbb{R}^n}$, $\varphi(r) = E(M,r)$, де $E(M,r) := \{y \in \mathbb{R}^n \mid d(M,y) = r\}$; $2^{\mathbb{R}^n}$ - множина компактних підмножин $\mathbb{R}^n$; $d$ - евклідова метрика. Розглянемо задачу побудови неперервної селекції відображення $\varphi$, тобто неперервного відображення $\alpha : [0,\infty[ \to \mathbb{R}^n$ такого, що $\alpha(r) \in \varphi(r)$, $r \in [0,\infty[$