Висловлюємо щиру подяку А.А.Кондратюку за керівництво роботою.

Список літератури: I. А з а р и н В.С. О регулярности роста коэффициентов Фурье логарифма модуля целой функции. – Теория функций, функциональный анализ и их приложение, 1977, вып. 27, с. 9–21. 2. В а с и л ь к і в Я.В. Деякі властивості δ -субгармонічних функцій скінченного λ -типу. – Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат., 1983, вип. 21, с. 14–21. 3. Г р и ш и н А.Ф. О регулярности роста субгармонических функций. – Теория функций, функциональный анализ и их приложение, 1968, вып. 6, с. 3–29. 4. К о н д р а т ю к А.А. Метод рядов Фурье для целых и мероморфных функций вполне регулярного роста. – Мат. сб., 1978, т 106 /148/, № 3, с. 386–408. 5. К о н д р а т ю к А.А. Асимптотична поведінка та кількість дефектних значень цілих функцій цілком регулярного зростання. – Доп. АН УРСР, 1981, № 5, с. 11–13. 6. Л е в и н Б.Я. Распределение корней целых функций. – М.: Гостехиздат, 1956. – 632 с. 7. Х е й м а н У., К е н н е д и П. Субгармонические функции. – М.: Наука, 1980. – 304 с. 8. Noverraz P. Fonctions plurisousharmoniques et analytiques dans les espaces topologiques complexes. – Ann. Inst. Fourier, Grenoble, 1969, N 19, p. 419–493.

Стаття надійшла до редколегії 14.02.83

УДК 517.51

Л.Є.Базилевич

ПРО СЕЛЕКЦІЮ ФУНКЦІЇ ВІДСТАНІ ДО КОМПАКТА

З довільним компактом $M \subset \mathbb{R}^n$ пов"язане многозначне відображення $\varphi: [0,\infty[\to 2^{\mathbb{R}^n}$, $\varphi(r) = E(M,r)$, де $E(M,r) := \{y \in \mathbb{R}^n / d(M,y) = r\}$; $2^{\mathbb{R}^n}$ – множина компактних підмножин $\mathbb{R}^n$; d – евклідова метрика. Розглянемо задачу побудови неперервної селекції відображення φ, тобто неперервного відображення $\alpha: [0,\infty[\to \mathbb{R}^n$ такого, що $\alpha(r) \in \varphi(r)$, $r \in [0,\infty[$

("лінії втечі" за термінологією з праці [1], де задача розв"язана для випадку, коли M – замикання однозв"язної жорданової області в $\mathbb{R}^2$).

Розглянемо загальний випадок. Зауважимо, що відображення φ не є, взагалі кажучи, півнеперервним знизу [2], тому неможливо застосувати відомі результати про селекцію [3]. Побудова диференційовної селекції розглядатиметься в іншій публікації.

Введемо необхідні означення та позначення. Доведення лем 1–4 достатньо очевидні й опускаються.

Зафіксуємо деякий компакт $M\subset\mathbb{R}^n$, ніяка компонента зв"язності якого не розрізає простору $\mathbb{R}^n$. Позначимо

$$P(x):=\{y\in M/d(x,y)=d(x,M)\},\ x\in\mathbb{R}^n\setminus M.$$

Лема 1. Нехай $\{x_n\}$ – послідовність точок множини $\mathbb{R}^n\setminus M$ і $x\in\mathbb{R}^n\setminus M$ її точка згущення. Тоді $P(x)\cap\lim\limits_{n\to\infty}P(x_n)\neq\emptyset$.

Нехай $p(x)\in P(x)$. Відрізок $]p(x),x]$ назвемо проекційним відрізком з основою $p(x)$ і кінцем x. Два різні проекційні відрізки не можуть перетинатися по внутрішній точці одного з них; вони або мають спільний кінець, або один з них є частиною іншого. Проекційний відрізок, який не міститься в жодному іншому, називаємо максимальним.

Нехай $r>0$. Позначимо $E^+(M,r):=\{y\in\mathbb{R}^n/d(y,M)>r\}$, $E^-(M,r):=\{y\in\mathbb{R}^n\setminus M/d(y,M)<r\}$. Через $E^{+\infty}(M,r)$ запишемо необмежену компоненту зв"язності множини $E^+(M,r)$. Області $E^{+\infty}(M,r)$ монотонно зростають при спаданні r. Маємо $E^{+\infty}(M,r)\subseteq\bigcap\limits_{r'<r}E^{+\infty}(M,r')$. Позначимо $G':=\bigcup\limits_{r>0}Bd\,E^{+\infty}(M,r)$.

Кажемо, що точку $x\in Cl\,X$ можна з"єднати з нескінченністю в множині X, якщо існує дуга $\gamma(t),\ t\in[0,\infty[$ така, що $\gamma(0)=x$, $\gamma(t)\in X$ при $t\in]0,\infty[$ і функція $g(t):=d(\gamma(t),M)$ монотонно прямує до нескінченності.

Лема 2. Множина точок з $BdE^{+\infty}(M,r)$, які не є кінцями максимальних проекційних відрізків, всюди щільна в $BdE^{+\infty}(M,r)$.

Лема 3. Нехай $y \in BdE^{+\infty}(M,r), p(y) \in P(y)$. Тоді $]p(y),y] \subset G'$.

Лема 4. Нехай $]p(x),x]$ – максимальний проекційний відрізок і $y \in]p(x),x] \cap G'$. Тоді $]y,x[\cap G' \neq \emptyset$.

Позначимо через Ω множину компонент зв"язності компакта M. Нехай $M' \in \Omega$. Через $M(M',r)$ позначимо об"єднання таких компонент $A \in \Omega$, що існує послідовність $A_0 = A, A_1, \dots A_{n-1}, A_n = M'$ елементів $A_i \in \Omega$, для якої $d(A_{i-1}, A_i) < 2r, i \in \overline{1,n}$ ($n \in N$ – довільне). Приймемо $D(M',r) := BdE^{+\infty}(M(M',r),r), G := \bigcup_{r>0} D(M',r)$. Множини $D(M',r)$ замкнені та зв"язні. Для того щоб існувала неперервна селекція функції відстані до M з початком $c \in BdM'$ $(\alpha(0)=c)$, необхідно, щоб множина G була зв"язна.

Зробимо такі припущення. Нехай $\Lambda := \{r \in R, r>0 / N(M',r) := \bigcap_{r'>r} M(M',r') \setminus M(M',r) \neq \emptyset\}$. Множина Λ не більш як злічення з єдиною можливою точкою згущення – нулем. Тому відображення $\psi :]0,\infty[\to 2^{R^n}, \psi(r) = M(M',r)$ є зростаючою східчастою неперервною зліва функцією, яка має стрибки в точках множини Λ. Нехай далі $D^*(M',r) := D(M',r) \cap \lim_{r' \to r} D(M',r')$, $G^* = \bigcup_{r>0} D^*(M',r)$ (зв"язність G^* випливає зі зв"язності G). Якщо $r \notin \Lambda$, то $D(M',r) = D^*(M',r)$. Тому для r, R таких, що $[r,R] \cap \Lambda = \emptyset$, маємо $G' \cap D = G \cap D = G^* \cap D$, $D := E^+(M(M',r),r) \cap E^-(M(M',R),R)$.

Лема 5. Множина точок $D^*(M',r)$, які не є кінцями максимальних проекційних відрізків, всюди щільна в $D^*(M',r)$.

Доведення. Вважаємо, що $r \in \Lambda$ (при $r \notin \Lambda$ див. лему 2). Нехай $x \in D^*(M',r)$. Якщо $K(x,\delta) \cap E^-(N(M',r),r) = \emptyset$ для деякого $\delta > 0$ / $K(x,\delta) := \{y \in R^n / d(x,y) < \delta\}$), то доведення також зводиться до леми 2. У протилежному випадку існує точка $p_2(x) \in P(x) \cap N(M',r)$. Нехай $p_2(x) \in P(x) \cap M(M',r)$. Тоді $p_1(x), p_2(x)$ і x розташовані на одній прямій.

Зауважимо, що коли $Y = Bd\,J$, де J – об"єднання деякої сукупності куль радіуса R, та існує куля K радіуса R така, що $Int\,J \cap K = \varnothing$, то для будь-якої точки $x \in Bd\,K \cap Y$ існує $\delta > 0$ таке, що множина $K(x,\xi) \cap Y$ гомеоморфна диску D^{n-1} для всіх $\xi \in]0, \delta]$. Прийнявши $Y = D(M',r)$ і $Y = D(N(M',r),r)$, знайдемо числа δ_1, δ_2 і позначимо $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$. Припустимо, що всі точки з $K(x,\delta) \cap D^*(M',r)$ є кінцями максимальних проекційних відрізків. Тоді $Bd_{K(x,\delta)}\,(E^{+\infty}(M(M',r),r) \cap K(x,\delta)) \subset D(N(M',r),r) \cap K(x,\delta)$, що неможливо, оскільки остання множина, ні жодна її підмножина не відділяє в $K(x,\delta)$ точок $E^+(M,r)$ від точок $E^-(M,r)$. Лема доведена.

Нехай $\Gamma(a,b) = \alpha([a,b])$, де α – неперервна селекція відображення $\varphi/[r,R]$, причому $\alpha(r) = a \in D^*(M',r)$ і $\alpha(R) = b \in D^*(M',R)$, а $\mathcal{T}(a,b) := \{\Gamma(a,b)\}$.

Теорема I. Для довільних точок $a \in D^*(M',r)$ і $b \in D^*(M',R)$ $R > r$, $R, r \in \Lambda$ маємо $\mathcal{T}(a,b) \neq \varnothing$.

Доведення. Загальний випадок легко зводиться до ситуації, коли a і b не лежать на одному проекційному відрізку та $[r,R] \cap \Lambda = \varnothing$ (застосовуємо лему 5). Нехай $a_1 \in D(M',r)$ таке, що $d(a,a_1) < \alpha$ $(0 < \alpha \ll R - r, r)$ і a_1 не є кінцем максимального проекційного відрізка (див. лему 2), а $z_1 \in G \cap E^-(M(M',r),r)$ таке, що існує $p(z_1) \in P(z_1)$, для якого $a_1 \in]p(z_1), z_1]$ (лема 4). Позначимо $R' := d(z_1,M)$, $x_1 := [b, p(b)[\cap D(M',R')$, $p(b) \in P(b)$. Візьмемо $y_1 \in]a_1, z_1[$ таке, що $0 < r' - r < \alpha$, $r' := d(M, y_1)$.

Через $L(y_1, x_1, \alpha)$ позначимо послідовність $q_0 = y_1, q_1, \dots, q_N = y_1$, яка задовольняє умови $d(q_{i-1}, M) < d(q_i, M)$, $0 < d(q_i, q_{i-1}) < 3\alpha$ і $0 < \beta^*(i-j) < d(q_i, q_j)$ для всіх $i \in \overline{1,N}$, $j < i$, а через $\mathcal{L}(y_1, x_1, \alpha)$ – множину точок послідовності $L(y_1, x_1, \alpha)$. Покажемо, що послідовність $L(y_1, x_1, \alpha)$ існує.

На $D(M', R')$ виберемо послідовність точок $s_0 = z_1, s_1, \ldots, s_n = z_1$ таку, що $d(s_i, s_{i-1}) < \alpha$, $i \in \overline{1,n}$ / n достатньо велике, щоб $(R'-r')/n : \beta < \alpha$ /. Проведемо проекційні відрізки $[s_i, p(s_i)[$ і позначимо

$$t_i := [s_i, p(s_i)[\cap D(M', r'+\beta \cdot i), \; i \in \overline{0,n} \; (t_0 = y_1, t_n = s_n = x_1)$$

$$t_i^* := [s_i, p(s_i)[\cap D(M', r'+\beta(i+1)), \; i \in \overline{0,n-1} \; (t_{n-1}^* = s_{n-1}).$$

Якщо для деякого $i \in \overline{1,n-1}$ $d(t_i, t_{i-1}^*) \geq \alpha$, то на $D_{n(i)}(A, r+\beta i)$ обираємо послідовність точок $k_i^0 = t_{i-1}^*, k_i, \ldots k_i^{n(i)}$ так, щоб $d(k_i^j, k_i^{j-1}) < \alpha$, $j \in \overline{1, n(i)}$. Проводимо проекційні відрізки $[k_i^j, p(k_i^j)[$ і на них обираємо точки $\tilde{k}_i^j := [k_i^j, p(k_i^j)[\cap D(M, r' + \beta(i-1) + \beta j / n(i))$ $(\tilde{k}_i^0 = t_{i-1})$.

Нехай $\beta^* := \min\{\beta / \max\{n(i) \mid i \in \overline{1,n-1}\}, r'-r\}$. Перепозначивши всі (різні) точки t_i, $\tilde{k}_i^j$, одержимо шукану послідовність.

$\Gamma(a,b)$ шукаємо у вигляді $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} Q_i \cup \bigcup\limits_{j=i}^{\infty} T_i^j$, де T_i^j — послідовність $L(q_0^{i,j}, q_{N(i,j)}^{i,j}, \alpha/2^{n-1})$. Приймемо $Q_1 := [b, x_1[\cup \{a\}$, $T_1^1 := \overset{\circ}{L}(y_1, x_1, \alpha)$ і припустимо, що Q_i, T_i^j, $i \in \overline{1,n}$, $j \in \overline{i,n}$ вже побудовані.

Точку a_{n+1} обираємо аналогічно до a_1, тільки щоб $d(a, a_{n+1}) < \frac{\alpha}{2^n}$ z_{n+1} і y_{n+1} аналогічно до z_1 і y_1, але $0 < r'_{n+1} - r < \frac{\alpha}{2^n}$ і $R'_{n+1} := d(M, z_{n+1}) < d(M, q_0^{n,n})$, та позначимо $x_{n+1} := [q_0^{n,n}, p(q_0^{n,n})[\cap D(M', R'_{n+1})$. Приймемо $Q_{n+1} :=]q_0^{n,n}, x_{n+1}[$,

$$T_{n+1}^{n+1} := \overset{\circ}{L}(y_{n+1}, x_{n+1}, \frac{\alpha}{2^n}),\; T_j := \overset{\circ}{L}(q_0^{j,n+1}, q_{N(j,n)}^{j,n+1}, \alpha/2^n) = \bigcup_{i=1}^{N(j,n)} \overset{\circ}{L}(q_{i-1}^{j,n}, q_i^{j,n}, \alpha/2^{n-1}).$$

З побудови випливає, що $\Gamma(a,b)$ гомеоморфно відрізку $[0,1]$ і $\Gamma(a,b) \cap D(M', r') = \{*\}$, $r' \in [r, R]$. Тому $\Gamma(a,b) \in \mathcal{T}(a,b) \neq \emptyset$.

Теорема доведена.

Для простору $\mathbb{R}^2$ наявна така теорема.

Теорема 2. Існує неперервна селекція функції відстані до континууму M з початком у будь-якій точці $x \in Bd\,M'$, яку можна з"єднати з нескінченністю (множина таких точок міститься, але не збігається з множиною досяжних зовні точок компакта M').

Для вищих розмірностей теорема 2, взагалі кажучи, неправильна. Проте для довільної точки $x \in Bd\,M'$ можна побудувати таку селекцію $d(r)$, що $\lim\limits_{r\to 0} d(r) \ni x$. Справді, виберемо послідовності точок з G^n: $\{x_n\} \to x$ таку, що $\{d(M,x_n)\}$ монотонно прямує до нуля в множині $\mathbb{R}_+ \setminus \Lambda$ і $\{y_n\}$ таку, що послідовність $\{d(M,y_n)\}$ монотонно прямує до нескінченності в $\mathbb{R}_+ \setminus \Lambda$, причому $d(M,x_1) < d(M,y_1)$. Тоді $d(]0,\infty[) =$

$$= \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \Gamma(y_n, y_{n+1})\right) \cup \Gamma(x_1, y_1) \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} \Gamma(x_{n+1}, x_n).$$

Список літератури: 1. Базилевич Л.Е., Песин И.Н. Две задачи о расстоянии Фреше и о линии побега.–Сиб. мат. журн., 1981, т. 22, № 4, с. 14–22. 2. Куратовский К. Топология. – М.: Мир, 1969. Т. 2. – 624 с. 3. E. Michael. Continuous selections and finite-dimensional sets – Pacif. Journ. of Math., 1980, vol. 87, N 1, p. 189-197.

Стаття надійшла до редколегії 14.02.83