УДК 513.83

Б.М.Бокало, І.Й.Гуран

ОБМЕЖЕНІСТЬ У ТОПОЛОГІЧНИХ КІЛЬЦЯХ

У праці [4] для кожного нескінченного кардинала τ введено поняття τ-обмеженої топологічної групи. Клас ω-обмежених топологічних груп має ряд хороших властивостей і допускає повне описання. Ці групи топологічно ізоморфні підгрупам добутків сепарабельних метризованих груп.

Поширимо поняття ω-обмеженості на топологічні кільця. Оскільки кільце – алгебраїчна структура з двома бінарними операціями, то перш за все виникає питання: який зв"язок між обмеженістю адитивної групи кільця і обмеженістю його мультиплікативної півгрупи? З"ясуємо, що ці обмеженості нееквівалентні.

Термінологія та позначення. Розглянемо лише віддільні кільця з одиницею. Відкриті околи нуля кільця позначатимемо великими літерами U, V, W, ... з індексом 0, а 0 коли одиниці з індексом I. Скрізь далі ω – перший нескінченний, а ω_1 – перший незчисленний кардинали. Дійсні числа і їх підмножини наділяються стандартними топологіями. Під ізоморфним ущільненням розумітимемо неперервний ізоморфізм кільця.

I. Обмежені та ω-обмежені кільця

I.I.Означення. Підмножина B топологічного кільця R називається $(\omega,+)$-обмеженою ($(\omega,\cdot)$-обмеженою), якщо для довільного околу U_0 (U_1) існує така підмножина $A\subset R, |A|\leq\omega$, що $U_0+A\supseteq B$ ($U_1\cdot A\supseteq B$).

У випадку $B=R$ кільце R називається $(\omega,+)$-$(\omega,\cdot)$-обмеженим. Клас всіх $(\omega,+)$- ($(\omega,\cdot)$-) обмежених кілець позначатимемо через $\mathcal{K}^{+}_{\omega}$, ($\mathcal{K}^{\circ}_{\omega}$).

1.2. Твердження. Якщо R фінально компактне кільце, то $R \in \mathcal{K}^+_\omega \cap \mathcal{K}^\circ_\omega$. Зокрема, кільце дійсних чисел $\mathbb{R}$ належить як класу $\mathcal{K}^+_\omega$, так і класу $\mathcal{K}^\circ_\omega$.

1.3. Приклад. $\mathcal{K}^\circ_\omega \not\subset \mathcal{K}^+_\omega$. Приймемо $\mathscr{G}(0) = \{x \in \mathbb{R}^\omega / x = (x_0, \dots x_i, \dots) / |\{i / x_i \neq 0\}| < \omega\}$. Розглянемо кільце R_1 нескінченних матриць, стрічки яких належать $\mathscr{G}(0)$. Одиницею кільця R_1 є матриця:

$$E = \begin{cases} a_{ij} = 1, & \text{при } i = j; \\ a_{ij} = 0, & \text{при } i \neq j. \end{cases}$$

Для всякого $n \in \omega$ через $\mathcal{J}_n$ позначимо підмножину таких матриць $(a_{ij}) \in R_1$, що $a_{ij} = 0$ при $1 \leq i \leq n$; $i, j \in \omega$.
Очевидно, $\mathcal{J}_n$ – правий ідеал кільця R_1 для кожного $n \in \omega$. Система $\mathcal{B} = \{\mathcal{J}_n / n \in \omega\}$ – задовольняє умови бази околів нуля топологічного кільця [2]. Задамо на R_1 топологію, породжену системою $\mathcal{B}$, і покажемо, що R_1–$(\omega, \cdot)$ –обмежене кільце. Множина $U_1^n = \mathcal{J}_n + E$ є околом одиниці. $\{U_1^n / n \in \omega\}$ – база околів одиниці кільця R_1. Позначимо через E_n матрицю

$$E_n = \begin{cases} a_{ij} = 1, & \text{при } j = n - i + 1; \\ a_{ij} = 0, & \text{при } j \neq n - i + 1. \end{cases}$$

Нехай U_1^n – довільний базисний окіл одиниці кільця R_1. Тоді $E_n U_1^n = R_1$. Отже, R_1 – $(\omega, \cdot)$ – обмежене кільце. Легко бачити, що R_1 не $(\omega, +)$ –обмежене кільце.

1.4. Приклад. $\mathcal{K}^+_\omega \not\subset \mathcal{K}^\circ_\omega$. Нехай $R_2 = \{z + a_1 x + \dots + a_n x^n / n \in N, z \in Z, a_i \in \mathbb{R}\}$. Розглянемо довільні раціональні додатні числа $b, c \in Q^+$. Через U_{bc} позначаємо множину

$$U_{bc} = \{a_1 x + \dots + a_n x^n / a_i \in]-\tfrac{1}{(bc)^i}, \tfrac{1}{(bc)^i}[, i = 1, \dots, n; n \in N\}.$$

Безпосередньою перевіркою визначаємо, що система $\mathcal{B} = \{U_{bc} / b, c \in Q^+\}$ задовольняє умови бази околів нуля топологічного кільця. Задамо на R_2 топологію, породжену системою $\mathcal{B}$. Очевидно, що $R_2 \in \mathcal{K}_\omega^+$. Покажемо, що кільце R_2 не $(\omega,\cdot)$ - обмежене. Припустимо протилежне, тобто, що для довільного околу нуля $U_{\delta c}$ кільця R_2 існує зчисленна множина $Q \subset R_2$ така, що $(U_{\delta c}+1)Q = R_2$. Розглянемо многочлени $\{ax^2+x+1 \mid a \in R\}$. Згідно $(\omega,\cdot)$ -обмеженості існують многочлени $p(x) \in U_{\delta c}$ і $q(x) \in Q$ такі, що $p(x)\cdot q(x) = ax^2+x+1$. Оскільки многочлен ax^2+x+1 при $a > \frac{1}{4}$ незвідний над полем дійсних чисел, то можливий лише один з таких двох випадків:

1) $\deg p(x) = 2,\ q(x) = const;$

2) $\deg q(x) = 2,\ p(x) = const.$

Оскільки коефіцієнти $p(x)$ обмежені, то випадок 1) неможливий; випадок 2) теж неможливий з огляду на те, що множини $\{ax^2+x+1 \mid a > \frac{1}{4}\}$ і Q мають різну потужність.

Наступні теореми дають достатні умови на кільце для того, щоб з його $(\omega,\cdot)$ -обмеженості випливала $(\omega,+)$ -обмеженість.

<u>1.5. Теорема</u>. Якщо R - $(\omega,\cdot)$ -обмежене кільце і в R існує $(\omega,+)$ -обмежений окіл U_0, то R - $(\omega,+)$ -обмежене кільце.

<u>1.6. Наслідок</u>. Якщо $\mathcal{K}$ - клас локально компактних або локально фінально компактних кілець, то $\mathcal{K} \cap \mathcal{K}_\omega^{\cdot} \subseteq \mathcal{K} \cap \mathcal{K}_\omega^+$.

Нагадаємо, що кільце R називається обмеженим зліва (справа), якщо для довільного околу нуля U_0 існує V_0 в кільці R, що $V_0 \cdot R \subseteq U_0$ $(R \cdot V_0 \subseteq U_0)$.

<u>1.7. Теорема</u>. Нехай $\mathcal{T}$ - недискретна кільцева топологія на полі P. Якщо топологічне кільце $(P,\mathcal{T})$ локально обмежене зліва (справа), то з його $(\omega,\cdot)$ - обмеженості випливає $(\omega,+)$ - обмеженість.

2. Ізоморфні ущільнення топологічних кілець

Дамо достатні умови на топологічне кільце, нуль якого є G_δ -множиною, при яких воно ізоморфно ущільнюється на метризоване кільце. Як свідчить приклад 2.5, у загальному випадку це не так.

2.1. Означення. Кільце називається врівноваженим, якщо для кожного околу U_0 існує така зчисленна система околів $\gamma=\{V_0^n \mid n\in\omega\}$, що для будь-якого $a\in R$ існує $n_0\in\omega$, що $aV_0^{n_0}\subseteq U_0$ і $V_0^{n_0}a\subset U_0$. Очевидно, будь-яке метризоване кільце врівноважене.

2.2. Твердження. Якщо $R-(\omega,+)$ - обмежене кільце, то R - врівноважене кільце.

2.3. Теорема. Нехай R - врівноважене кільце, нуль якого G_δ - множина. Тоді R ізоморфно ущільнюється на метризоване кільце.

2.4. Наслідок. Якщо $R-(\omega,+)$ - обмежене кільце, нуль якого G_δ - множина, то R - ізоморфно ущільнюється на сепарабельне метризоване кільце. Модифікуючи положення з праці [5], маємо таке.

2.5. Приклад. Нехай $\mathcal{M}_2(R)$ - кільце матриць другого порядку над полем дійсних чисел. Розглянемо кільце $K=\Pi\{K_\alpha \mid \alpha\in\omega_1\}$, де $K_\alpha=\mathcal{M}_2(R)$ для всіх $\alpha\in\omega_1$ в box - топології [3]. Нуль, очевидно, кільця K є G_δ -множиною. Припустимо, що K - ізоморфно ущільнюється на топологічне кільце з метризованою топологією. Нехай її база в нулі $\mathcal{B}_0=\{V_0^n \mid n\in\omega\}$.

Виберемо стандартні ящики U^n так, що $U_0^n\subset V_0^n$ для всіх $n\in\omega$. Позначимо їх $U^n=\Pi\{U^n(\alpha) \mid \alpha\in A, |A|=\omega_1\}$. Очевидно, в кільці $\mathcal{M}_2$ існують послідовності $\{x_n\}$ і $\{y_n\}$ такі, що $x_ny_n\to e$, $y_nx_n\to e$, $x_n\to 0$. Справді, достатньо взяти $x_n=\begin{pmatrix}1/n & 0\\ 0 & 1/n\end{pmatrix}$, $y_n=\begin{pmatrix}n & 0\\ 0 & n\end{pmatrix}$. Цю умову можна записати так: для будь-якого V_0 і для кожного околу W_1 існує $y \in \mathcal{M}_2(R)$, що $yV_0 \cap W_1 \neq \emptyset$, $V_0 y \cap W_1 \neq \emptyset$.

Для кожного одиничного елемента $e_\alpha \in K_\alpha$ виберемо такі околи W_α, що $e_\alpha \in W_\alpha \subset [W_\alpha]$ і $O_\alpha \notin [W_\alpha]$.

Нехай $B = \{\alpha_k | k \in \omega\} \subset A$. Визначимо елемент $y^* \in K$:

$$y^*(\alpha) = \begin{cases} e_\alpha & \text{, якщо } \alpha \in A \setminus B; \\ y^*_{\alpha_k} & \text{, коли } \alpha_k \in B, \end{cases}$$

де $U(\alpha_k) y^*_{\alpha_k} \cap W_{\alpha_k} \neq \emptyset$; $y^*_{\alpha_k} U(\alpha_k) \cap W_{\alpha_k} \neq \emptyset$.

Для фіксованого $n \in \omega$ існує $m \in \omega$ таке, що $y^* V_0^m \subsetneq V_0^n$, $V_0^m y^* \subsetneq V_0^n$. Оскільки $U_0^m \subset V_0^m$, то $y^* U_0^m \subsetneq V_0^m$, $U_0^m y^* \subsetneq V_0^m$, тому при $k \geq m$ маємо $y^*_{\alpha_k} U_{\alpha_k} \cap W_{\alpha_k} \supseteq$ $\supseteq y^*_{\alpha_k} U_{\alpha_k} \cap W_{\alpha_k} \neq \emptyset$. Отже $V^n_{\alpha_k} \cap K_{\alpha_k} \cap W_{\alpha_k} \neq \emptyset$.

Ми показали, що для будь-якого $n \in \omega$ і для кожної зчисленної підмножини $B \subset A$ існує індекс $\alpha \in B$ такий, що $V^n_\alpha \cap K_\alpha \cap W_\alpha \neq \emptyset$. Звідси випливає, що множина тих $\alpha \in A$, що не при всіх $n \in \omega$ виконується $V^n_\alpha \cap K_\alpha \cap W_\alpha \neq \emptyset$, не більш ніж зчисленна. Отже, існує індекс $\alpha \in A$, що при всіх $n \in \omega$ справджується $U^n_\alpha \cap K_\alpha \cap W_\alpha \neq \emptyset$, яка означає $O_\alpha \subset [W_\alpha]$. Протиріччя.

Список літератури: 1. Архангельский А.В. Классы топологических групп. – Усп. мат. наук, 1981, т.36, вып. 3, с. 127–146. 2. Арнаутов В.И., Водинчар М.И., Михалев А.В. Введение в теорию топологических колец и модулей. Кишинев: Штиинца, 1981. – 212 с. 3. Бурбаки Н. Общая топология. Топологические группы. Числа и связанные с ними группы и пространства. – М.: Наука, 1969. – 392 с. 4. Гуран И.И. О топологических группах, близких к финально компактным. – Докл. АН СССР, 1981, т.256, с. 1305–1307. 5. Пестов В.Г. О вложениях топологических групп. – Мат. заметки, 1982, т.31, № 3, с. 443–446.

Стаття надійшла до редколегії 30.05.83