УДК 513.83

М.М.Зарічний

СИМЕТРИЧНІ ДОБУТКИ, ЩО Є НЕСКІНЧЕННОВИМІРНИМИ МНОГОВИДАМИ

Пряму границю системи

$$\mathbb{R}^1 \longrightarrow \mathbb{R}^1 \times \{0\} \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \times \{0\} \subset \mathbb{R}^3 \longrightarrow \dots$$

позначимо $\mathbb{R}^\infty$. Для кожного скінченновимірного ANR - компакта X з неізольованою точкою $e \in X$ нескінченний симетричний добуток $SP(X,e)$ в розумінні А.Дольда і Р.Тома [4] є $\mathbb{R}^\infty$-многовидом [2]. Вивчимо властивості компакта X, для якого $SP(X,e)$ - $\mathbb{R}^\infty$-многовид.

У деяких місцях обмежимося тільки ескізами доведень, відсилаючи читача до аналогічних міркувань у цитованих роботах.

<u>Теорема</u>. Нехай $SP(X,e)$ - $\mathbb{R}^\infty$-многовид, де X -компакт і $e \in X$. Тоді $X \setminus \{e\} \in ANR(m)$.

<u>Доведення</u>. Для $SP(X,e)$ маємо два зображення у вигляді границь обернених систем:

$$SP(X,e) = \varinjlim \{SP^k(X), j_k\} = \varinjlim \{M_\ell, i_\ell\},$$

де j_k - природні вкладення [4]; M_ℓ - компактні поліедри; i_ℓ - вкладення (з приводу другого зображення див. працю [5]). Тоді існують m і n такі, що $X = SP^1(X) \subset M_m \subset SP^n(X)$.

Нехай $x \in X \setminus \{e\}$. Розглянемо околи U і V точок x і e такі, що $U \cap V = \varnothing$. Приймемо $W = \{[y_1, \dots, y_n] \in SP^n(X) \mid y_1 \in U, \{y_2, \dots, y_n\} \subset V\}$.

Тоді W - відкритий окіл точки $x = [x]$ в $SP^k(X)$.

Означимо ретракцію $r: W \longrightarrow U$, прийнявши $r[y_1, \dots, y_n] = z$, де $z \in \{y_1, \dots, y_n\} \cap U$. Тоді відображення $r|_{W \cap M_m}$ задає ретракцію множини $W \cap M_m$ на U. За першою теоремою

9-3149

Ханнера [I] $W \cap M_m \in ANR(\mathfrak{m})$, отже, $U \in ANR(\mathfrak{m})$. Оскільки, як показано вище, кожна точка простору $X \setminus \{e\}$ має $ANR(\mathfrak{m})$-окіл, то за другою теоремою Ханнера [I] $X \setminus \{e\} \in ANR(\mathfrak{m})$. Теорема доведена.

Далі нам знадобиться технічний результат, що нескладно доводиться методами з праці [6] (через I позначаємо сегмент $[0,1]$).

Лема I. Нехай $X = \varinjlim \{X_i, j_i\}$, де $X_1 \xrightarrow{j_1} X_2 \xrightarrow{j_2} X_3 \xrightarrow{j_3} \dots$ – пряма система метризовних ANR – компактів і вкладень. Якщо, крім цього, виконується така умова:

$(*)$ коли для кожного компакта K і вкладення $K \xrightarrow{f} X$ існує вкладення $\bar{f}: K \times I \longrightarrow X$, для якого діаграма

$$\begin{tikzcd} K \arrow[r, "\times\{0\}"] \arrow[dr, "f"'] & K \times \{0\} \arrow[r, hook] & K \times I \arrow[dl, "\bar{f}"] \\ & X & \end{tikzcd}$$

комутативна, то $X - \mathbb{R}^\infty$ -многовид.

Лема 2. Якщо в умовах леми I додатково вимагати, щоб для всіх i , то $X \cong \mathbb{R}^\infty$.

Доведення. Нехай $g: S^n \longrightarrow X$ – неперервне відображення сфери S^n в X . Тоді $g(S^n)$ лежить в деякому X_k і зі стягуваності простору X_k випливає, що відображення g гомотопне нулю. Таким чином, простір X слабо гомотопічно еквівалентний точці. А з результатів праці [5] маємо $X \cong \mathbb{R}^\infty$.

Наступний приклад показує, що в умовах теореми I не можна вимагати, щоб X був ANR -компактом.

Приклад. Компакт $Z \notin ANR$ такий, що $SP(Z,a)$-$\mathbb{R}^\infty$-многовид, $a \in Z$.

Нехай Y – компактний зв"язний ациклічний нестягуваний поліедр. Приймемо $Y_i = Y\setminus\{a\}, a\in Y, Z = \cup\{Y_i \mid i\in N\}\cup\{a\}$ - одноточкова компактифікація простору $\cup\{Y_i \mid i\in N\}$. Легко бачити, що $Z\notin ANR$.

Розглянемо $SP(Z,a)$ і покажемо, що існує абсолютний ретракт A_1 такий, що $Z=SP^1(Z)\subset A_1\subset SP(Z,a)$. Оскільки при $i\geq 1$ $H_i(Y)=0$, то за теоремою Дольда-Тома [4], $\pi_i(SP^\infty(Y,a))=0$. Оскільки $SP(Y,a)$ - R^∞ -многовид [1], то простір $SP(Y,a)$ - стягуваний [5] і отже, $SP(Y,a)\cong R^\infty$.

Для кожного $i\in N$ існує абсолютний ретракт $B_i\subset SP(Y_i\cup\{a\}a)\subset SP(Z,a)$ такий, що $Y_i\cup\{a\}\subset B_i$. Тоді можна прийняти $A_1=\cup\{B_i \mid i\in N\}$. Тепер для кожного $k\geq 2$ знайдемо абсолютний ретракт A_k такий, що $SP^k(Z)\subset A_k\subset SP(Z,a)$. Насамперед зауважимо, що $A_1\subset SP^\ell(Z)$ для деякого ℓ. Позначимо через i вкладення $A_1\hookrightarrow SP^\ell(Z)$ і означимо відображення $i_k: SP^k(A_1)\longrightarrow SP(Z,a)$ наступним способом. Нехай $x=[x_1,\ldots,x_k]\in SP^k(A)$ і $i(x_i)=[y_{1,i},\ldots,y_{j_i,i}]$; приймемо $i(x)=[y_{1,1},\ldots,y_{j_1,1},y_{1,2},\ldots,y_{j_2,2},\ldots,y_{1,k},\ldots,y_{j_k,k}]\in SP(Z,a)$.

Розглянемо комутативну діаграму

$$\begin{tikzcd} A_1^k \arrow[r, "p"] \arrow[d, hook] & SP^k(A_1) \arrow[d, "i_k"] \\ (SP(Z,a))^k \arrow[r, "q"] & SP(Z,a), \end{tikzcd}$$

де p - природне відображення A_1^k в $SP^k(A_1)$; $p(a_1,\ldots,a_k)=[a_1,\ldots,a_k]$; q - множення, $q(x_1,\ldots,x_k)=x_1\ldots x_k$. Тоді неперервність відображення i_k випливає з відкритості відображення p.

Використовуючи техніку доведення теореми I з праці [2], відображення i нескладно модифікувати у вкладення $j: SP^k(A_1) \subset SP(Z,a)$ такого, що $j|SP^k(Z) = i|SP^k(Z) = id_{SP^k(Z)}$. При цьому можна прийняти $A_k = j(SP^k(A))$, оскільки $SP^k(A) \in ANR$ [3].

Остаточно маємо $SP(Z,a) = \lim\{A_k, i'_k\}$, де $i'_k: A_k \to A_{k+1}$ – природні вкладення. Умову $(*)$ з леми I для $SP(Z,a)$ знову ж таки перевіряємо з використанням техніки доведення теореми I з праці [2].

За лемою I одержуємо, що $SP(Z,a)$ – $\mathbb{R}^\infty$-многовид.

Зауваження I. З леми 2 випливає, що для побудованого простору Z $SP(Z,a) \cong \mathbb{R}^\infty$. Оскільки $SP(I,0) \cong \mathbb{R}^\infty$, то дістаємо приклад двох компактів, нескінченні симетричні добутки яких гомеоморфні й один з цих компактів локально стягуваний, а інший ні.

Аналогічні до наведених результатів наявні, якщо замінити $\mathbb{R}^\infty$-многовиди на Q^∞-многовиди, де Q^∞ – границя такої оберненої системи (Q – гільбертовий куб, $a \in Q$):

$$Q \to Q \times \{a\} \subset Q^2 \to Q^2 \times \{a\} \subset Q^3 \to \dots$$

Список літератури: I. Б о р с у к К. Теория ретрактов. – М.: Мир, 1971. – 292 с. 2. З а р и ч н ы й М.М. Свободные топологические группы абсолютных окрестностных ретрактов и бесконечномерные многообразия. – Докл. АН СССР, 1982, т. 266, № 3, с. 541–544. 3. Ф е д о р ч у к В.В. Ковариантные функторы в категории компактов, абсолютные ретракты и $\mathbb{R}^\infty$-многообразия. – Усп. мат. наук, 1981, т. 36, вып. 3, с. 177–195. 4. Dold A., Thom R. Quasifaserungen und unendliche symmetrische Producten. – Ann. Math., Ser. 2 1958, bein 67, N2, s. 239–281. 5. Heisey R.E. Stability, classification, open embeddings and triangulation of $\mathbb{R}^\infty$-manifolds. – In: Proc. Intern. Conf. on Geom. Topology. Warszawa, PWN, 1980, p. 541–544.

6. Heisey R.E., Toruńczyk H. On the topology of direct limits of ANR's. – Pacif. Journ. of Math., 1981, vol. 93, №2, p. 307-312.

Стаття надійшла до редколегії 05.03.83

УДК 513.6

В.І.Андрійчук

КОГОМОЛОГІЇ ГРУПИ КЛАСІВ ІДЕАЛІВ І УЗАГАЛЬНЕНИХ ЯКОБІАНІВ

Наша мета показати, що стандартні наслідки дуальності Тейта-Шафаревича [6] в еліптичних кривих, визначених над локальним полем, залишаються справедливими при заміні локального поля псевдолокальним, тобто повним відносно дискретного нормування полем k з псевдоскінченним [5] полем лишків $\varkappa$, $\operatorname{char} \varkappa \neq 2,3$.

Група головних однорідних просторів узагальнених якобіанів. Нехай A – еліптична крива, визначена над псевдолокальним полем k, A_k – група k-раціональних точок кривої A, $a_0 = \infty$ (нуль групи A_k), $a_1, \dots, a_n$ – $n+1$ різних точок з групи A_k; F – замикання в A_k підгрупи, породженої точками $a_1, \dots, a_n$, $\mathfrak{m}$ – додатний дивізор на A, $J_{\mathfrak{m}}$ – узагальнений якобіан [3] кривої A відносно $\mathfrak{m}$. Існує така теорема.

Теорема 1. Якщо $\mathfrak{m}$ – дивізор виду $r_0 a_0 + r_1 a_1 + \dots + r_n a_n$ (всі $r_i > 0$), то існує невироджений зліва добуток

$$H^1(k, J_{\mathfrak{m}}) \times A_k/F \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$$

групи $H^1(k, J_{\mathfrak{m}})$ – головних однорідних просторів над $J_{\mathfrak{m}}$ і групи A_k/F.