6. Heisey R.E., Toruńczyk H. On the topology of direct limits of ANR's. - Pacif. Journ. of Math., 1981, vol. 93, №2, p. 307-312.

Стаття надійшла до редколегії 05.03.83

УДК 513.6

В.І.Андрійчук

КОГОМОЛОГІЇ ГРУПИ КЛАСІВ ІДЕАЛІВ І УЗАГАЛЬНЕНИХ ЯКОБІАНІВ

Наша мета показати, що стандартні наслідки дуальності Тейта-Шафаревича [6] в еліптичних кривих, визначених над локальним полем, залишаються справедливими при заміні локального поля псевдолокальним, тобто повним відносно дискретного нормування полем k з псевдоскінченним [5] полем лишків $\varkappa$, $\mathrm{char}\,\varkappa \neq 2,3$.

Група головних однорідних просторів узагальнених якобіанів. Нехай A - еліптична крива, визначена над псевдолокальним полем k, A_k - група k-раціональних точок кривої A, $a_0 = \infty$ (нуль групи A_k), $a_1, \dots, a_n$ - $n+1$ різних точок з групи A_k; F - замикання в A_k підгрупи, породженої точками $a_1, \dots, a_n$, $\mathfrak{m}$ - додатний дивізор на A, $J_{\mathfrak{m}}$ - узагальнений якобіан [3] кривої A відносно $\mathfrak{m}$. Існує така теорема.

Теорема 1. Якщо $\mathfrak{m}$ - дивізор виду $r_0 a_0 + r_1 a_1 + \dots + r_n a_n$ (всі $r_i > 0$), то існує невироджений зліва добуток

$$H^1(k, J_{\mathfrak{m}}) \times A_k/F \to Q/Z$$

групи $H^1(k, J_{\mathfrak{m}})$ - головних однорідних просторів над $J_{\mathfrak{m}}$ і групи A_k/F.

Доведення. Позначимо через $\mathfrak{n}$ - дивізор $a_0+a_1+\ldots+a_n$ і через ℓ/k - скінченне розширення Галуа поля констант k поля функцій $K=k(A)$ на кривій A. $\mathfrak{g}=Gal(\ell/k)$. Як відомо [4], $H^1(k,\dot{J}_m)\tilde{\to} H^1(k,\dot{J}_{\mathfrak{m}})$, тому далі розглянемо групу $H^1(k,\dot{J}_{\mathfrak{n}})$ замість групи $H^1(k,\dot{J}_{\mathfrak{m}})$. Покажемо [3], що наявна точна послідовність когомологій Галуа

$$0\longrightarrow H^1(\mathfrak{g},\dot{J}_{\mathfrak{n}}(\ell))\longrightarrow H^1(\mathfrak{g},\dot{J}(\ell))\xrightarrow{\delta} H^2(\mathfrak{g},L_{\mathfrak{n}}(\ell)),\tag{I}$$

в якій $\mathfrak{g}$ -модуль $\dot{J}_{\mathfrak{n}}(\ell)$ (відповідно $\dot{J}(\ell)$) природно ототожнюється з $\mathfrak{g}$ -модулем класів раціональних над ℓ дивізорів на A нульового степеня за модулем $\mathfrak{n}$ (відповідно 0) еквівалентності та $L_{\mathfrak{n}}(\ell)\xrightarrow{\sim}(\ell^*)^n$.

Наявна комутативна діаграма

$$\begin{array}{ccc} H^1(\mathfrak{g},\dot{J}(\ell)) & \xrightarrow{\delta} & H^2(\mathfrak{g},L_{\mathfrak{n}}(\ell)) \\ {\scriptstyle\Sigma^*}\downarrow\wr & & {\scriptstyle i^*}\downarrow\wr \\ H^1(\mathfrak{g},A_\ell) & \xrightarrow{\varphi} & (H^2(\mathfrak{g},\ell^*))^n, \end{array}$$

в якій $\sum^*$ індукований додаванням на A, i^* індукований i, для $\alpha\in H^1(\mathfrak{g},A_\ell)$; $\varphi(\alpha)=(-(\alpha,a_1),\ldots,-(\alpha,a_n))$, де (α,a_i) - результат добутку за Тейтом-Шафаревичем класу α з $a_i\in A_k$. Невиродженість зліва добутку Тейта-Шафаревича в еліптичних кривих над псевдолокальним полем [I] показує, що $Ker\,\delta=0$. Звідси випливає твердження теореми I.

<u>Тривіальність одновимірних когомологій Галуа групи класів ідеалів еліптичної кривої</u>. Зберігаємо позначення попереднього пункту. Крім того, через $L=\ell(A)$ позначимо поле раціональних над ℓ функцій на A, $C(L)$ (відп. $C^0(L)$) - група класів ідеалів (відп. класів ідеалів степеня 0) поля L.

Теорема 2. $H^1(\mathcal{G}, C(L)) = 0$.

Доведення. Досить довести, що $H^1(\mathcal{G}, C^0(L)) = 0$. Позначимо через $C^0_\sigma(L)$ фактор-модуль $\mathcal{G}$-модуля $C^0(L)$ по образу гомоморфізму $\prod_p U_p(L) \to C^0(L)$, де p пробігає всі прості дивізори поля L, а $U_p(L)$ – група p-одиниць.

Розглянемо точну послідовність $\mathcal{G}$-модулів

$$0 \to E \to C^0(L) \to C^0_\sigma(L) \to 0. \qquad (2)$$

Нехай Q – дивізор поля L, що відповідає точці $Q \in A_k$, а $U^1_Q(L)$ – підгрупа групи $U_Q(L)$, що складається з головних одиниць. Використовуючи праці [3, 6], показуємо, що має місце ізоморфізм

$$\Big(\prod_{p \neq Q} U_p(L)\Big) U^1_Q(L) \xrightarrow{\sim} E.$$

Нехай, крім того, ρ – ізоморфізм

$$\rho: H^2(\mathcal{G}, E) \xrightarrow{\sim} \Big[\prod_{x \in A_k,\, x \neq Q} H^2(\mathcal{G}, U_x(L)/U^1_x(L))\Big] \oplus Y,$$

де Y – деяка абелева група. Нагадаємо [3], що $H^1(\mathcal{G}, E) = 0$.

Отже, точній послідовності (2) відповідає точна послідовність когомологій Галуа

$$0 \to H^1(\mathcal{G}, C^0(L)) \to H^1(\mathcal{G}, C^0_\sigma(L)) \xrightarrow{\delta} H^2(\mathcal{G}, E). \qquad (3)$$

Покажемо, що $\mathrm{Ker}\,\delta = 0$, і теорема 2 буде доведена.

Нехай f – коцикл, що є представником нетривіального класу α групи $H^1(\mathcal{G}, A_\ell)$ і $b_i\ (i \in J)$ – система представників нетривіальних класів групи $H^0(\mathcal{G}, A_\ell)$. Виберемо точку $Q \in A_k$ так, щоб $Q, Q - b_i$ (дія на A) були відмінні від точок $\pm\sigma f(\tau), \infty$, де σ, τ – довільні елементи з групи $\mathcal{G}$. Такий вибір точки Q можливий, бо множина

$\{b_i\,(i\in \mathcal{J})\}\cup\{\pm\sigma f(\tau)\}$ перетинається з досить малою підгрупою Лютц групи A_k лише по нескінченно віддаленій точці. Нехай

$$\pi_Q:\Big[\prod_{x\in A_k,\,x\neq Q} H^2(\mathcal{G},\,U_x(L)/U'_x(L))\Big]\oplus Y\longrightarrow (H^2(\mathcal{G},l^*))^{\mathcal{J}}$$

композиція проекції добутку на компоненти, відповідні точкам Q_i, $i\in\mathcal{J}$, при якій $\pi_Q(Y)=0$ та ізоморфізму

$$\prod_{i\in\mathcal{J}} H^2(\mathcal{G},U_{Q_i}(L)/U'_{Q_i}(L))\xrightarrow{\ \sim\ }(H^2(\mathcal{G},l^*))^{\mathcal{J}}.$$

Перевіряємо, що наявна комутативна діаграма

$$\begin{tikzcd} H^1(\mathcal{G},j(l)) \arrow[r, "\omega", "\sim"'] & H^1(\mathcal{G},C^0_\sigma(L)) \arrow[r, "\delta"] & H^2(\mathcal{G},E) \arrow[d, "\pi_Q"] \\ H^1(\mathcal{G},A_l) \arrow[u, "\Sigma^{\alpha-1}", "\wr"'] \arrow[rr, "\lambda"] & & (H^2(\mathcal{G},l^*))^{\mathcal{J}}, \end{tikzcd}$$

де $\Sigma^{\alpha-1}(\alpha)$ - клас $H^1(\mathcal{G},j(l))$. Представник його - коцикл, значення якого на $\sigma\in\mathcal{G}$ - це клас лінійної еквівалентності дивізора $f(\sigma)-\infty$, ω індукований ізоморфізмом $j(l)\xrightarrow{\sim} C^0_\sigma(L)$ і $\lambda(\alpha)=((\alpha,b_i)_{i\in\mathcal{J}})\in H^2(\mathcal{G},l^*)^{\mathcal{J}}$, (α,b_i) - - результат добутку Тейта-Шафаревича класу $\alpha\in H^1(\mathcal{G},A_l)$ і класу $\beta\in H^0(\mathcal{G},A_l)$ з представником $b_i\in A_k$. Оскільки добуток Тейта-Шафаревича невироджений зліва для еліптичних кривих над псевдолокальним полем [I], то $\operatorname{Ker}\lambda=0$, і отже, $\operatorname{Ker}\delta=0$.

<u>Інтерпретація показника в термінах груп Брауера</u>. Нехай V - крива роду I над псевдолокальним полем k. Тоді V - головний однорідний простір для еліптичної кривої A, визначеної

над k. Нехай $k(V)$ – поле функцій на кривій V над k, k^* та $k(V)^*$ – мультиплікативні групи полів k та $k(V)$. $Br\,k$, $Br\,k(V)$ – групи Брауера полів k та $k(V)$.

Теорема 3. Ядро гомоморфізму $Br\,k \to Br\,k(V)$, індукованого вкладенням $k^* \to k(V)^*$, є циклічною групою, порядку, що дорівнює показнику V.

Доведення. Для доведення теореми потрібно використати міркування з праці [3] при доведенні відповідного факту у випадку локального поля k. При цьому потрібно використати рівність порядку і показника V [2] і невиродженість зліва добутку Тейта-Шафаревича в еліптичних кривих над псевдолокальним полем [1].

Висловлюємо щиру подяку О.М.Введенському за допомогу.

Список літератури: 1. Андрийчук В.И. Об эллиптических кривых над псевдолокальным полем. – Мат. сб., 1979, т. 110, № 1, с. 88-101. 2. Андрійчук В.І. Деякі питання, зв"язані з добутком Тейта-Шафаревича в еліптичних кривих над псевдолокальним полем. – У цьому ж Віснику, с. 74-78. 3. Введенський О.М. Показники еліптичних кривих, визначених над локальним полем. – Укр. мат. журн., 1971, т. 23, № 4, с. 33-45. 4. Серр Ж.-П. Алгебраические группы и поля классов. – М.: Мир. – 220 с. 5. Ax J. The elementary theory of finite fields. – Ann. Math., 1968, vol. 80, N2, p. 231-245. 6. Tate J. WC-group over p-adic fields. – Sem. Bourbaki, 1956. – 245 p.

Стаття надійшла до редколегії 05.03.84