УДК 512.553

О.Л.Горбачук, В.О.Оніщук

ПРО КРУЧЕННЯ НАД ПІВДОСКОНАЛИМИ КІЛЬЦЯМИ

У праці [1] для довільного ідеалу S дуо-кільця (кожний правий ідеал - двосторонній) будується S -кручення. Більш точно система ідеалів $\mathcal{E}_S = \{J, J + S = R$, де R -дуо-кільце, утворює радикальний фільтр [1] . У довільному кільці система правих ідеалів $\mathcal{E}_S$, взагалі кажучи, не є радикальним фільтром, причому ідеал S буває двостороннім. З іншого боку, для правого ідеалу S , який не є двостороннім, система правих ідеалів $\mathcal{E}_S$ може бути радикальним фільтром.

Розглянемо кільце верхніх трикутних матриць над полем P і приймемо

$$S_1 = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, a, b \in P \right\} \text{ і } S_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & c \end{pmatrix}, c \in P \right\}.$$

Для двостороннього ідеалу S_1 система правих ідеалів $\mathcal{E}_{S_1}$ не радикальний фільтр, оскільки містить найменший правий ідеал S_2, який не є двостороннім. А для правого ідеалу S , який не є двосторонній, система $\mathcal{E}_{S_2}$ - радикальний фільтр.

Вивчимо це питання для півдосконалого кільця. Нагадаємо, що кільця, в якому ідемпотенти піднімаються за модулем радикала Джекобсона, а фактор-кільце за радикалом класично півпросте, називаються півдосконалими.

Лема. Для довільного правого ідеалу S півдосконалого кільця система правих ідеалів $\mathcal{E}_S$ містить найменший правий ідеал.

<u>Доведення</u>. Враховуючи, що $\mathcal{E}_S$ не змінюється, коли до S приєднуються елементи з радикала $\operatorname{Rad} R + J + S = R$

випливає, що $J+S=R$, а також те, що ідемпотенти піднімаються за модулем радикала, можна вважати $S=e_0R$, де e_1 – ідемпотент. Отже, найменший елемент $\mathcal{E}_S$ збігається з правим ідеалом $(1-e_1)R$. З цього випливає, що $\mathcal{E}_S$ - радикальний фільтр тоді і тільки тоді, коли $(1-e_1)R$ –двосторонній ідеал. Цей радикальний фільтр містить найменший ідеал, а кручення, яке відповідає такому радикальному фільтру, називається радикально-півпростим.

Наслідок. S – кручення над півдосконалим кільцем – радикально-півпросте.

Теорема. Для довільного правого ідеалу S півдосконалого кільця R система правих ідеалів $\mathcal{E}_S$ радикальний фільтр тоді і тільки тоді, коли R – пряма сума (скінченна) локальних кілець.

Доведення. Враховуючи, що S –кручення над локальним кільцем тривіальне, можна довільний правий ідеал S замінити на пряму суму тих локальних кілець, які мають з ним ненульовий перетин, при цьому $\mathcal{E}_S$ не зміниться. Безпосередньо ясно, що $\mathcal{E}_S$ містить найменший ідемпотентний ідеал, тобто $\mathcal{E}_S$ – радикальний фільтр. В зворотний бік – нехай над півдосконалим кільцем система правих ідеалів $\mathcal{E}_S$ утворює радикальний фільтр для довільного правого ідеалу S. Враховуючи, що досконале кільце $R=e_1R\dotplus e_2R\dotplus\ldots\dotplus e_nR$ (модульна пряма сума), e_iRe_i – локальні кільця [2], для доведення теореми достатньо показати e_iR – двосторонні ідеали. Приймемо $S=(e_1+\ldots+e_{i-1}+e_{i+1}+\ldots+e_n)$ і розглянемо систему правих ідеалів $\mathcal{E}_S$, яка за умовою теореми утворює радикальний фільтр. Радикальний фільтр $\mathcal{E}_S$ містить найменший ідеал e_iR. Таким чином, пряма сума кільцева, e_iR – локальні кільця.

Список літератури: 1. Горбачук О.Л., Комарницький М.Я. Про S - кручення в модулях. - Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат., 1977, вип. 12, с. 32-35. 2. Anderson F.W., Fuller K.R. Rings and categories of modules. New-York, e.a. Springer, 1974. - 339 с.

Стаття надійшла до редколегії 17.01.83

УДК 512.553

О.Л.Горбачук, Н.М.Михаловська

ПРО АКСІОМАТИЗАЦІЮ КЛАСІВ АБЕЛЕВИХ ГРУП

У цій праці всюди під словом група розуміємо абелеву групу. Як основний критерій, використовуємо таку теорему [1, 3].

Теорема. Клас абелевих груп аксіоматизований тоді і лише тоді, коли він замкнутий відносно переходу до елементарно еквівалентних груп і ультрадобутків.

Лема. Якщо деякий клас періодичних груп аксіоматизований, то порядки елементів в сукупності обмежені.

Доведення. Припустимо, що існують групи A_n (які можуть повторюватися), що містять елементи a_n, порядки яких більші n. Розглянемо фільтр Фреше множини натуральних чисел, який вкладається в ультрафільтр, а також фільтрований добуток груп A_n за цим ультрафільтром. Елемент фільтрованого добутку $(a_1, a_2, a_3, \ldots a_n, \ldots)$ не має скінченного порядку m, оскільки $ma_i = 0$ не виконується в групах A_i, для безмежного числа a_i. Припущення, що існують групи A_n, порядки елементів яких у сукупності необмежені, суперечить названій вище теоремі.

Теорема 1. Клас груп без кручення, замкнутий відносно підгруп, аксіоматизований тоді і лише тоді, коли він складається з усіх груп без кручення.

Доведення. Позначимо через $\mathcal{K}$ - аксіоматизований клас, замкнутий відносно підгруп. Кожна група без кручення містить

II-3149