Список літератури: 1. Горбачук О.Л., Комарницький М.Я. Про S – кручення в модулях. – Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат., 1977, вип. 12, с. 32-35. 2. Anderson F.W., Fuller K.R. Rings and categories of modules. New-York, e.a. Springer, 1974. – 339 c.

Стаття надійшла до редколегії 17.01.83

УДК 512.553

О.Л.Горбачук, Н.М.Михаловська

ПРО АКСІОМАТИЗАЦІЮ КЛАСІВ АБЕЛЕВИХ ГРУП

У цій праці всюди під словом група розуміємо абелеву групу. Як основний критерій, використовуємо таку теорему [1, 3].

Теорема. Клас абелевих груп аксіоматизований тоді і лише тоді, коли він замкнутий відносно переходу до елементарно еквівалентних груп і ультрадобутків.

Лема. Якщо деякий клас періодичних груп аксіоматизований, то порядки елементів в сукупності обмежені.

Доведення. Припустимо, що існують групи A_n (які можуть повторюватися), що містять елементи a_n, порядки яких більші n. Розглянемо фільтр Фреше множини натуральних чисел, який вкладається в ультрафільтр, а також фільтрований добуток груп A_n за цим ультрафільтром. Елемент фільтрованого добутку $(a_1, a_2, a_3, \ldots a_n, \ldots)$ не має скінченного порядку m, оскільки $ma_i = 0$ не виконується в групах A_i, для безмежного числа a_i. Припущення, що існують групи A_n, порядки елементів яких у сукупності необмежені, суперечить названій вище теоремі.

Теорема 1. Клас груп без кручення, замкнутий відносно підгруп, аксіоматизований тоді і лише тоді, коли він складається з усіх груп без кручення.

Доведення. Позначимо через $\mathcal{K}$ – аксіоматизований клас, замкнутий відносно підгруп. Кожна група без кручення містить підгрупу цілих чисел $\mathbb{Z}$. Оскільки клас $\mathcal{K}$ – аксіоматизований, то він замкнутий відносно ультрадобутків. Розглянемо ультрадобуток груп цілих чисел за фільтром Фреше. Одержаний ультрадобуток є групою без кручення, яка містить групу раціональних чисел Q . Беручи ультрадобуток одержаних груп, можна дістати пряму суму груп Q довільної потужності. Враховуючи, що довільна група без кручення є підгрупою, діленою без кручення, яка збігається з прямою сумою груп Q , а клас замкнутий відносно підгруп, одержуємо, що $\mathcal{K}$ містить всі абелеві групи без кручення.

Очевидно, що всі групи без кручення аксіоматизовані.

Теорема 2. Клас періодичних груп, замкнутий відносно прямих сум і фактор-груп, аксіоматизований тоді і лише тоді, коли це клас груп, що анулюються деяким числом m .

Доведення. Скористаємось наведеною вище лемою, а також теоремою Прюфера [2] .

З огляду на лему всі елементи груп класу анулюються деяким числом $n < m!$, де m – число, що обмежує порядки елементів груп класу. За першою теоремою Прюфера та теоремою про розклад періодичної групи в пряму суму примарних, кожна група класу розкладається в пряму суму циклічних. Враховуючи замкнутість класу відносно фактор-груп, класу належать всі циклічні групи $\mathbb{Z}_k$, де k/n . А виходячи з замкнутості класу відносно прямих сум, всі групи, що анулюються числом n , належать класу, оскільки вони розкладаються в пряму суму циклічних.

Доведення у зворотний бік очевидне.

Список літератури: I. К е й с л е р Г., Ч е н. Теория моделей. – М.: Мир, 1977. – 614 с. 2. К у р о ш А.Г. Теория групп. – М.: Наука, 1967. – 648 с. 3. М а л ь ц е в А.И. Алгебраические системы. – М.: Наука, 1970. – 392 с.

Стаття надійшла до редколегії 25.10.83