

С.В.Дениско

ПРО ОДНЕ ВІДОБРАЖЕННЯ КРИВИХ

Нехай взаємнооднозначне відображення однієї кривої на другу задовольняє умову

$$G = mG^*, \quad (I)$$

де $m = \text{const}$; G - довжина довільної дуги першої кривої;
 G^* - довжина образу цієї дуги. Таке відображення для зручності назвемо відображенням S .

Відображення S -еліпсів, яке здійснюється за допомогою механізму, розглянуто у праці [3].

Нехай криві (Δ) і (Δ^*) розміщені у площинах (на положення цих площин у просторі ніяких обмежень не накладається). Полярні рівняння кривих (Δ) , (Δ^*) мають відповідно вигляд

$$\rho = \rho(\varphi), \quad \rho^* = \rho^*(k\varphi),$$

де $k = \text{const}$; φ і $k\varphi$ - полярні кути; ρ і ρ^* - полярні радіуси. Відображення кривої (Δ) на криву (Δ^*) , для якого відповідні точки мають одне і те ж значення φ , називатимемо відображенням T .

З огляду на (I), для того щоб відображення T було також відображенням S , необхідно і достатньо

$$\left(\frac{d\rho}{d\varphi}\right)^2 \rho^2 = m^2 \left[\left(\frac{d\rho^*}{dk\varphi}\right)^2 + k^2 \rho^{*2} \right].$$

Звідси випливають теореми.

Теорема I. Нехай криві (Δ) і (Δ^*) є еліпсами Паскаля [1], полярні рівняння яких мають вигляд

$$\rho = a \cos \varphi \pm b, \quad \rho^* = a^* \cos k\varphi \pm b^*,$$

(2)

де a, b, a^*, b^* - додатні сталі.

Для того щоб у цьому випадку відображення T кривої (Δ) на криву (Δ^*) було відображенням S , необхідно і достатньо $a = ma^*, b = mb^*$ (або $2a = mb^*, b = 2ma^*$), $k = \pm 1$.

Перед b і b^* в формулах (2) вибирали однакові знаки.

Теорема 2. Нехай криві (Δ) , (Δ^*) - конхоїди Слоса [1], полярні рівняння яких мають вигляд

$$\rho = \frac{a}{\cos \varphi} + \frac{b^2}{a} \cos \varphi, \quad \rho^* = \frac{a^*}{\cos k\varphi} + \frac{b^{*2}}{a^*} \cos k\varphi,$$

де a, b, a^*, b^* - додатні сталі.

Тоді відображення T кривої (Δ) на криву (Δ^*) є відображенням S в тому і тільки тому випадку, коли $a = ma^*, b = mb^*, k = \pm 1$.

Теорема 3. Нехай криві (Δ) , (Δ^*) - конхоїди Нікомеда [1], полярні рівняння яких мають вигляд

$$\rho = \frac{a}{\sin \varphi} \pm b, \quad \rho^* = \frac{a^*}{\sin k\varphi} \pm b^*,$$

(3)

де a, b, a^*, b^* - додатні сталі.

Тоді відображення T кривої (Δ) на криву (Δ^*) є відображенням S тоді і тільки тоді, коли $a = ma^*, b = mb^*, k = 1$, в формулах (3) перед b і b^* обирають однакові знаки або, коли $a = ma^*, b = mb^*, k = -1$, а в формулах (3) перед b і b^* - протилежні знаки.

Теорема 4. Нехай криві (Δ) , (Δ^*) - пнсоїди Діоклеса [1], полярні рівняння яких мають вигляд

$$\rho = \frac{a}{\cos^3 \varphi}, \quad \rho^* = \frac{a^*}{\cos^3 k\varphi},$$

де a, a^* - додатні сталі.

У такому випадку відображення T кривої (Δ) на криву (Δ^*) є відображенням S тоді і тільки тоді, коли $a = ma^*$, $k = \pm 1$.

Теорема 5. Нехай криві (Δ) , (Δ^*) – трисектриси Маклорена [1], полярні рівняння яких мають вигляд

$$\rho = -a \frac{1-4\cos^2\varphi}{\cos\varphi}, \quad \rho = -a^* \frac{1-4\cos^2 k\varphi}{\cos k\varphi},$$

де a , a^* – додатні сталі.

Тоді відображення T кривої (Δ) на криву (Δ^*) – це відображення S тоді і тільки тоді, коли $a = ma^*$, $k = \pm 1$.

Теорема 6. Нехай криві (Δ) , (Δ^*) – кубічні дублікатриси [1], полярні рівняння яких мають вигляд $\rho = \frac{a}{\cos^3\varphi}$,

$$\rho^* = \frac{a^*}{\cos^3 k\varphi},$$

де a , a^* – додатні сталі.

Тоді відображення T кривої (Δ) на криву (Δ^*) є відображенням S тоді і тільки тоді, коли $a = ma^*$, $k = \pm 1$.

Зауваження 1. Розглянуті в теоремах 1-6 відображення T можна здійснити за допомогою механізмів з праць [1, 2].

Зауваження 2. Кожне відображення T в теоремах 2-6, яке є також відображенням S , можна одержати подібним відображенням площини кривої (Δ) на площину кривої (Δ^*) або послідовним виконанням подібного відображення площини кривої (Δ) на площину кривої (Δ^*) і відображенням відносно осі симетрії кривої (Δ^*) .

Список літератури: 1. Артоболовский И.И. Теория механизмов для воспроизведения плоских кривых. – М.: Изд-во АН СССР, 1959. – 251 с. 2. Артоболовский И.И. Теория механизмов. – 3-е изд., перераб. и доп. – М.: Наука, 1975. – 256 с. 3. Дениско С.В. Механізми для відтворення спеціальних відображень еліпсів. – Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат., 1975, вип. 10, с. 28-31.

Стаття надійшла до редколегії 25.10.83