УДК 514

С.В.Дениско, С.І.Кубів

ПРО ВІДТВОРЕННЯ ЗА ДОПОМОГОЮ МЕХАНІЗМІВ ДЕЯКИХ РОЗГОРТНИХ ПОВЕРХОНЬ, ДЛЯ КОЖНОЇ З ЯКИХ НАПРЯМНИМИ Є ДВА КОЛА

Нехай пряма $M_1 M_2$ проходить через кінці (точки M_1, M_2) радіусів двох кіл Γ_1, Γ_2, розміщених у площинах α_1, α_2, а точки O_1, O_2 – центри кіл Γ_1, Γ_2.

Радіус $O_1 M_1$ повертається навколо точки O_1 у площині α_1, а радіус $O_2 M_2$ навколо точки O_2 в площині α_2 так, що відношення кута повороту одного радіуса до кута повороту другого – величина стала. При цьому пряма $M_1 M_2$ відтворюватиме лінійчасту поверхню, яку для зручності назвемо поверхнею Σ. Вказане відтворення поверхні Σ можна реалізувати за допомогою механізму [1].

Для того щоб поверхня Σ була розгортною, необхідно та достатньо, щоб виконувалась така умова:

$$
\begin{aligned}
&(b_1^3 a^2 - b_1^2 a^3)\sin\varphi \sin k\varphi + (b_2^2 a^3 - b_2^3 a^2)\times \\
&\times \cos k\varphi \sin\varphi + (b_1^3 a^1 - b_1^1 a^3)\sin k\varphi \cos k\varphi + \\
&+ (b_2^1 a^3 - b_2^3 a_1)\cos k\varphi \cos\varphi + R_2 (b_1^3 b_2^2 - \\
&- b_2^3 b_1^2)\sin\varphi + R_2 (b_2^1 b_1^3 - b_1^1 b_2^3)\cos\varphi + \\
&+ R_1 b_2^3 \cos k\varphi - R_1 b_1^3 \sin k\varphi = 0, \qquad (1)
\end{aligned}
$$

де R_1, R_2 – радіуси кіл Γ_1, Γ_2; φ, $k\varphi$ – кути повороту радіусів $O_1 M_1$, $O_2 M_2$; a^i – коефіцієнти розкладу $\overline{O_1O_2} = \sum_{i=1}^{3} a^i \bar{e}_i$ ($\bar{e}_1$, $\bar{e}_2$ належать площині α_1, причому $\bar{e}_i \bar{e}_j = \delta_{ij}$, $\overline{O_1 M} = \bar{e}_1 \cos\varphi + \bar{e}_2 \sin\varphi$); b_j^i – коефіцієнти розкладу $\bar{e}'_j = \sum_{i=1}^{3} b_j^i \bar{e}_i$ $(j = 1,2)$; $\bar{e}'_1$, $\bar{e}'_2$ належать площині α_2, $\bar{e}'_i \bar{e}'_j = \delta_{ij}$, $\overline{O_2 M_2} = \bar{e}'_1 \cos k\varphi + \bar{e}'_2 \sin k\varphi$.

Про розгортні поверхні Σ для випадку, коли $b_1^3 = b_2^3 = 0$, йшлося у статті [2].

Знайдемо розгортні поверхні Σ для таких двох випадків:

$$b_1^1 = 1, \quad b_1^2 = b_1^3 = 0, \quad b_2^3 \neq 0 \tag{2}$$

і

$$b_1^1 = -1, \quad b_1^2 = b_1^3 = 0, \quad b_2^3 \neq 0. \tag{3}$$

В обох випадках беручи до уваги (I), наявна система рівностей:

$$a^1 + R_1 - R_2 = 0,$$

$$-\left(\frac{K^2}{2!} + \frac{1}{2!}\right) a^1 - \frac{K^2}{2!} R_1 + \frac{1}{2!} R_2 = 0,$$

$$\left(\frac{K^4}{4!} + \frac{K^2}{2!2!} + \frac{1}{4!}\right) a^1 + \frac{K^4}{4!} R_1 - \frac{1}{4!} R_2 = 0.$$

Звідси випливає, що

$$K = 1 \tag{4}$$

або

$$K = -1. \tag{5}$$

Отже, умова (I) має вигляд

$$(a_3 b_2^2 - a^2 b_2^3 - k a^3 b_1^1) \sin\varphi \cos\varphi - a_1 b_2^3 \cos^2\varphi + b_2^3 (R_1 - R_2 b_1^1) \cos\varphi = 0,$$

де $K = \pm 1$, $b_1^1 = \pm 1$. Вона рівносильна системі

$$a^3 b_2^2 - a^2 b_2^3 - k a^3 b_1^1 = 0, \qquad (6)$$

$$a^1 = 0, \qquad (7)$$

$$R_1 - R_2 b_1^1 = 0. \qquad (8)$$

З рівності (8) видно, що у випадку (3) розгортних поверхонь $\sum$ не існує. З цієї ж рівності для (2) маємо $R_1 = R_2$. У цьому ж випадку (6) набирає вигляду

$$a_3 b_2^2 - a^2 b_2^3 - k a^3 = 0. \qquad (9)$$

Беручи до уваги (7) та (9), остаточно приходимо до таких висновків щодо існування розгортних поверхонь $\sum$ у випадку (2).

Якщо для (4) і (5) вектор $\bar{e}_2'$ один і той же, то поверхня $\sum$ у кожному з цих випадків розгортна тоді і тільки тоді, коли центри кіл Γ_1, Γ_2, радіуси яких рівні, суміщаються. При цьому існують дві розгортні поверхні $\sum$ (еліптичні циліндри), лініями перетину яких є кола Γ_1, Γ_2.

Якщо ж відмовитись від названого обмеження на вектор $\bar{e}_2'$, то, як у випадку (4), так і в (5), поверхня $\sum$ розгортна тоді і тільки тоді, коли пряма O_1O_2 перпендикулярна вектору $\bar{e}_1$, коло Γ_1 симетричне колу Γ_2 відносно площини $\mathcal{P}$, яка проходить через середину відрізка O_1O_2, перпендикулярно до нього. Причому у випадку (4) вектор $\bar{e}_2'$ має бути симетричним вектору $\bar{e}_2$, відносно площини $\mathcal{P}$, а у випадку (5) вектор $\bar{e}_2'$ симетричний вектору $-\bar{e}_2$ відносно тієї ж самої площини.

Очевидно, в обох випадках (4) і (5) відтворюється одна і та ж розгортна поверхня $\sum$ (еліптичний циліндр, твірні якого паралельні прямій O_1O_2).

Список літератури: 1. Артоболевский И.И. Теория механизмов и машин. – М.: Наука, 1975. – 251 с. 2. Д ен и с к о С.В. Про деякі способи відтворення розгортних поверхонь. - Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат., 1982, вип. 20, с. 83-86.

Стаття надійшла до редколегії 08.02.84

УДК 519.21

І.Д.Квіт, В.М.Косарчин

ДВОВИМІРНЕ ВІДБИТТЯ

Узагальнимо основні результати статті [1] на двовимірний випадок.

Нехай додатний випадковий вектор (ξ, η) має функцію розподілу ймовірностей $\mathcal{F}(x,y)$. Відбиттям вектора (ξ,η) називаємо сподівання випадкової змінної $\xi^{z_1-1}\eta^{z_2-1}$, , де z_1 та z_2 - комплексні параметри. Двовимірне відбиття $\varphi(z_1,z_2)$ існує, якщо існують додатні сталі $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ такі, що інтеграл

$$\varphi(z_1,z_2) = E(\xi^{z_1-1}\eta^{z_2-1}) = \int_0^\infty\int_0^\infty x^{z_1-1}y^{z_2-1}\,d\mathcal{F}(x,y) \tag{1}$$

абсолютно збігається в області

$$1-\alpha < Re\,z_1 < 1+\beta,\quad 1-\gamma < Re\,z_2 < 1+\delta. \tag{2}$$

Аналогічно до того, як в одновимірному випадку за допомогою інтервального обмежника виводиться зворотна формула та згодом доводиться теорема єдиності, так у випадку існування відбиття (1) в області (2) за допомогою прямокутного обмежника виводиться двовимірна зворотна формула та доводиться відповідна теорема єдиності. Відбиття (1) в області (2) однозначно визначає свою функцію розподілу $\mathcal{F}(x,y)$, причому