н и с к о С.В. Про деякі способи відтворення розгортних поверхонь. - Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат., 1982, вип. 20, с. 83-86.

Стаття надійшла до редколегії 08.02.84

УДК 519.21

І.Д.Квіт, В.М.Косарчин

ДВОВИМІРНЕ ВІДБИТТЯ

Узагальнимо основні результати статті [1] на двовимірний випадок.

Нехай додатний випадковий вектор (ξ, η) має функцію розподілу ймовірностей $F(x,y)$. Відбиттям вектора (ξ,η) називаємо сподівання випадкової змінної $\xi^{z_1-1}\eta^{z_2-1}$, , де z_1 та z_2 - комплексні параметри. Двовимірне відбиття $\varphi(z_1,z_2)$ існує, якщо існують додатні сталі $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ такі, що інтеграл

$$\varphi(z_1,z_2)=E(\xi^{z_1-1}\eta^{z_2-1})=\int_0^\infty\int_0^\infty x^{z_1-1}y^{z_2-1}dF(x,y) \tag{1}$$

абсолютно збігається в області

$$1-\alpha<\operatorname{Re}z_1<1+\beta,\quad 1-\gamma<\operatorname{Re}z_2<1+\delta. \tag{2}$$

Аналогічно до того, як в одновимірному випадку за допомогою інтервального обмежника виводиться зворотна формула та згодом доводиться теорема единості, так у випадку існування відбиття (1) в області (2) за допомогою прямокутного обмежника виводиться двовимірна зворотна формула та доводиться відповідна теорема единості. Відбиття (1) в області (2) однозначно визначає свою функцію розподілу $F(x,y)$, причому

$$F(x,y)=\frac{1}{(2\pi i)^2}\int\limits_{h-i\infty}^{h+i\infty}\int\limits_{k-i\infty}^{k+i\infty}\frac{(x+0)^{1-z_1}}{1-z_1}\frac{(y+0)^{1-z_2}}{1-z_2}\varphi(z_1,z_2)\,dz_2\,dz_1,$$

$$\max(0,1-\alpha)<h<1,\ \max(0,1-\gamma)<k<1,\ x>0,\ y>0. \tag{3}$$

Якщо додатний випадковий вектор (ξ,η) абсолютно неперервний з густиною $p(x,y)=\frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x\,\partial y}$, то замість формул (I) і (3) маємо

$$\varphi(z_1,z_2)=\int\limits_0^\infty\int\limits_0^\infty x^{z_1-1}y^{z_2-1}p(x,y)\,dx\,dy$$

$$1-\alpha<\operatorname{Re}z_1<1+\beta,\ \ 1-\gamma<\operatorname{Re}z_2<1+\delta \tag{4}$$

та

$$p(x,y)=\frac{1}{(2\pi i)^2}\int\limits_{h-i\infty}^{h+i\infty}\int\limits_{k-i\infty}^{k+i\infty}x^{-z_1}y^{-z_2}\varphi(z_1,z_2)\,dz_2\,dz_1$$

$$\max(0,1-\alpha)<h<1,\ \max(0,1-\gamma)<k<1,\ x>0,\ y>0. \tag{5}$$

Відбиття (I) не лише однозначно визначає відповідний розподіл ймовірностей, але також дає змогу швидко обчислити існуючі числові характеристики випадкового вектора. Наприклад, якщо нас цікавлять сподівання та дисперсії компонент, коваріація та кореляція між компонентами, то беремо до уваги

$$\varphi(2,1),\ \varphi(1,2),\ \varphi(2,2),\ \varphi(3,1),\ \varphi(1,3) \tag{6}$$

і маємо відповідно

$$E\xi = \varphi(2,1),\ E\eta = \varphi(1,2),\ D\xi = \varphi(3,1) - \varphi^2(2,1),\ D\eta = \varphi(1,3) - \varphi^2(1,2),$$

$$cov(\xi,\eta) = \varphi(2,2) - \varphi(1,2)\varphi(2,1),\ \rho(\xi,\eta) = \frac{cov(\xi,\eta)}{\sqrt{D\xi}\sqrt{D\eta}}. \qquad (7)$$

Для ілюстрації наведених формул розглянемо приклади.

Нехай

$$\mathcal{F}(x,y) = 1 - \frac{1}{1+x} - \frac{1}{1+y} + \frac{1}{1+x+y},\ x>0,\ y>0.$$

Тоді за формулою (I)

$$\varphi(z_1,z_2) = \Gamma(z_1)\Gamma(z_2)\Gamma(3-z_1-z_2),$$

$$0 < Re\, z_1,\ 0 < Re\, z_2,\ Re\, z_1 + Re\, z_2 < 3.$$

Нехай

$$\varphi(z_1,z_2) = \Gamma(z_1)\Gamma(z_2),\ 0 < Re\, z_1,\ 0 < Re\, z_2.$$

Тоді за формулою (3) і теорією залишків дістаємо

$$\mathcal{F}(x,y) = (1-e^{-x})(1-e^{-y}),\ x>0,\ y>0.$$

Двовимірний вектор Фішера з густиною

$$p(x,y) = \Gamma\left(\frac{k+m+n}{2}\right) n^{-\frac{k+m+n}{2}} \cdot \frac{k^{\frac{k}{2}}}{\Gamma(\frac{k}{2})} \cdot \frac{m^{\frac{m}{2}}}{\Gamma(\frac{m}{2})} \cdot \frac{n^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2})} \times$$

$$\times \frac{x^{\frac{k}{2}-1}\, y^{\frac{m}{2}-1}}{\left(1+\frac{k}{n}x+\frac{m}{n}y\right)^{\frac{k+m+n}{2}}},$$

$$x>0,\ y>0;\ k, m, n = 1, 2, \ldots,$$

за формулою (4) має відбиття

$$\varphi(z_1,z_2) = \left(\frac{n}{k}\right)^{z_1-1} \left(\frac{n}{m}\right)^{z_2-1} \cdot \frac{\Gamma(\frac{k}{2}+z_1-1)}{\Gamma(\frac{k}{2})} \cdot \frac{\Gamma(\frac{m}{2}+z_2-1)}{\Gamma(\frac{m}{2})} \times$$

$$\times \frac{\Gamma(\frac{n}{2}+2-z_1-z_2)}{\Gamma(\frac{n}{2})},$$

$$1-\frac{k}{2} < Re z_1,\ 1-\frac{m}{2} < Re z_2,\ Re z_1 + Re z_2 < 2+\frac{n}{2}.$$

Двовимірне відбиття

$$\varphi(z_1, z_2) = a^{2-z_1-z_2} \cdot \frac{\Gamma(z_1+b-1)\,\Gamma(z_1+z_2+b+c-2)}{\Gamma(b)\,\Gamma(z_1+b+c-1)},$$

$$(a>0,\ b>0,\ c>0),\ 1-b < Re z_1,\ 1-c < Re z_2$$

за формулою (5) переходить у густину двовимірного гамма-вектора

$$p(x,y) = \frac{a^{b+c}}{\Gamma(b)\,\Gamma(c)}\, x^{b-1} (y-x)^{c-1} e^{-ay},$$

$$0 < x < y,\quad a>0,\ b>0,\ c>0.$$

Двовимірний бета-вектор з густиною

$$p(x,y) = \frac{\Gamma(a+b+c)}{\Gamma(a)\,\Gamma(b)\,\Gamma(c)}\, x^{a-1} y^{b-1} (1-x-y)^{c-1},$$

$$0 < x,\ 0 < y,\ x+y \le 1;\ a>0,\ b>0,\ c>0$$

має відбиття

$$\varphi(z_1, z_2) = \frac{\Gamma(a+z_1-1)}{\Gamma(a)} \cdot \frac{\Gamma(b+z_2-1)}{\Gamma(b)} \cdot \frac{\Gamma(a+b+c)}{\Gamma(a+b+c+z_1+z_2-2)},$$

$$1-a < Re z_1,\ 1-b < Re z_2.$$

Звідси, знайшовши вирази (6), за формулами (7) одержуємо

$$E\xi = \frac{a}{A},\ E\eta = \frac{b}{A},\ D\xi = \frac{a(b+c)}{A^2(A+1)},\ D\eta = \frac{b(a+c)}{A^2(A+1)},$$

$$cov(\xi,\eta) = -\frac{ab}{A^2(A+1)},\ \rho(\xi,\eta) = -\sqrt{\frac{ab}{(a+c)(b+c)}},$$

де $A = a+b+c$. Відзначимо, що кореляція між компонентами бета-вектора завжди від"ємна. Двовимірні густини Фішера, гамма та бета описані в праці [2].

Список літератури: І. К в і т І.Д. Зворотна формула для відбиття. - Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат., 1978, вип. 13, с. 47-52. 2. Mardia K.V. Families of bivariate distributions. London, 1970.- 109 p.

Стаття надійшла до редколегії 24.01.83

УДК 517.917

Л.М.Лісевич

ПРО ОДНУ ДОСТАТНЮ УМОВУ ІСНУВАННЯ ОБМЕЖЕНОГО ТА МАЙЖЕ ПЕРІОДИЧНОГО РОЗВ"ЯЗКУ ЛІНІЙНОГО ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОГО РІВНЯННЯ ДРУГОГО ПОРЯДКУ

У цій статті продовжуємо дослідження достатніх умов існування обмеженого та майже періодичного розв"язку (м.п.) рівняння

$$y'' = \varphi(x)y + \psi(x)y' + \omega(x). \tag{1}$$

Одна така достатня умова доведена у праці [2]. Вкажемо ще одну достатню умову існування обмеженого і м.п. розв"язку рівняння (1), доведення якої грунтується на одній теоремі у праці [2]. Сформулюємо цю теорему.

Теорема 1. Нехай у рівнянні

$$y'' = f(x)y + g(x): \tag{2}$$