За умовою функція $\psi(x)$ обмежена і за відомою теоремою Бора вона м.п. за Бором, а функція $\exp(\frac{1}{2}\psi(x))$ м.п. за Бором як суперпозиція неперервної і м.п. за Бором функція. Тоді $y(x)$ м.п. за Бором функція, як добуток двох м.п. за Бором функцій. Теорема доведена.

Список літератури: 1. Лісевич Л.М., Костюк Я.П. Про майже періодичність розв"язків деяких звичайних диференціальних рівнянь другого порядку з S^p - майже періодичною правою частиною. - Доп. АН УРСР. Сер. А, 1971, № 1, с. 25-26.
2. Лісевич Л.М. Деякі достатні умови існування обмеженого і майже періодичного розв"язку одного лінійного диференціального рівняння другого порядку. - Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат., 1981, вип. 18, с. 93-97.

Стаття надійшла до редколегії 21.05.84

УДК 536.12

Б.В.Ковальчук, Я.М.Середа

ДВОВИМІРНА ЗАДАЧА ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ ТІЛ З ТОНКИМ ВКЛЮЧЕННЯМ

Розглянемо шар товщиною ℓ, в якому на відстані $z_1 - d$ від граничної поверхні $z = 0$ розміщено чужорідне включення товщиною $2d$. На поверхнях $z = 0$, $z = \ell$ шару задані температури як періодичні функції координати x і гармонічні функції часу τ, тобто

$$t\Big|_{z=0} = t_0 \cos\omega x\, e^{i\beta\tau}, \quad t\Big|_{z=\ell} = t_\ell \cos\omega x\, e^{i\beta\tau}, \tag{1}$$

де ω, β - сталі величини.

Коефіцієнти теплопровідності й об"ємної теплоємності даного кусково-однорідного тіла як єдиного цілого подаємо у вигляді

$$\lambda(z) = \lambda_1 + (\lambda_0 - \lambda_1) N(z), \quad C(z) = C_1 + (C_0 - C_1) N(z), \tag{2}$$

де λ_1, C_1 і λ_0, C_0 – коефіцієнти теплопровідності й об"ємної теплоємності основного матеріалу і включення;

$$N(z) = S_-(z - z_1 + d) - S_+(z - z_1 - d);$$

$$S_{\pm}(\zeta) = \begin{cases} 1, & \zeta > 0, \\ 0{,}5 \mp 0{,}5 & \zeta = 0, \\ 0, & \zeta < 0. \end{cases}$$

Підставивши (2) у рівняння теплопровідності неоднорідного тіла [1]

$$\lambda(z)\frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial z}\left[\lambda(z)\frac{\partial t}{\partial z}\right] = C(z)\dot{t}, \tag{3}$$

одержимо

$$\lambda_1 \Delta t + (\lambda_0 - \lambda_1)\left\{\frac{\partial}{\partial z}\left[N(z)\frac{\partial t}{\partial z} + N(z)\frac{\partial^2 t}{\partial x^2}\right\} = C_1\dot{t} + (C_0 - C_1)N(z)\dot{t}, \tag{4}$$

де

$$\dot{t} = \frac{\partial t}{\partial \tau}, \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$ – оператор Лапласа.

Оскільки включення тонке, то, враховуючи співвідношення [2]

$$\lim_{d \to 0} \frac{N(z)}{2d} = \delta(z - z_1), \tag{5}$$

замість (4) маємо

$$\Delta t - \frac{\dot{t}}{a} = -\frac{\Lambda_0}{2\lambda_1}(1 - K_\lambda)\left[2\frac{\partial^2 t}{\partial x^2}\Big|_{z_1}\delta(z - z_1) + \right.$$

$$\left. + \left(\frac{\partial t}{\partial z}\Big|_{z_1+0} + \frac{\partial t}{\partial z}\Big|_{z_1-0}\right)\delta'(z - z_1)\right] + \frac{C_0}{2\lambda_1}(1 - K_c)\dot{t}\Big|_{z_1}\delta(z - z_1), \tag{6}$$

де $K_\lambda = \frac{\lambda_1}{\lambda_0}$, $K_c = \frac{C_1}{C_0}$, $a = \frac{\lambda_1}{C_1}$ – коефіцієнти теплопровідності основного матеріалу; $\Lambda_0 = 2\lambda_0 d$, $C_0 = 2C_0 d$ – зведені теплопровідність і теплоємність включення; $\delta(\zeta)$ – дельта-функція Дірака, $\delta'(z) = \frac{d\delta(\zeta)}{d\zeta}$.

Розв"язок рівняння (6) шукаємо у вигляді

$$t = \theta e^{i\beta\tau}. \tag{7}$$

Тоді для визначення функції θ маємо таке рівняння

$$\Delta\theta - \frac{i\beta}{a}\theta = -\frac{\Lambda_0}{2\lambda_1}(1-K_\lambda)\left[2\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2}\Big|_{z_1}\delta(z-z_1) + \right.$$

$$\left. + \left(\frac{\partial\theta}{\partial z}\Big|_{z_1+0} + \frac{\partial\theta}{\partial z}\Big|_{z_1-0}\right)\delta'(z-z_1)\right] + \frac{i\beta c_0}{\lambda_1}(1-K_c)\theta\Big|_{z_1}\delta(z-z_1). \tag{8}$$

Застосуємо до рівняння (8) інтегральне перетворення Фур"є по x.
В результаті записуємо

$$\frac{d^2\bar{\theta}}{dz^2} - \varkappa\bar{\theta} = 2\mathcal{L}\bar{\theta}\Big|_{z_1}\delta(z-z_1) - \frac{\Lambda_0}{2\lambda_1}(1-K_\lambda)\left(\bar{\theta}'\Big|_{z_1+0} + \bar{\theta}'\Big|_{z_1-0}\right)\delta'(z-z_1), \tag{9}$$

де

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(|\xi|) = \frac{\Lambda_0}{2\lambda_1}(1-K_\lambda)\xi^2 + \frac{i\beta c_0}{2\lambda_1}(1-K_c),\ \varkappa = \sqrt{\xi^2 + \frac{i\beta}{a}};$$

ξ – параметр перетворення Фур"є.

При цьому граничні умови (I), враховуючи (7), зобразимо як

$$\bar{\theta}\Big|_{z=0} = t_0\sqrt{\frac{\pi}{2}}\left[\delta(\xi+\omega) + \delta(\xi-\omega)\right],\ \bar{\theta}\Big|_{z=\ell} = t_\ell\sqrt{\frac{\pi}{2}}\left[\delta(\xi+\omega) + \delta(\xi-\omega)\right]. \tag{I0}$$

Загальний розв"язок рівняння (9) шукаємо у вигляді

$$\bar{\theta} = A\,ch\,\varkappa z + B\,sh\,\varkappa z - \frac{\mathcal{L}}{\varkappa}\bar{\theta}\Big|_{z_1} e^{-\varkappa|z-z_1|} -$$

$$- \frac{\Lambda_0}{4\lambda_1}(1-K_\lambda)\left(\bar{\theta}'\Big|_{z_1+0} + \bar{\theta}'\Big|_{z_1-0}\right)e^{-\varkappa|z-z_1|}\,sign(z-z_1), \tag{II}$$

де A, B – сталі величини.

Продиференціювавши (II) по z, маємо

$$\bar{\theta}' = \varkappa(A\,sh\,\varkappa z + B\,ch\,\varkappa z) + \mathcal{L}(\theta)\Big|_{z_1} e^{-\varkappa|z-z_1|}\,sign(z-z_1) +$$

$$+ \frac{\Lambda_0}{4\lambda_1}(1-K_\lambda)\left(\bar{\theta}'\Big|_{z_1+0} + \bar{\theta}'\Big|_{z_1-0}\right)\left[\varkappa e^{-\varkappa|z-z_1|} - 2\delta(z-z_1)\right]. \tag{I2}$$

Із (II) і (I2) знаходимо

$$\bar{\theta}\Big|_{z_1} = \frac{\varkappa(A\,ch\,\varkappa z_1 + B\,sh\,\varkappa z_1)}{\varkappa + \mathcal{L}}, \tag{I3}$$

$$\bar{\theta}'\Big|_{z_1+0} + \bar{\theta}'\Big|_{z_1-0} = \frac{4\lambda_1 \varkappa (A\,sh\,\varkappa z_1 + B\,ch\,\varkappa z_1)}{2\lambda_1 - \Lambda_0(1-K_\lambda)\varkappa}. \tag{I4}$$

Враховуючи (I3) і (I4), розв"язок (II) можна записати

$$\bar{\theta} = \left[ch\,\varkappa z - \mathcal{K}\,ch\,\varkappa z_1\,e^{-\varkappa|z-z_1|} - \mu\,sh\,\varkappa z_1\,e^{-\varkappa|z-z_1|}\,sign(z-z_1)\right]A +$$
$$+ \left[sh\,\varkappa z - \mathcal{K}\,sh\,\varkappa z_1\,e^{-\varkappa|z-z_1|} - \mu\,ch\,\varkappa z_1\,e^{-\varkappa|z-z_1|}\,sign(z-z_1)\right]B, \tag{I5}$$

де

$$\mathcal{K} = \mathcal{K}(|\xi|) = \frac{\mathcal{L}}{\varkappa + \mathcal{L}}, \quad \mu = \mu(|\xi|) = \frac{\Lambda_0(1-K_\lambda)\varkappa}{2\lambda_1 - \lambda_0(1-K_\lambda)\varkappa}.$$

Коефіцієнти A і B згідно з граничними умовами (I0) визначаються за формулами

$$A = \Delta_0^{-1}\left\{\bar{\theta}_0\left[sh\,\varkappa l - (\mu\,ch\,\varkappa z_1 + \mathcal{K}\,sh\,\varkappa z_1)e^{-\varkappa(l-z_1)}\right] - \bar{\theta}_l(\mu\,ch\,\varkappa z_1 - \mathcal{K}\,sh\,\varkappa z_1)e^{-\varkappa z_1}\right\}, \tag{I6}$$

$$B = \Delta_0^{-1}\left\{\bar{\theta}_0\left[(\mu\,sh\,\varkappa z_1 + \mathcal{K}\,ch\,\varkappa z_1)e^{-\varkappa(l-z_1)} - ch\,\varkappa l\right] + \bar{\theta}_l\left[1 + (\mu\,sh\,\varkappa z_1 - \mathcal{K}\,ch\,\varkappa z_1)e^{-\varkappa z_1}\right]\right\}, \tag{I7}$$

де

$$\Delta_0 = \Delta_0(|\xi|) = sh\,\varkappa l - \mu\left[e^{-\varkappa l} + ch\,\varkappa(l-2z_1)\right] + \mathcal{K}\left[e^{-\varkappa l} - ch\,\varkappa(l-2z_1)\right] + 2\mathcal{K}\mu e^{-\varkappa l}.$$

Підставивши тепер (I6) і (I7) у (I5) та перейшовши від трансформант до оригіналів, одержимо

$$\theta = \frac{\cos\omega x}{\Delta_0(\omega)}\left[t_0\varphi(z) + t_l\psi(z)\right], \tag{18}$$

де

$$\varphi(z) = sh\,\bar{\varkappa}(l-z) - \mu(\omega)\left[ch\,\bar{\varkappa}(z-z_1)e^{-\bar{\varkappa}(l-z_1)} - ch\,\bar{\varkappa}(l-z)e^{-\bar{\varkappa}|z-z_1|}sign(z-z_1)\right] + \varkappa(\omega)\left[sh\,\bar{\varkappa}(z-z_1)e^{-\bar{\varkappa}(l-z_1)} - sh\,\bar{\varkappa}(l-z_1)e^{-\bar{\varkappa}|z-z_1|} - 2\mu(\omega)e^{-\bar{\varkappa}(|z-z_1|+l-z_1)}S(z-z_1)\right];$$

$$\psi(z) = sh\,\bar{\varkappa}z - \varkappa(\omega)\left[sh\,\bar{\varkappa}(z-z_1)e^{-\bar{\varkappa}z_1} + sh\,\bar{\varkappa}z_1 e^{-\bar{\varkappa}|z-z_1|} - 2\mu(\omega)e^{-\bar{\varkappa}(|z-z_1|+z_1)}S(z-z_1)\right] - \mu(\omega)\left[ch\,\bar{\varkappa}(z-z_1)e^{-\bar{\varkappa}z_1} + ch\,\bar{\varkappa}z_1 e^{-\bar{\varkappa}|z-z_1|}sign(z-z_1)\right];$$

$$\bar{\varkappa} = \sqrt{\omega^2 + \frac{i\beta}{a}}.$$

Якщо $t_l = 0$, то замість (I8) маємо

$$\theta = \frac{t_0\cos\omega x}{\Delta_0(\omega)}\varphi(z). \tag{19}$$

Перейшовши в (I9) до границі при $l \to \infty$, дістаємо вираз θ для півпростору з включенням. Підставивши знайдені значення θ за формулами (I8), (I9) і для півпростору в (7) та виділивши дійсні або уявні частини, знайдемо розв"язки, що відповідають випадкам, коли температури поверхностей змінюються у часі за законом синуса або косинуса.

Зауважимо, що аналогічним способом можна визначити температурне поле в шарі з n тонкими включеннями.

Список літератури: I. Коляно Ю.М., Кулик А.Н. Температурные напряжения от объемных источников. – К.: Наук.

думка, 1983. - 288 с. 2. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике для научных работников и инженеров. - М.: Наука, 1968. - 720 с.

Стаття надійшла до редколегії 19.03.84

УДК 539.377

Б.В.Ковальчук

ЗАДАЧА ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ ДЛЯ КУСКОВО-ОДНОРІДНИХ ТІЛ ПРИ РОЗРИВНОМУ ГРАНИЧНОМУ РОЗПОДІЛІ ТЕМПЕРАТУРИ

Розглянемо приклад, який ілюструє спосіб розв"язування задач теплопровідності для кусково-однорідних тіл при розривному розподілі температури на границі. Нехай напівнескінченний циліндр радіуса R_2 з чужорідним циліндричним включенням радіуса R_1 піддається нагріванню по поверхні $z=0$ зовнішнім середовищем, температура якого змінюється за законом

$$t\big|_{z=0} = t_0 J_0(\mu r) S_+(R-r) + t_c S_-(r-R), \tag{1}$$

де t_0, t_c - сталі значення температури; $S_\pm(\xi)$ - асиметричні одиничні функції; $J_\nu(\mu r)$ - функція Бесселя першого роду порядку ν (μ - константа). На поверхні $z=0$ має місце гранична умова першого роду.

Температура поверхні $r=R_2$ змінюється за законом

$$t\big|_{r=R_2} = t_c e^{-kz}, \tag{2}$$

де K - стала величина.

Подамо коефіцієнт теплопровідності $\lambda(r)$ кусково-однорідного циліндра як єдиного цілого у вигляді

$$\lambda(r) = \lambda_1 + (\lambda_2 - \lambda_1) S_-(r-R), \tag{3}$$

де λ_1, λ_2 - коефіцієнти теплопровідності включення й основного матеріалу ($R_1 < R < R_2$).