думка, 1983. – 288 с. 2. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике для научных работников и инженеров. – М.: Наука, 1968. – 720 с.

Стаття надійшла до редколегії 19.03.84

УДК 539.377

Б.В.Ковальчук

ЗАДАЧА ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ ДЛЯ КУСКОВО-ОДНОРІДНИХ ТІЛ ПРИ РОЗРИВНОМУ ГРАНИЧНОМУ РОЗПОДІЛІ ТЕМПЕРАТУРИ

Розглянемо приклад, який ілюструє спосіб розв"язування задач теплопровідності для кусково-однорідних тіл при розривному розподілі температури на границі. Нехай напівнескінченний циліндр радіуса R_2 з чужорідним циліндричним включенням радіуса R_1 піддається нагріванню по поверхні $z=0$ зовнішнім середовищем, температура якого змінюється за законом

$$t\big|_{z=0} = t_0 J_0(\mu r) S_+(R-r) + t_c S_-(r-R), \qquad (1)$$

де t_0, t_c – сталі значення температури; $S_\pm(\xi)$ – асиметричні одиничні функції; $J_\nu(\mu r)$ – функція Бесселя першого роду порядку ν (μ – константа). На поверхні $z=0$ має місце гранична умова першого роду.

Температура поверхні $r=R_2$ змінюється за законом

$$t\big|_{r=R_2} = t_c e^{-kz}, \qquad (2)$$

де k – стала величина.

Подамо коефіцієнт теплопровідності $\lambda(r)$ кусково-однорідного циліндра як єдиного цілого у вигляді

$$\lambda(r) = \lambda_1 + (\lambda_2 - \lambda_1) S_-(r-R), \qquad (3)$$

де λ_1, λ_2 – коефіцієнти теплопровідності включення й основного матеріалу ($R_1 < R < R_2$).

Зауважимо при цьому справедливість тотожностей [I]

$$\frac{1}{\lambda(r)} = \frac{1}{\lambda_1} + \left(\frac{1}{\lambda_2} - \frac{1}{\lambda_1}\right) S_-(r-R), \tag{4}$$

$$S_-(r-R)\,\delta(r-R) = 0, \tag{5}$$

де $\delta_-(\xi) = \dfrac{dS_-(\xi)}{d\xi}$.

Підставивши (3) у рівняння теплопровідності неоднорідного тіла [2]

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left[r\lambda(r)\frac{\partial t}{\partial r}\right] + \lambda(r)\frac{\partial^2 t}{\partial z^2} = 0 \tag{6}$$

і враховуючи (4) і (5), приходимо до диференціального рівняння з сингулярним коефіцієнтом

$$\frac{\partial^2 t}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial t}{\partial r} + \frac{\partial^2 t}{\partial z^2} - (1-K_\lambda^{-1})\delta_-(r-R_1)\frac{\partial t}{\partial r}\Big|_{r=R_1} = 0, \tag{7}$$

де $K_\lambda = \dfrac{\lambda_1}{\lambda_2}$, $\dfrac{\partial t}{\partial r}\Big|_{r=R_1} = \dfrac{\partial t}{\partial r}\Big|_{r=R_1+0}$.

Застосуємо до рівняння (7) інтегральне синус-перетворення Фур"є по z, допустивши, що функція температури і її похідна по z на неокінченності перетворюються в нуль. Згідно з граничною умовою (I) одержуємо

$$\frac{d^2\bar{t}}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{d\bar{t}}{dr} - \xi^2\bar{t} = \varphi(r), \tag{8}$$

де

$$\varphi(r) = (1-K_\lambda^{-1})\frac{d\bar{t}}{dr}\Big|_{r=R_1}\delta_-(r-R_1) - \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\xi\left[t_0 J_0(\mu r)S_+(R-r) + t_c S_-(r-R)\right]$$

(ξ - параметр синус-перетворення Фур"є).

При цьому граничну умову (2) запишемо як

$$\bar{t}\Big|_{r=R_2} = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{t_c\,\xi}{K^2+\xi^2}. \tag{9}$$

Враховуючи (9) і умову обмеженості трансформанти температури при $r = 0$, розв"язок рівняння (8) можна записати у вигляді

$$\bar{t} = \frac{I_0(\xi r)}{I_0(\xi R_2)}\left[\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{t_c \xi}{K^2+\xi^2} + K_0(\xi R_2)\int_0^{R_2}\eta\psi(\eta)I_0(\xi\eta)d\eta\right]+$$

$$+ I_0(\xi r)\int_{R_2}^{r}\eta\psi(\eta)K_0(\xi\eta)d\eta - K_0(\eta r)\int_0^{r}\eta\psi(\eta)I_0(\xi\eta)d\eta, \tag{10}$$

де $I_\nu(\eta), K_\nu(\eta)$ – модифіковані функції Бесселя першого та другого роду порядку ν.

Використавши табличні дані [3], наведемо значення типічних інтегралів, які входять до виразу (10).

$$\int_0^r \eta I_0(\xi\eta)\delta_-(\eta-R)d\eta = RI_0(\xi R)\delta_-(r-R), \tag{11}$$

$$\int_0^r \eta I_0(\xi\eta)S_-(\eta-R)d\eta = \frac{S_-(r-R)}{\xi}\left[rI_1(\xi r) - RI_1(\xi R)\right], \tag{12}$$

$$\int_0^r \eta I_0(\xi\eta)J_0(\mu\eta)S_+(R-\eta)d\eta = S_+(R-r)\int_0^r\eta I_0(\xi\eta)J_0(\mu\eta)d\eta +$$

$$+ S_-(r-R)\int_0^r\eta I(\xi\eta)J_0(\mu\eta)d\eta =$$

$$= \frac{rS_+(R-r)}{\mu^2+\xi^2}\left[\mu I_0(\xi r)J_1(\mu r) + \xi I_1(\xi r)J_0(\mu r)\right]+$$

$$+ \frac{RS_-(r-R)}{\mu^2+\xi^2}\left[\mu I_0(\xi R)J_1(\mu R) + \xi I_1(\xi R)J_0(\mu R)\right], \tag{13}$$

$$\int_{R_2}^{r}\eta K_0(\xi\eta)\delta_-(\eta-R)d\eta = RK_0(\xi R)[S_-(r-R)-1],$$

$$\int_{R_2}^{r}\eta K_0(\xi\eta)S_-(\eta-R)d\eta = \frac{S_-(r-R)}{\xi}[RK_1(\xi R)-rK_1(\xi r)]+$$

$$+\frac{1}{\xi}[R_2K_1(\xi R_2)-RK_1(\xi R)], \tag{I4}$$

$$\int_{R_2}^{r}\eta J_0(\mu\eta)K_0(\xi\eta)S_+(R-\eta)d\eta = S_+(R-r)\int_{R}^{r}\eta J_0(\mu\eta)K_0(\xi\eta)d\eta- \tag{I5}$$

$$-\int_{0}^{R}\eta J_0(\mu\eta)K_0(\xi\eta)d\eta = \frac{S_+(R-r)}{\mu^2+\xi^2}[\mu rJ_1(\mu r)K_0(\xi r)-$$

$$-\xi rJ_0(\mu r)K_1(\xi r)-\mu RJ_1(\mu R)K_0(\xi R)+\xi RJ_0(\mu R)K_1(\xi R)]-$$

$$-\frac{1}{\mu^2+\xi^2}[\mu RJ_1(\mu R)K_0(\xi R)-\xi RJ_0(\mu R)K_1(\xi R)+1]. \tag{I6}$$

Продиференціювавши (I0) по r, маємо

$$\frac{d\bar{t}}{dr} = \frac{\xi I_1(\xi r)}{I_0(\xi R_2)}\left[\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{t_c\,\xi}{K^2+\xi^2}+K_0(\xi R_2)\int_{0}^{R_2}\eta\psi(\eta)I_0(\xi\eta)d\eta\right]+$$

$$+\xi I_1(\xi r)\int_{R_2}^{r}\eta\psi(\eta)K_0(\xi\eta)d\eta+\xi K_1(\xi r)\int_{0}^{r}\eta\psi(\eta)I_0(\xi\eta)d\eta. \tag{I7}$$

Згідно зі значеннями інтегралів (II) - (I6) одержуємо

$$\int_{0}^{R_2}\eta\psi(\eta)I_0(\xi\eta)d\eta = R_1(1-K_\lambda^{-1})I_0(\xi R_1)\frac{d\bar{t}}{dr}\bigg|_{r=R_1}-$$

$$-t_0\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{R\xi}{\mu^2+\xi^2}[\mu I_0(\xi R)I_1(\mu R)+\xi I_1(\xi R)J_0(\mu R)]-$$

$$-t_c\sqrt{\frac{2}{\pi}}\left[R_2 I_1(\xi R_2)-R I_1(\xi R)\right], \qquad (18)$$

$$\int_0^{R_1}\eta\varphi(\eta)I_0(\xi\eta)d\eta = R_1(1-K_2^{-1})I_0(\xi R_1)\frac{d\bar t}{dr}\Big|_{r=R_1}-$$

$$-t_0\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{R_1\xi}{\mu^2+\xi^2}\left[\mu I_0(\xi R_1)J_1(\mu R_1)+\xi I_1(\xi R_1)J_0(\mu R_1)\right], \qquad (19)$$

$$\int_{R_1}^{R_2}\eta\varphi(\eta)K_0(\xi\eta)d\eta = t_0\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\xi}{\mu^2+\xi^2}\left[\mu R_1 J_1(\mu R_1)K_0(\xi R_1)-\right.$$

$$-\xi R_1 J_0(\mu R_1)K_1(\xi R_1)-2\mu R J_1(\mu R)K_0(\xi R)+$$

$$\left.+2\xi R J_0(\mu R)K_1(\xi R)-1\right]+t_c\sqrt{\frac{2}{\pi}}\left[R_2 K_1(\xi R_2)-R K_1(\xi R)\right]. \qquad (20)$$

Враховуючи вирази інтегралів (18) – (20), із (17) знаходимо

$$\frac{d\bar t}{dr}\Big|_{r=R_1} = \Delta_0^{-1}\left\{t_0\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\xi}{\mu^2+\xi^2}\left[\xi I_1(\xi R_1)+R_1\xi^2 I_1(\xi R_1)J_0(\mu R_1)K_1(\xi R_1)+\right.\right.$$

$$+2R_1\mu\xi I_1(\xi R_1)J_1(\mu R)K_0(\xi R)-R_1\mu\xi I_1(\xi R_1)J_1(\mu R_1)K_0(\xi R_1)-$$

$$-2R\xi^2 I_1(\xi R_1)J_0(\mu R)K_1(\xi R)-R\mu\xi\frac{I_0(\xi R)}{I_0(\xi R_2)}I_1(\xi R_1)J_1(\mu R)K_0(\xi R_2)-$$

$$-R\xi^2\frac{I_1(\xi R)I_1(\xi R_1)}{I_0(\xi R_2)}J_0(\mu R)K_0(\xi R_2)-$$

$$-R_1\mu\xi\frac{I_0(\xi R_1)}{I_0(\xi R_2)}I_1(\xi R_1)J_1(\mu R_1)K_1(\xi R_1)-$$

$$-R_1\xi^2\frac{I_1(\xi R_1)I_1(\xi R_1)}{I_0(\xi R_2)}J_0(\mu R_1)K_1(\xi R_1)\Big]+$$

$$+t_c\sqrt{\frac{2}{\pi}}I_1(\xi R_1)\xi\Big[\frac{\xi}{I_0(\xi R_2)(k^2+\xi^2)}-R_2\frac{I_1(\xi R_2)}{I_0(\xi R_2)}K_0(\xi R_2)+$$

$$+R\frac{I_1(\xi R)}{I_0(\xi R_2)}K_0(\xi R_2)-R_2K_1(\xi R_2)+RK_1(\xi R)\Big]\Big\},$$

(2I)

де

$$\Delta_0=\Delta_0(|\xi|)=1-R_1(1-K_\lambda^{-1})\xi I_0(\xi R_1)\Big[\frac{I_1(\xi R_1)}{I_0(\xi R_2)}K_0(\xi R_2)+K_1(\xi R_1)\Big].$$

Використовуючи (2I) і вирази інтегралів (I8) – (20), перейдемо в (I0) від трансформант до оригіналів згідно з формулою

$$t=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty \bar{t}\sin z\xi\,d\xi. \qquad (22)$$

У результаті одержимо єдиний для всієї області визначення розв"язок задачі теплопровідності для кусково-однорідного напівнескінченного циліндра з розривним розподілом температури на границі поверхні. Його зручно використовувати, наприклад, при визначенні температурних напружень у напівнескінченному циліндрі зі сталими термопружними характеристиками.

Список літератури: I. К о л я н о Ю.М., П р о ц ю к Б.В. Термоупругость неоднородных и кусочно-однородных пластин, обладающих цилиндрической анизотропией. – В кн.: Обобщенные функции в термоупругости. К.: Наук. думка, 1980, с. 3-I8. 2. К о л я н о Ю.М., П о п о в и ч В.С. Об одном эффективном методе решения задач термоупругости для кусочно-однородных тел, нагреваемых внешней средой. – Физико-химическая механика материалов, 1976,

№ 2, с. 108-112. 3. Прудников А.Г., Брычков Ю.А., Маричев О.И. Интегралы и ряды. Специальные функции. - М.: Наука, 1983. - 720 с.

Стаття надійшла до редколегії 19.03.84