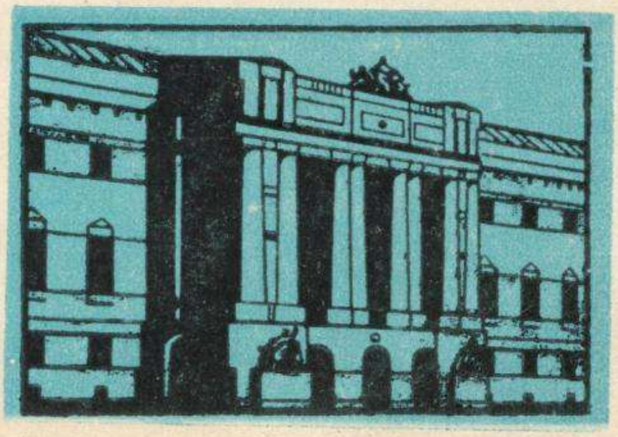
ISSN 0201-758X
ISSN 0320-6572

ВІСНИК ЛЬВІВСЬКОГО УНІВЕРСИТЕТУ

ПИТАННЯ МАТЕМАТИЧНОЇ ФІЗИКИ

СЕРІЯ
МЕХАНІКО-МАТЕМАТИЧНА
ВИПУСК
24
1985



МІНІСТЕРСТВО ВИЩОЇ І СЕРЕДНЬОЇ
СПЕЦІАЛЬНОЇ ОСВІТИ УРСР

ВІСНИК
ЛЬВІВСЬКОГО УНІВЕРСИТЕТУ
Серія механіко-математична
Випуск 24

ПИТАННЯ МАТЕМАТИЧНОЇ ФІЗИКИ

Виходить з 1965 р.

ЛЬВІВ
ВИДАВНИЦТВО ПРИ ЛЬВІВСЬКОМУ
ДЕРЖАВНОМУ УНІВЕРСИТЕТІ
ВИДАВНИЧОГО ОБ'ЄДНАННЯ «ВИЩА ШКОЛА»
1985

22II
П75

УДК 5I3

Вопросы математической физики. Вестн. Львов. ун-та, сер. мех.-мат., вып. 24. – Львов: Выша шк. Изд-во при Львов. ун-те, 1985. – 120 с. (на укр. яз.).

В Вестнике помещены статьи по теории функций, алгебре, топологии, геометрии, теории вероятностей, дифференциальных и интегральных уравнений.

Для научных работников, аспирантов и студентов старших курсов. Библиогр. списки в конце статей.

Редакційна колегія: проф., д-р фіз.-мат. наук В.Е. Л я н ц е (відп. ред.), доц., канд. фіз.-мат. наук Є.М. П а р а с ю к (відп. секр.), доц., канд. фіз.-мат. наук А.А. К о н д р а т ю к, доц., канд. фіз.-мат. наук В.Г. К о с т е н к о, доц., канд. фіз.-мат. наук О.Л. Г о р б а ч у к, доц., канд. фіз.-мат. наук А.І. П и л и п о в и ч.

Відповідальний за випуск доц. Є.М. П а р а с ю к.

Адреса редакційної колегії: 290000, Львів, вул. Університетська, 1, кафедра диференціальних рівнянь

Редакція науково-технічної літератури

Зав. редакцією М.П. П а р ц е й

В $\frac{1702050000-025}{М225(04)-85}$ Замовне

© Львівський державний університет, 1985

УДК 517.956

С.П.Лавренюк

НЕЛОКАЛЬНА ЗАДАЧА ДЛЯ КВАЗІЛІНІЙНОГО ПАРАБОЛІЧНОГО РІВНЯННЯ

Розглянемо задачу

$$u_t = u_{xx} + f(x,t,u); \tag{1}$$

$$\begin{cases} a_0 u_x(0,t) + a_1 u_x(1,t) + b_0 u(0,t) + b_1 u(1,t) = 0, \\ c_0 u_x(0,t) + c_1 u_x(1,t) + d_0 u(0,t) + d_1 u(1,t) = 0; \end{cases} \tag{2}$$

$$u(x,0) = 0 \tag{3}$$

в області $Q_T = \{(x,t):\ 0<x<1,\ 0<t<T\}$. Припустимо, що крайові умови (2) посилено регулярні [3]. Відомо [2], що в просторі $L^2(0,1)$ існує база Рісса $\{X_k(x)\}$, яка складається з власних і приєднаних функцій відповідної задачі Штурма-Ліувілля та містить лише скінченну кількість приєднаних функцій.

Нехай $\lambda_1, \dots, \lambda_N, \lambda_{2N+1}, \dots$ — власні значення задачі, $X_{2k-1}(x)$ -приєднані функції, що відповідають власним значенням λ_k і власним функціям $X_{2k}(x)$, $k=1,\dots,N$. Розглянемо банахів простір $C^1(\bar{Q}_T)$. Нехай $\hat{C}^1(\bar{Q}_T)$ — множина тих функцій, які задовольняють умови (2), (3). Якщо вибрати функцію $v(x,t)$ з простору $\hat{C}^1(\bar{Q}_T)$, то формально розв"язок задачі (2), (3) для рівняння

$$u_t = u_{xx} + g(x,t) \tag{4}$$

можна записати у вигляді [1]

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{N} \Big[\int_0^t g_{2k}(\tau) e^{-\lambda_k (t-\tau)} d\tau\, X_{2k}(x) +$$

$$+\int_0^t g_{2k-1}(\tau)e^{-\lambda_k(t-\tau)}d\tau\,(X_{2k-1}(x)+\rho_k t X_{2k}(x))\Big]+$$

$$+\sum_{k=2N+1}^{\infty}\int_0^t g_k(\tau)e^{-\lambda_k(t-\tau)}d\tau\,X_k(x),$$

де $g(x,t)=f(x,t)\cdot v(x,t)$. (5)

Легко перевірити, що у випадку, коли $g(x,t)$ має неперервну похідну по t і $g(x,0)=0$, то функція (5) задовольняє крайові та початкову умови (2), (3), а також майже для всіх $x\in(0,1)$ і для всіх $t\in[0,T]$ рівняння (4). Виходячи з рівності (5), можемо тепер майже всюди розв"язок задачі (4), (2), (3) одержати як результат дії деякого відображення A на функцію $v(x,t)$. Звернемо увагу на той факт, що відображення A, яке визначається правою частиною рівності (5), кожну функцію $v(x,t)$ з простору $\hat{C}^1(\bar{Q}_T)$ переводить у функцію $u(x,t)$ цього ж простору, причому для всіх $t\in[0,T]$, $u_{xx}(x,t)\in L^2(0,1)$.

Позначимо через $B_\mu=\{v(x,t): v\in\hat{C}^1(\bar{Q}_T),\ \|v\|\le\mu\}$. Очевидно, B_μ – повний метричний простір. Нехай $D=Q_T\times(-\mu,\mu)$. Припускаємо, що функція $f(x,t,y)$ задовольняє в області D умови:

1) $f, f_t, f_y \in C(\bar{D})$

2) $|f_t(x,t,y_1)-f_t(x,t,y_2)|\le\mu_{11}|y_1-y_2|,$

$|f_y(x,t,y_1)-f_y(x,t,y_2)|\le\mu_{12}|y_1-y_2|$

для всіх $(x,t,y_1),(x,t,y_2)\in\bar{D}$. Введемо такі позначення:

$$\mu_1=\sup_k\max_{[0,1]}|X_k(x)|,\quad \mu_2=\max_{\bar{D}}|f_t(x,t,y)|,$$

$$\mu_3=\max_{\bar{D}}|f_y(x,t,y)|,\quad \mu_4=\sup_k\max_{[0,1]}|Y_k(x)|,$$

$$\mu_5 = \max_{\bar{D}} |f(x,t,y)|, \quad \mu_6 = \sup_k \frac{k^2}{|\lambda_k|},$$

$$\mu_8 = \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}}, \quad p = \max_{1 \le k \le N} |p_k|,$$

$$\mu_9 = \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k \operatorname{Re}\lambda_k} + \sum_{k=2N+1}^{\infty} \frac{1}{k \operatorname{Re}\lambda_k},$$

$$\mu_{10} = \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{\operatorname{Re}\lambda_k} + \sum_{k=2N+1}^{\infty} \frac{1}{\operatorname{Re}\lambda_k},$$

$$\mu_{13} = \mu_4 (\mu_3 + \mu_{11} + \mu \cdot \mu_{12}).$$

Як відомо [3], будь-яка функція $\varphi(x) \in L^2(0,1)$ може бути зображена у вигляді ряду

$$\varphi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k X_k(x),$$

де

$$\varphi_k = \int_0^1 \varphi(x) \bar{Y}(x) dx, \quad k = 1, 2, \ldots,$$

причому

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\varphi_k|^2 \le \mu_7 \int_0^1 \varphi^2(x) dx.$$

Легко перевірити, що для довільних функцій $v, v_1, v_2 \in B_\mu$

$$\|Av\| \le \mu_{14}, \quad \|Av_1 - Av_2\| \le \mu_{15} \|v_1 - v_2\|, \tag{6}$$

де

$$\mu_{14} = \mu_1 \mu_4 \mu_5 \mu_{10} (2 + pT) + 2\mu_1 \mu_6 (1 + pT)(\mu_5 \mu_7 \mu_8 + \mu_9 (\mu_2 + \mu \mu_3)) + \mu_1 \mu_4 \mu_{10} ((\mu_2 + \mu \mu_3)(2 + pT) + p\mu_5),$$

$$\mu_{15} = \mu_1 \mu_3 \mu_4 \mu_{10} (1 + pT) + \mu_1 \mu_{10} \mu_{13} (2 + pT) +$$

$$+ P \mu_1 \mu_3 \mu_4 \mu_{10} + 2 \mu_1 \mu_6 ((1+PT) \mu_3 \mu_4 \mu_7 \mu_8 +$$
$$+ \mu_9 \mu_{13} (2+PT)).$$

Теорема. Нехай функція $f(x,t,y)$ задовольняє умови I), 2), $f(x,0,0)=0$ і $\mu_{14} \leq \mu_1 \mu_{15} < 1$. Тоді існує єдиний розв"язок майже всюди задачі (I) – (3).

Доведення. Розглядаємо рівняння

$$u = Av$$

в просторі B_μ. Оскільки на основі (6) оператор A задовольняє принципу стискуючих відображень, то він має єдину нерухому точку u в просторі B_μ, яка і буде розв"язком майже всюди задачі (I) – (3).

Список літератури: I. Ионкин Н.И., Моисеев Е.И. О задаче для уравнения теплопроводности с двуточечными краевыми условиями. – Дифференциальные уравнения, I979, т. I5, № 7, с. I284-I295. 2. Михайлов В.П. О базисах Рисса в $L^2(0,1)$. – Докл. АН СССР, I962, т. I44, № 5, с. 98I-985. 3. Наймарк М.А. Линейные дифференциальные операторы. – М.: Наука, I969. – 245 с.

Стаття надійшла до редколегії 05.03.84

УДК 517.946

В.М.Цимбал

ЗАСТОСУВАННЯ МЕТОДУ ІНТЕГРАЛІВ ЕНЕРГІЇ В ОДНІЙ СИНГУЛЯРНО ЗБУРЕНІЙ ЗАДАЧІ

Дослідження сингулярно збуреної задачі звичайно складається з двох етапів: побудови формального асимптотичного розвинення деяким асимптотичним методом та його обгрунтування, яке зводиться до одержання відповідної оцінки залишкового члена. У випадку сингулярно збурених задач для гіперболічних рівнянь на другому етапі виникають труднощі, зумовлені неможливістю використання методів [4], що добре розвинені в випадку еліптичних і параболічних сингулярно збурених задач. Одним з небагаточисленних методів, який вдається використати для сингулярно збурених задач для гіперболічних рівнянь, є метод інтегралів енергії [3].

Застосуємо метод інтегралів енергії до одержання оцінки в $D=\{(x,t): 0\le x\le l, 0\le t\le T\}$ розв"язку такої задачі:

$$\varepsilon\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)+a(x,t)\frac{\partial u}{\partial t}+b(x,t)u+ \int_0^T\int_0^l K(x,t;\xi,\eta)u(\xi,\eta)\,d\xi\, d\eta=f(x,t,\varepsilon), \tag{1}$$

$$u(x,0)=0,\ \frac{\partial u(x,0)}{\partial t}=0,\ u(0,t)=0,\ u(l,t)=0, \tag{2}$$

де $\varepsilon>0$ – малий параметр.

Теорема. Нехай виконуються умови:

1) $a(x,t),\ f(x,t,\varepsilon)\in C(D),\ b(x,t)\in C^1(D),\ K(x,t;\xi,\eta)\in C$ в $D\times D$;

2) $a(x,t)>0,\ b(x,t)>0$ в D;

3) $$\frac{\ell T^2 e^{\alpha T}}{ab}\int\limits_0^T\int\limits_0^\ell\int\limits_0^T\int\limits_0^\ell K^2(x,t;\xi,\eta)\,d\xi\, d\eta\, dx\, dt < 1,$$

де $a=\min\limits_{(x,t)\in D} a(x,t)$; $b=\min\limits_{(x,t)\in D} b(x,t)$; $\alpha=\frac{1}{b}\max\limits_{(x,t)\in D}\left|\frac{\partial b(x,t)}{\partial t}\right|$.

Тоді наявна оцінка

$$\|u\|_{L_2(D)} \le C\|f\|_{L_2(D)}, \tag{3}$$

де C – константа, яка не залежить від ε .

Доведення. Виходимо зі співвідношення, що легко перевірити

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\varepsilon\left\{\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2\right\}+b(x,t)u^2\right)-$$
$$-2\varepsilon\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\,\frac{\partial u}{\partial t}\right)+2a(x,t)\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2=2f\frac{\partial u}{\partial t}+$$
$$+\frac{\partial b(x,t)}{\partial t}u^2-2\frac{\partial u}{\partial t}\int\limits_0^T\int\limits_0^\ell K(x,t;\xi,\eta)u(\xi,\eta)\,d\xi\, d\eta. \tag{4}$$

Нехай τ довільне $0\le\tau\le T$. Проінтегрувавши (4) по області $D_\tau=\{(x,t): 0\le x\le \ell,\ 0\le t\le \tau\le T\}$ з врахуванням формули Гауса – Остроградського і умов (2), одержимо

$$\int\limits_0^\ell\left\{\varepsilon\left[\left(\frac{\partial u(x,\tau)}{\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial u(x,\tau)}{\partial x}\right)^2\right]+b(x,\tau)u^2(x,\tau)\right\}dx+$$
$$+2\iint\limits_{D_\tau} a(x,t)\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 dx\,dt=2\iint\limits_{D_\tau} f\,\frac{\partial u}{\partial t}\,dx\,dt+$$
$$+\iint\limits_{D_\tau}\frac{\partial b}{\partial t}u^2dx\,dt-2\iint\limits_{D_\tau}\frac{\partial u}{\partial t}\left(\int\limits_0^T\int\limits_0^\ell K(x,t;\xi,\eta)\,u(\xi,\eta)\,d\xi\, d\eta\right)dx\,dt. \tag{5}$$

Застосування нерівності Коші з параметром дає

$$2\left|\int_0^{\tau}\int_0^{l} f\frac{\partial u}{\partial t}\,dx\,dt\right| \le \delta\int_0^{\tau}\int_0^{l}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 dx\,dt + \frac{1}{\delta}\int_0^{\tau}\int_0^{l} f^2\,dx\,dt. \qquad (6)$$

Останній доданок у (5) з використанням нерівності Коші з параметром й інтегральної нерівності Коші можна оцінити таким чином:

$$2\left|\int_0^{\tau}\int_0^{l}\frac{\partial u}{\partial t}\left(\int_0^{T}\int_0^{l}K(x,t;\xi,\eta)\,u(\xi,\eta)\,d\xi\,d\eta\right)dx\,dt\right| \le q\int_0^{\tau}\int_0^{l}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 dx\,dt +$$

$$+\frac{lT}{q}\left(\int_0^{T}\int_0^{l}\int_0^{T}\int_0^{l}K^2(x,t;\xi,\eta)\,d\xi\,d\eta\,dx\,dt\right)\int_0^{T}\int_0^{l}u^2\,d\xi\,d\eta. \qquad (7)$$

Виберемо у (6), (7) $\delta = q = a$. Тоді (5) з врахуванням (6), (7) оцінюємо як

$$\int_0^{l}u^2(x,\tau)\,dx \le \frac{1}{ab}\int_0^{T}\int_0^{l}f^2\,dx\,dt + \alpha\int_0^{\tau}\int_0^{l}u^2\,dx\,dt +$$

$$+\left(\frac{lT}{ab}\int_0^{T}\int_0^{l}\int_0^{T}\int_0^{l}K^2(x,t;\xi,\eta)\,d\xi\,d\eta\,dx\,dt\right)\int_0^{T}\int_0^{l}u^2\,d\xi\,d\eta. \qquad (8)$$

Введемо позначення $y(\tau) = \int_0^{l}u^2(x,\tau)\,dx$,

$$c = \frac{1}{ab}\int_0^{T}\int_0^{l}f^2\,dx\,dt,\quad \beta = \frac{lT}{ab}\int_0^{T}\int_0^{l}\int_0^{T}\int_0^{l}K^2(x,t;\xi,\eta)\,d\xi\,d\eta\,dx\,dt.$$

Перепишемо (8) у вигляді

$$y(\tau) \le C + \alpha \int_0^{\tau} y(t)dt + \beta \int_0^{T} y(t)dt = Q(\tau). \tag{9}$$

Після диференціювання $Q(\tau)$ з врахуванням (9) дістаємо

$$Q'(\tau) \le \alpha Q(\tau). \tag{10}$$

Проінтегрувавши (10) від 0 до τ, після очевидних оцінок одержимо

$$y(\tau) \le Ce^{\alpha T} + \beta e^{\alpha T} \int_0^{T} y(t)dt. \tag{11}$$

Провівши інтегрування (10) по τ від 0 до T, одержимо

остаточну оцінку, де $C = \left(\dfrac{Te^{\alpha T}}{b - \dfrac{\ell T^2 e^{\alpha T}}{a} \int_0^T\int_0^\ell\int_0^T\int_0^\ell K(x,t;\xi,\eta)d\xi d\eta dx dt} \right)$

Теорема доведена.

Зауваження 1. Ми не зупиняємося на побудові асимптотики розв"язку задачі (1), (2), яку легко можна побудувати методом примежового шару [2] з необхідними змінами [1], що зв"язані з наявністю фредгольмового доданка.

Зауваження 2. Аналогічну процедуру застосовують до одержання оцінки розв"язку задачі для рівняння

$$\varepsilon \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + a(x,t)\frac{\partial u}{\partial t} + b(x,t)u +$$

$$+ \int_0^T\int_0^\ell K(x,t;\xi,\eta)\, u(\xi,\eta)d\xi d\eta = f(x,t,\varepsilon)$$

з умовами (2).

Список літератури: 1. Васильева А.Б., Бутузов В.Ф. Асимптотические разложения решений сингулярно возмущенных уравнений. - М.: Наука, 1973. - 280 с. 2. Вишик М.И., Люстерник Л.А. Регулярное вырождение и пограничный слой для линейных дифференциальных уравнений с малым параметром. - Усп. мат. наук, 1957, 12, № 5, с. 3-122. 3. Курант Р. Уравнения с частными производными. - М.: Мир, 1964. - 830 с. 4. Eckhaus W. Formal approximations and singular perturbations. SIAM Review, 1977, 19, N4, p. 288-292.

Стаття надійшла до редколегії 01.09.82

УДК 517.946

В.М.Флюд, В.М.Цимбал

ЗМІШАНА ЗАДАЧА ДЛЯ ГІПЕРБОЛІЧНОГО РІВНЯННЯ З ДЕКІЛЬКОМА МАЛИМИ ПАРАМЕТРАМИ

Результат цієї замітки доповнює результати праць [1, 4].

В області $D=\{(x,t): 0\le x\le l, 0\le t\le T\}$ розглянемо змішану задачу

$$\varepsilon^2\mu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)+\varepsilon\left(a(x,t)\frac{\partial u}{\partial t}+b(x,t)\frac{\partial u}{\partial x}\right)+c(x,t)u=f(x,t), \tag{1}$$

$$u(x,0;\varepsilon,\mu)=\frac{\partial u}{\partial t}(x,0;\varepsilon,\mu)=u(0,t;\varepsilon,\mu)=u(l,t;\varepsilon,\mu)=0, \tag{2}$$

де $0<\varepsilon\ll 1$, $0<\mu\ll 1$ - параметри.

Припустимо, що виконуються такі умови:

1) $a(x,t)>0, c(x,t)>0, (x,t)\in D, b(0,t)>0, b(l,t)<0, t\in[0,T]$;

2) $a(x,t), b(x,t), c(x,t), f(x,t)$ - неперервні та неперервно диференційовані по x і t в області D;

3) $f(0,0)=f(l,0)=0$.

Відомо, що при даних припущеннях розв"язок задачі (1) - (2) існує і єдиний при фіксованих значеннях параметрів ε і μ.

Користуючись методом Вішика-Люстерника [2], побудуємо асимптотичне розвинення розв"язку задачі (1) - (2). Шукатимемо його у вигляді

$$u(x,t;\varepsilon,\mu)=\sum_{i+j=0}^{1}\varepsilon^i\mu^j v_{ij}(x,t)+\sum_{i+j=0}^{1}\varepsilon^i\mu^j\Pi_{ij}(x,\tau)+\mu\sum_{i+j=0}^{1}\varepsilon^i\mu^j Q_{ij}(x,\xi)+$$

$$+\sum_{i+j=0}^{1}\varepsilon^i\mu^j Z_{ij}(\eta,t)+\sum_{i+j=0}^{1}\varepsilon^i\mu^j Z^*_{ij}(\zeta,t)+\sum_{i+j=0}^{1}\varepsilon^i\mu^j P_{ij}(\eta,\tau)+$$

$$+\sum_{i+j=0}^{1}\varepsilon^i\mu^j P^*_{ij}(\zeta,\tau)+R(x,t;\varepsilon,\mu), \qquad (3)$$

де $\tau=\dfrac{t}{\varepsilon}$, $\xi=\dfrac{t}{\varepsilon\mu}$, $\eta=\dfrac{x}{\varepsilon}$, $\zeta=\dfrac{\ell-x}{\varepsilon}$; функції $v_{ij}(x,t)$, $\Pi_{ij}(x,\tau)$, $Q_{ij}(x,\xi)$, $Z_{ij}(\eta,t)$, $Z^*_{ij}(\zeta,t)$, $P_{ij}(\eta,\tau)$, $P^*_{ij}(\zeta,\tau)$ визначаються з ітераційного процесу, описаного далі.

Зауважимо, що (3) містить тільки члени до першого порядку по ε , μ розв"язку задачі (I) – (2). Для одержання асимптотичного розвинення розв"язку вищого порядку слід вимагати додаткових умов на коефіцієнти та вільний член (I). Тому, не накладаючи цих додаткових умов, обмежимось даним випадком.

Регулярну частину розвинення $V(x,t;\varepsilon,\mu)=\sum_{i+j=0}^{1}\varepsilon^i\mu^j v_{ij}(x,t)$ знаходимо як результат підстановки виразу $V(x,t;\varepsilon,\mu)$ у рівняння (I) і зрівнювання коефіцієнтів при відповідних степенях ε і μ :

$$c(x,t)v_{00}(x,t)=f(x,t);\ c(x,t)v_{ij}(x,t)=-\left(a(x,t)\frac{\partial v_{i-1,j}}{\partial t}+b(x,t)\frac{\partial v_{i-1,j}}{\partial x}\right),\quad (i,j=0,1). \qquad (4)$$

Очевидно, $V(x,t;\varepsilon,\mu)$, взагалі кажучи, жодну з умов (2) не задовольняє. Тут і надалі вважаємо, що функція з хоч одним від"ємним індексом тотожно нульова.

Функції $\Pi(x,\tau;\varepsilon,\mu)=\sum_{i+j=0}^{1}\varepsilon^i\mu^j\Pi_{ij}(x,\tau)$ і $Q(x,\xi;\varepsilon,\mu)=$ $=\mu\sum_{i+j=0}^{1}\varepsilon^i\mu^j Q_{ij}(x,\xi)$ служать для того, щоб у сумі з $V(x,t;\varepsilon,\mu)$ задовольнити перші дві умови (2). За допомогою рівняння знаходимо $\Pi(x,\tau;\varepsilon,\mu)$

$$a(x,0)\frac{\partial \Pi}{\partial \tau}+c(x,0)\Pi=[a(x,0)-a(x,\varepsilon\tau)]\frac{\partial \Pi}{\partial \tau}+[c(x,0)-c(x,\varepsilon\tau)]\Pi-$$
$$-\varepsilon b(x,\varepsilon\tau)\frac{\partial \Pi}{\partial x}-\mu\frac{\partial^2 \Pi}{\partial x^2}+\varepsilon^2\mu\frac{\partial^2 \Pi}{\partial x^2}$$

Розклавши коефіцієнти в ряд Тейлора в околі $t=0$, підставивши замість $\Pi(x,\tau;\varepsilon,\mu)$ її вираз і зрівнявши коефіцієнти при відповідних степенях ε і μ , одержимо

$$a(x,0)\frac{\partial \Pi_{ij}}{\partial \tau}+c(x,0)\Pi_{ij}=g_{ij}(x,\tau),\quad (i,j=0,1), \tag{5}$$

де $g_{ij}(x,\tau)(i,j=0,1)$ – функція, явний вигляд якої легко виписати, причому $g_{00}(x,\tau)=0$.

Аналогічно, застосовуючи відповідні регуляризуючі перетворення $\xi=\frac{t}{\varepsilon\mu}$, $\eta=\frac{x}{\varepsilon}$, $\zeta=\frac{\ell-x}{\varepsilon}$, $\tau=\frac{t}{\varepsilon}$ і рекурентний процес теорії сингулярних збурень, одержуємо відповідні рівняння для визначення функцій $Q_{ij}(x,\xi)$, $\mathcal{I}_{ij}(\eta,t)$, $\mathcal{I}^*_{ij}(\zeta,t)$, $P_{ij}(\eta,\tau)$, $P^*_{ij}(\zeta,\tau)$

$$\frac{\partial^2 Q_{ij}}{\partial \xi^2}+a(x,0)\frac{\partial Q_{ij}}{\partial \xi}=h_{ij}(x,\xi),\qquad (i,j=0,1); \tag{6}$$

$$b(0,t)\frac{\partial \mathcal{I}_{ij}}{\partial \eta}+c(0,t)\mathcal{I}_{ij}=q_{ij}(\eta,t),\qquad (i,j=0,1); \tag{7}$$

$$-b(\ell,t)\frac{\partial \mathcal{I}^*_{ij}}{\partial \zeta}+c(\ell,t)\mathcal{I}^*_{ij}=S(\zeta,t),\qquad (i,j=0,1); \tag{8}$$

$$a(0,0)\frac{\partial P_{ij}}{\partial \tau}+b(0,0)\frac{\partial P_{ij}}{\partial \eta}+c(0,0)P_{ij}=r_{ij}(\eta,\tau),\ (i,j=0,1); \tag{9}$$

$$a(\ell,0)\frac{\partial P^*_{ij}}{\partial \tau}-b(\ell,0)\frac{\partial P^*_{ij}}{\partial \zeta}+c(\ell,0)P^*_{ij}=r^*_{ij}(\zeta,\tau),\ (i,j=0,1); \tag{10}$$

де $h_{ij}(x,\xi)$, $q_{ij}(\eta,t)$, $S_{ij}(\zeta,t)$, $r_{ij}(\eta,\tau)$, $r^*_{ij}(\zeta,\tau)$ – деякі лінійні комбінації відповідно $Q_{00}(x,\xi)$, $\mathcal{I}_{00}(\eta,t)$, $\mathcal{I}^*_{00}(\zeta,t)$,

$P_\infty(\eta,\tau)$, $P^*_\infty(\zeta,\tau)$ і їхніх похідних, причому $h_\infty(x,\xi)=q_\infty(\eta,t)=\xi_\infty(\zeta,t)=z_\infty(\eta,\tau)=z^*_\infty(\zeta,\tau)=0$. Функції $Z_{ij}(\eta,t)$ і $Z^*_{ij}(\zeta,t)$ служать для того, щоб сумісно з $V_{ij}(x,t)$ задовольнити відповідно третю та четверту умови (2), а функції $P_{ij}(\eta,\tau)$ і $P^*_{ij}(\zeta,\tau)$ – щоб ліквідувати нев"язку, яку вносять $\Pi_{ij}(x,\tau)$ і $Q_{ij}(x,\xi)$ на сторони $x=0$ і $x=l$ та $Z_{ij}(\eta,t)$ і $Z^*_{ij}(\zeta,t)$ на сторону $t=0$.
Використовуючи (2), (3) і третю умову нашого припущення, одержуємо такі умови для шуканих функцій:

$$\Pi_{ij}(x,0)=-V_{ij}(x,0)-Q_{ij-1}(x,0), \qquad (i,j=0,1); \tag{II}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial Q_{ij}}{\partial \xi}(x,0)=-\dfrac{\partial \Pi_{ij}}{\partial \tau}(x,0)-\dfrac{\partial V_{i-1\,j}}{\partial t}(x,0), \\ Q_{ij}(x,\xi)\xrightarrow[\xi\to-\infty]{} 0, \end{cases} \qquad (i,j=0,1); \tag{I2}$$

$$Z_{ij}(0,t)=-V_{ij}(0,t), \qquad (i,j=0,1); \tag{I3}$$

$$Z^*_{ij}(0,t)=-V_{ij}(l,t), \qquad (i,j=0,1); \tag{I4}$$

$$\begin{cases} P_{ij}(\eta,0)=-Z_{ij}(\eta,0), \\ P_{ij}(0,\tau)=-\Pi_{ij}(0,\tau), \end{cases} \qquad (i,j=0,1); \tag{I5}$$

$$\begin{cases} P^*_{ij}(\zeta,0)=-Z^*_{ij}(\zeta,0), \\ P^*_{ij}(0,\tau)=-\Pi_{ij}(l,\tau), \end{cases} \qquad (i,j=0,1). \tag{I6}$$

Отже, функції $\Pi_{ij}(x,\tau)$, $Q_{ij}(x,\xi)$, $Z_{ij}(\eta,t)$, $Z^*_{ij}(\zeta,t)$ знаходимо як розв"язки відповідно задач для звичайних диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами (5)-(II), (6)-(I2), (7)-(I3), (8)-(I4), а $P_{ij}(\eta,\tau)$ і $P^*_{ij}(\zeta,\tau)$ – як розв"язки відповідних змішаних задач (9)-(I5) і (I0)-(I6) для диференціальних рівнянь із частинними похідними першого порядку зі сталими коефіцієнтами.

Легко показати, що функції $\Pi_{ij}(x,\tau)$, $Q_{ij}(x,\xi)$, $\mathcal{Z}_{ij}(\eta,t)$, $\mathcal{Z}^*_{ij}(\zeta,t)$ є функціями примежового шару. Розв"язки задач (9)-(І5) і (І0)-(І6) неважко записати в явному вигляді, причому з умови 3) випливає $P_{00}(\eta,\tau)=0$ і $P^*_{00}(\zeta,\tau)=0$, а отже, легко переконатись, що $\tau_{10}(\eta,\tau)=\tau_{01}(\eta,\tau)=0$ і $\tau^*_{10}(\zeta,\tau)=\tau^*_{01}(\zeta,\tau)=0$.

З явного вигляду для $P_{ij}(\eta,\tau)$ та $P^*_{ij}(\zeta,\tau)$ видно, що вони є функціями так званого кутового примежового шару.

Для залишкового члена $R(x,t;\varepsilon,\mu)$ методом інтегралів енергії [3] одержано оцінку

$$\| R(x,t;\varepsilon,\mu)\|_{L_2(D)} = O((\varepsilon+\mu)^{3/2}). \tag{I7}$$

Доведене сформулюємо у вигляді теореми.

Теорема. Припустимо, що в області D виконуються умови І), 2), 3). Тоді розв"язок задачі (І)-(2) допускає асимптотичне зображення виду (3), де $V_{ij}(x,t)$ визначаються з (4); функції звичайного примежового шару $\Pi_{ij}(x,\tau)$, $Q_{ij}(x,\xi)$, $\mathcal{Z}_{ij}(\eta,t)$, $\mathcal{Z}_{ij}(\zeta,t)$ - відповідно розв"язки задач (5)-(ІІ), (6)-(І2), (7)-(І3), (8)-(І4); функції кутового примежового шару $P_{ij}(\eta,\tau)$, $P^*_{ij}(\zeta,\tau)$ - розв"язки задач (9)-(І5), (І0)-(І6); залишковий член $R(x,t;\varepsilon,\mu)$ допускає оцінку (І7).

Список літератури: І. Б у т у з о в В.Ф. Угловой погранслой в смешанных сингулярно возмущенных задачах для гиперболических уравнений. - Мат. сб., І977, № 3, с. 460-485. 2. В и ш и к М.И., Л ю с т е р н и к Л.А. Регулярное вырождение и пограничный слой для линейных дифференциальных уравнений с малым параметром. - Усп. мат. наук, І957, № 5, с. 3-І22. 3. К у р а н т Р. Уравнения с частными производными. - М.: Мир, І964. - 830 с. 4. Ц ы м б а л В.Н. Угловой пограничный слой в смешанной сингулярно возмущенной задаче для гиперболического уравнения. - В кн.: Асимптотические методы нелинейной механики. К., І98І, с. І48-І52.

Стаття надійшла до редколегії І0.0І.83

УДК 517.946

Г.-В.С.Гупало, Г.П.Лопушанська

ЗАДАЧА ДІРІХЛЕ ДЛЯ НЕОДНОРІДНОГО ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОГО РІВНЯННЯ ДРУГОГО ПОРЯДКУ ЕЛІПТИЧНОГО ТИПУ В ПРОСТОРІ УЗАГАЛЬНЕНИХ ФУНКЦІЙ

Розглянемо задачу Діріхле для диференціального рівняння другого порядку еліптичного типу, коли граничні значення та права частина рівняння – узагальнені функції з певних класів.

1. Нехай Ω – область в R^n, $n\geq 3$, обмежена замкненою $n-1$ – вимірною поверхнею S класу C^∞; $D(\bar{\Omega})$, $D(S)$ – простори нескінченно диференційованих (основних) функцій в $\bar{\Omega}=\Omega\cup S$ і на S відповідно; $D_0(\bar{\Omega})$ – простір нескінченно диференційованих функцій в $\bar{\Omega}$, які дорівнюють нулеві на поверхні S; $D'(\bar{\Omega})$, $D'(S)$, $D_0'(\bar{\Omega})$ – простори лінійних неперервних функціоналів (узагальнених функцій) відповідно на $D(\bar{\Omega})$, $D(S)$, $D_0(\bar{\Omega})$; $(\mathcal{F},\psi)$ – дія узагальненої функції $\mathcal{F}\in D'(\bar{\Omega})$ $(\mathcal{F}\in D_0'(\bar{\Omega}))$ на основну функцію $\psi\in D(\bar{\Omega})$ $(\psi\in D_0(\bar{\Omega}))$, $\langle H,\varphi\rangle$ – дія $H\in D'(S)$ на $\varphi\in D(S)$.

2. Постановка задачі. Нехай $\mathcal{F}\in D_0'(\bar{\Omega})$, $H\in D'(S)$. Знайти розв"язок рівняння

$$\mathfrak{M}u\equiv\sum_{i,k=1}^{n}a_{ik}(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i\partial x_k}+\sum_{i=1}^{n}b_i(x)\frac{\partial u}{\partial x_i}+c(x)u=\mathcal{F} \tag{1}$$

в області Ω, який задовольняє на поверхні S умову

$$u=H. \tag{2}$$

Вважаємо, що $a_{ik}(x)$, $b_i(x)$, $c(x)\in C^\infty(\bar{\Omega})$, $i,k=\overline{1,n}$, $a_{ik}=a_{ki}$, $c(x)\leq 0$ в Ω. У такій постановці задачу Діріхле для рівняння Пуассона розглянуто в [1].

Узагальнену функцію $u \in D'(\bar{\Omega})$ називатимемо розв"язком задачі (I)-(2), якщо

$$(u, \mathcal{M}\psi) = (\mathcal{F}, \psi) - \langle H, Q\psi \rangle, \ \forall \psi \in D_0(\bar{\Omega}). \tag{3}$$

Тут такі самі позначення, як у праці [3], тобто $\mathcal{M}$ – спряжений оператор до оператора $\mathcal{M}$; $Q \equiv a\frac{d}{d_\nu} + (\beta - b), a = [\sum_{i=1}^{n}(\sum_{k=1}^{n} a_{ik} n_k)^2]^{\frac{1}{2}}$; $b = \sum_{i=1}^{n} e_i n_i, e_i = b_i - \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial a_{ik}}{\partial x_k}$; β – довільна функція з $D(S)$; n_i – напрямні косинуси внутрішньої нормалі n ; $\frac{d}{d_\nu}$ – диференціювання по напрямку конормалі, $\nu_i = \frac{1}{a}\sum_{k=1}^{n} a_{ik} n_k$ – напрямні косинуси конормалі.

Теорема I. Розв"язок задачі (I)-(2) в розумінні (3) єдиний.

Доведення. Дійсно, нехай існують два розв"язки u_1 і u_2 задачі (I)-(2). Тоді для узагальненої функції $u = u_1 - u_2$ з рівності (3) одержуємо

$$(u, \mathcal{M}\psi) = 0, \ \forall \psi \in D_0(\bar{\Omega}). \tag{4}$$

Згідно з працею [3] існує єдиний розв"язок $\psi(x)$ рівняння $\mathcal{M}\psi = \chi$, який задоволняє умову $\psi|_S = 0$, для кожної $\chi \in D(\bar{\Omega})$. Тоді з (4) дістаємо, що $(u, \chi) = 0$, $\forall \chi \in D(\bar{\Omega})$, отже, $u = 0$ в $D'(\bar{\Omega})$.

3. Нехай $H \in D'(S)$. Вважаємо [2], що функція $u(x)$, визначена в області Ω, набуває на S узагальнених граничних значень H, коли

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{S_\varepsilon} u(x_\varepsilon)\varphi(x_\varepsilon)dS_\varepsilon = \langle H, \varphi \rangle, \ \forall \varphi \in D(S), \tag{5}$$

де S_ε – поверхня в Ω, паралельна до поверхні S; $\varphi(x_\varepsilon) = \varphi(x)$; $x_\varepsilon \in S_\varepsilon$; $x \in S$; $x_\varepsilon = x + \varepsilon\tau(x)$, $\tau(x)$ – орт внутрішньої нормалі до S в точці x.

Теорема 2. Нехай $\mathcal{F} = 0$. Якщо функція $u(x)$ задовольняє рівняння (I) і $u = H$ на поверхні S у розумінні (5), то u є розв"язком задачі (I)-(2) в розумінні (3).

3-3149

Доведення. Коли $\mathcal{F}=0$ і $u=H$ на поверхні S в розумінні (5), то маємо узагальнену задачу Діріхле для рівняння $\mathfrak{M}u=0$, яка розглянута в праці [2]. Її розв"язок згідно з теоремою I із [2] має вигляд

$$u(x)=2\langle K, Q_y G(x,y)\rangle, \ x\in\Omega, \tag{6}$$

де $\langle K,g\rangle=\langle H,\varphi_g\rangle; \ \forall g\in D(S)$; φ_g – розв"язок інтегрального рівняння

$$g(y)=\varphi(y)+2\int_S Q_y G(x,y)\,\varphi(x)\,d_x S, \ y\in S; \tag{7}$$

$G(x,y)$ – головний фундаментальний розв"язок [3] рівняння $\mathfrak{M}u=0$ в R^n.

Для доведення теореми досить показати, що

$$\int_\Omega \langle 2K, Q_y G(x,y)\rangle\, \mathfrak{N}\psi(x)\,dx=$$
$$=-\langle K, Q\psi+2\int_S Q_y G(x,y)\,Q_x\psi(x)\,d_x S\rangle, \ \forall\psi\in D_0(\bar{\Omega}). \tag{8}$$

Справді,

$$\int_\Omega \langle 2K, Q_y G(x,y)\rangle\, \mathfrak{N}\psi(x)\,dx=\langle 2K, \int_\Omega Q_y G(x,y)\,\mathfrak{N}\psi(x)\,dx\rangle. \tag{9}$$

Розглянемо

$$\int_\Omega G(x,z)\,\mathfrak{N}\psi(x)\,dx=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\Omega\setminus T_\varepsilon} G(x,z)\,\mathfrak{N}\psi(x)\,dx,$$

де T_ε – окіл точки z, означений нерівністю $\sum_{z,s=1}^{n} A_{zs}(z)(x_z-z_z)(x_s-z_s)\leqslant\varepsilon^2$; A_{zs} – відношення алгебраїчного доповнення елемента a_{zs} у визначнику A, складеного з коефіцієнтів a_{zs} рівняння, до самого визначника A. Застосуємо формулу Гріна [3] до області $\Omega\setminus T_\varepsilon$ і перейдемо до границі при $\varepsilon\to 0$. Враховуючи, що $\psi\in D_0(\bar{\Omega})$, одержуємо

$$\int_\Omega G(x,z)\,\mathfrak{N}\psi(x)\,dx=-\int_S G(x,z)\,Q_x\psi(x)\,d_x S-\psi(z), \ z\in\Omega. \tag{10}$$

Згідно з (I0) і формулою стрибка конормальної похідної потенціалу простого шару [3], маємо

$$\int_{\Omega} Q_y G(x,y) \mathcal{N} \psi(x) dx = -\int_{S} Q_y G(x,y) Q_x \psi(x) d_x S - \frac{1}{2} Q\psi(y). \tag{II}$$

Підставивши (II) в (9), записуємо

$$\int_{\Omega} < 2K, Q_y G(x,y) > \mathcal{N} \psi(x) dx =$$

$$= -< K, Q\psi + 2\int_{S} Q_y G(x,y) Q_x \psi(x) d_x S >, \ \forall \psi \in D_0(\bar{\Omega}).$$

Отже, теорема доведена.

4. Нехай $\Gamma(x,y)$ – функція Гріна задачі Діріхле для області Ω. Справедлива теорема, яка дає представлення розв"язку задачі (I)-(2).

<u>Теорема 3</u>. Узагальнена функція u, визначена рівністю

$$(u,\psi) = (\mathcal{F}, \int_{\Omega} \Gamma(x,y) \psi(x) dx) + < H, Q_y \int_{\Omega} \Gamma(x,y) \psi(x) dx >, \forall \psi \in D(\bar{\Omega}), \tag{I2}$$

є розв"язком задачі (I)-(2) в розумінні (3).

<u>Доведення</u>. Використовуючи основні властивості функції Гріна, переконуємось, що рівність (I2) визначає однозначно узагальнену функцію $u \in D'(\bar{\Omega})$.

Залишилось показати справедливість рівності (3), тобто

$$(\mathcal{F}, \int_{\Omega} \Gamma(x,y) \mathcal{N} \psi(x) dx) + < H, Q_y \int_{\Omega} \Gamma(x,y) \mathcal{N} \psi(x) dx > =$$

$$= (\mathcal{F}, \psi) - < H, Q\psi >, \ \forall \psi \in D_0(\bar{\Omega}). \tag{I3}$$

Згідно з формулою Стокса [3]

$$\int_{\Omega} \Gamma(x,y) \mathcal{N} \psi(x) dx = \psi(y), \quad y \in \bar{\Omega}, \tag{I4}$$

$$Q_y \int_{\Omega} \Gamma(x,y) \mathcal{N} \psi(x) dx = -Q\psi(y), \quad y \in S. \tag{I5}$$

З (I4) і (I5) випливає справедливість рівності (I3). Теорема доведена.

Список літератури: I. Г у п а л о Г.-В.С. Задача Діріхле для рівняння Пуассона. - Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат., 1976, вип. II, с. 2I-25. 2. Г у п а л о Г.С. Про узагальнену задачу Діріхле для диференціального рівняння 2-го порядку еліптичного типу. - Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат., I969, вип. 4, с. 59-6I. 3. М и р а н д а К. Уравнения с частными производными эллиптического типа. М.: Изд-во иностр. лит., 195?. - 230 с.

Стаття надійшла до редколегії 20.02.84

УДК 5I7.946

Г.-В.С.Гупало, Г.П.Лопушанська

УЗАГАЛЬНЕНА ЗАДАЧА НЕЙМАНА ДЛЯ НЕОДНОРІДНОГО ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОГО РІВНЯННЯ ДРУГОГО ПОРЯДКУ ЕЛІПТИЧНОГО ТИПУ

Розглянемо задачу Неймана для неоднорідного диференціального рівняння другого порядку еліптичного типу, коли права частина граничної умови та вільний член рівняння - узагальнені функції з певних класів.

Нехай Ω - область в R^n, $n \geq 3$ обмежена замкненою $n-1$ - вимірною поверхнею S класу C^∞. В Ω розглядаємо еліптичне диференціальне рівняння другого порядку з нескінченно диференційованими коефіцієнтами

$$\mathcal{M}u \equiv \sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_k} + \sum_{i=1}^{n} b_i(x)\frac{\partial u}{\partial x_i} + c(x)u = \mathcal{F}, \tag{I}$$

крім того, вважаємо, що $c(x) \leq 0$, $a_{ik} = a_{ki}$.

Через $D(\bar\Omega)$, $D(S)$ позначимо простори нескінченно диференційованих функцій в $\bar\Omega = \Omega \cup S$ і на S відповідно;

$D_N(\bar{\Omega})=\{\psi\in D(\bar{\Omega}): Q\psi|_S=0\}$, де $Q=\alpha\frac{d}{d\nu}+(\beta-\theta)$ [3];
$D'(\bar{\Omega})$, $D'_N(\bar{\Omega})$, $D'(S)$ -
простори лінійних неперервних функціоналів (узагальнених функцій) відповідно на $D(\bar{\Omega})$, $D_N(\bar{\Omega})$, $D(S)$, $(\mathcal{F},\psi)$ - дія узагальненої функції $\mathcal{F}\in D'(\bar{\Omega})$ $(\mathcal{F}\in D'_N(\bar{\Omega}))$ на основну функцію $\psi\in D(\bar{\Omega})$ $(\psi\in D_N(\bar{\Omega}))$, $\langle B,\varphi\rangle$ - дія $B\in D'(S)$ на $\varphi\in D(S)$.

<u>Постановка задачі</u>. Нехай $\mathcal{F}\in D'_N(\bar{\Omega})$, $B\in D'(S)$. Знайти розв"язок рівняння (I) в області Ω , який задовольняє на поверхні S умову

$$Pu=B, \tag{2}$$

де $P\equiv\alpha\frac{d}{d\nu}+\beta$ [3]; $\alpha,\beta\in D(S)$ і $\alpha\neq 0;\ \beta\neq 0$ на поверхні S .

Узагальнену функцію $u\in D'(\bar{\Omega})$ називаємо розв"язком задачі (I)-(2), якщо

$$(u,\mathcal{M}\psi)=(F,\psi)+\langle B,\psi\rangle,\ \forall\psi\in D_N(\bar{\Omega}). \tag{3}$$

Позначення операторів $\mathcal{M}$, P, Q ті ж, що й в працях [2, 3] .

<u>Теорема I</u>. Розв"язок задачі (I)-(2) у розумінні (3) единий.

<u>Доведення</u>. Нехай u_1 і u_2 - два розв"язки задачі (I)-(2). Тоді для узагальненої функції $u=u_1-u_2$ з (3) одержуємо, що

$$(u,\mathcal{M}\psi)=0,\ \forall\psi\in D_N(\bar{\Omega}). \tag{4}$$

Звідси, використовуючи відповідні теореми з праці [3] , міркуваннями, як і в праці [2] отримуємо, що $u=0$ в $D'(\bar{\Omega})$, тобто $u_1=u_2$.

<u>Теорема 2</u>. Якщо $\mathcal{F}=0$, $B\in D'(S)$, $u(x)$ - розв"язок в області Ω однорідного рівняння $\mathcal{M}u=0$, який задовольняє граничну умову

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{S_\varepsilon} Pu(x_\varepsilon)\psi(x_\varepsilon)dS_\varepsilon = \langle B,\psi\rangle,\ \forall\psi\in D(S) \tag{5}$$

(S_ε – паралельна до S поверхня, $x_\varepsilon = x+\varepsilon\tau(x)$, $x\in S$, $x_\varepsilon\in S_\varepsilon$, $\psi(x_\varepsilon)=\psi(x)$[2]), то функція $u(x)$ є розв"язком задачі Неймана для цього однорідного рівняння у розумінні (3).

<u>Доведення</u>. Розв"язок $u(x)$ однорідного рівняння $\mathfrak{M}u=0$ в області Ω, який задовольняє умову (5), згідно з працею [I] існує для кожної $B\in D'(S)$ єдиний і має вигляд

$$u(x) = \langle 2C, G(x,y)\rangle,\ \ x\in\Omega, \tag{6}$$

де $G(x,y)$ – головний фундаментальний розв"язок [3] рівняння $\mathfrak{M}u=0$ в R^n, $\langle C,g\rangle = \langle B,\psi_g\rangle$, $\forall g\in D(S)$; ψ_g – розв"язок інтегрального рівняння $g(y) = -\psi(y)+2\int_S P_x G(x,y)\psi(x)d_xS$.

Для доведення теореми досить показати, що

$$\int_\Omega \langle 2C, G(x,y)\rangle \mathfrak{N}\psi(x)dx = \\ = \langle C, -\psi(y)+2\int_S P_x G(x,y)\psi(x)d_xS\rangle,\ \forall\psi\in D(\bar\Omega). \tag{7}$$

Справді

$$\int_\Omega \langle 2C, G(x,y)\rangle \mathfrak{N}\psi(x)dx = \langle 2C, \int_\Omega G(x,y)\mathfrak{N}\psi(x)dx\rangle. \tag{8}$$

Аналогічними міркуваннями показуємо [2] , що

$$\int_\Omega G(x,z)\mathfrak{N}\psi(x)dx = \int_S \psi(x)P_x G(x,z)d_xS - \psi(z),\ z\in\Omega. \tag{9}$$

Згідно з (9) і формулою стрибка для потенціалу подвійного шару [3] маємо

$$\int_\Omega G(x,y)\mathfrak{N}\psi(x)dx = \int_S \psi(x)P_x G(x,y)d_xS - \frac{\psi(y)}{2},\ y\in S. \tag{10}$$

Підставивши (I0) в (8), остаточно одержуємо

$$\int_\Omega \langle 2C, G(x,y)\rangle \mathfrak{N}\psi(x)dx = \langle C, -\psi(y)+2\int_S P_x G(x,y)\psi(x)d_xS\rangle$$

Нехай $\Gamma(x,y)$ – функція Гріна задачі Неймана [3]. Означимо узагальнені функції $U_{\mathcal{F}}$, U_{B} рівностями

$$(U_{\mathcal{F}}, \psi) = (\mathcal{F}, \int_{\Omega} \Gamma(x,y)\psi(x)dx), \ \forall \psi \in D(\bar{\Omega}), \tag{11}$$

$$(U_{B}, \psi) = -\langle B, \int_{\Omega} \Gamma(x,y)\psi(x)dx \rangle, \forall \psi \in D(\bar{\Omega}). \tag{12}$$

Справедлива теорема, яка дає представлення розв"язку задачі (1)–(2).

Теорема 3. Узагальнена функція

$$U = U_{\mathcal{F}} + U_{B} \tag{13}$$

є розв"язком задачі (1)–(2) в розумінні (3).

Доведення. Згідно з властивостями функції Гріна [3], легко переконатися, що узагальнені функції $U_{\mathcal{F}}$ і $U_{B} \in D'(\bar{\Omega})$ формулами (11) і (12) визначаються однозначно. Залишається показати справедливість рівності (3), тобто

$$(U_{\mathcal{F}} + U_{B}, \mathcal{N}\psi) = (\mathcal{F}, \psi) + \langle B, \psi \rangle, \forall \psi \in D_{N}(\bar{\Omega}). \tag{14}$$

Дійсно, згідно з (11), (12) і формулою Стокса [3] записуємо

$$(U_{\mathcal{F}}, \mathcal{N}\psi) = (\mathcal{F}, \psi), \ \forall \psi \in D_{N}(\bar{\Omega}), \tag{15}$$

$$(U_{B}, \mathcal{N}\psi) = \langle B, \psi \rangle, \forall \psi \in D_{N}(\bar{\Omega}). \tag{16}$$

Підставивши (15) і (16) в (14), переконуємось, що теорема доведена.

Список літератури: 1. Гупало Г.С. Про узагальнену задачу Неймана для диференціального рівняння 2-го порядку еліптичного типу. – Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат., 1969, вип. 4, с. 57–58. 2. Гупало Г.-В.С., Лопушанська Г.П. Задача Діріхле для неоднорідного диференціального рівняння другого порядку еліптичного типу в просторі узагальнених функцій. – У цьому ж збірнику, с. 16–20. 3. Миранда К. Уравнения с частными производными эллиптического типа. – М.: Изд-во иностр. лит., 1957. 250 с.

Стаття надійшла до редколегії 20.02.84

УДК 517.946

В.М.Кирилич

МНОГОФАЗНА ЗАДАЧА ТИПУ СТЕФАНА ДЛЯ ГІПЕРБОЛІЧНОЇ СИСТЕМИ ПЕРШОГО ПОРЯДКУ

У верхній півплощині $t>0$ розглянемо систему

$$\frac{\partial u_i}{\partial t}+\lambda_i(x,t)\frac{\partial u_i}{\partial x}=F_i(x,t,u),\ i=\overline{1,n} \tag{I}$$

Нехай γ_0 і γ_{m+1} – гладкі криві задані відповідно рівняннями $x=\varphi_0(t)$ і $x=\varphi_{m+1}(t)$ $(\varphi_0(0)=0,\ \varphi_0(t)<\varphi_{m+1}(t)$ $\forall t>0)$, $m\geq 0$, $T>0$ – задане число. Криві γ_i: $x=\varphi_i(t)$ $(\varphi_i(0)=0,\ \varphi_i(t)<\varphi_{i+1}(t)\ \forall t>0$ розділяють область $G=\{(x,t)\in R^2,\ \varphi_0(t)<x<\varphi_{m+1}(t),\ 0<t\leq T\}$ на $m+1$ компонент зв"язності G_j.

В (I) λ_i і F_i – задані функції відповідно в $\bar{G}$ і $\bar{G}\times R^n$, $u=(u_1(x,t),\ldots,\ u_n(x,t))$. Припускаємо, що $\lambda_i(x,t)\in C(\bar{G})$, $F_i(x,t,u)$ – неперервна по всіх змінних в $\bar{G}\times R^n$, неперервно диференційована по x,u і похідні по u рівномірно обмежені, $\varphi_i(t)\in C^1[0,T]$. Нехай також при всіх $t\geq 0$ і при кожному $\rho=\overline{0,m}$ перші d_ρ штук серед величин $\lambda_i^\rho(\varphi_\rho(t),t)-\varphi_\rho'(t)$ – додатні, решта – від"ємні; при $\rho=\overline{1,m+1}$ вважаються виконаними аналогічні припущення відносно величин $\lambda_i^{\rho-1}(\varphi_\rho(t),t)-\varphi_\rho'(t)$.

Введемо позначення $N=(m+1)n,\ d=\max\limits_\rho d_\rho,\ 0<d<n$.

Не обмежуючи загальності, вважаємо, що $\lambda_d(\varphi_{m+1}(t),t)\equiv 1$, $\lambda_{d+1}(\varphi_0(t),t)\equiv -1$. Цього завжди можна досягти відповідною заміною змінних [4].

Ставиться задача в області G_j, треба знайти розв"язки $u_1^j(x,t),\ldots,\ u_n^j(x,t),\ j=\overline{0,m}$ системи (I) і функції $\varphi_0(t),\ldots,\varphi_{m+1}(t)$, $m\geq 0$ на інтервалі $]0,T]$ так, щоб задовольнялись умови

$$\sum_{j=0}^{m} \sum_{i=1}^{n} [\sum_{K=j}^{j+1} \alpha_{ij}^{Kr} (t, \varphi(t)) u_i^j (\varphi_K(t), t) +$$

$$+ \int_{\varphi_j(t)}^{\varphi_{j+1}(t)} \beta_{ij}^r (y,t) u_i^j (y,t) dy] = h^r(t, \varphi(t)),$$

$$0 \le t \le T, \quad r = \overline{1,N}, \tag{2}$$

$$\varphi_i'(t) = g_i (t, \varphi(t), u(\varphi(t), t)), \; i = \overline{0,m+1}, \quad m \ge 0, \tag{3}$$

$$0 \le t \le T,$$

$$|\varphi'(t)| < 1, \quad t \in [0,T], \tag{4}$$

де $\varphi(t) = (\varphi_0(t), \ldots, \varphi_{m+1}(t)), u(x,t) = (u_1^j(x,t), \ldots, u_n^j(x,t))$.
Ця задача є деяким варіантом многофазної двосторонньої задачі типу Стефана для системи (I) у випадку виродження лінії задавання початкових умов. Такого типу задачі для гіперболічних рівнянь вивчались у працях [I – 8] .

Припускаємо, що виконані такі умови: $\alpha_{ij}^{Kr} (t, \varphi(t))$, $h^r(t,\varphi(t)) \in C([0,T] \times R^{m+1})$, $\beta_{ij}^r (y,t) \in C(\bar{G})$.

Функції g_i , визначені та неперервні по всіх аргументах в $G_T = [0,T] \times [-T,T] \times [-1,1] \times R^{m(1+n)+1}$ мають неперервні обмежені похідні по $\varphi(t)$ і $u(x,t)$ і, крім того,

$$\sup_{G_T} |g_i (t,y,z)| < 1, \; i = \overline{0,m+1}. \tag{5}$$

Введемо матриці

$$\alpha_j^1 (t, \varphi(t)) = \|\alpha_{ij}^{jr} (t, \varphi(t))\|, \; i = \overline{1,d}, \quad r = \overline{1,N},$$

$$\alpha_j^2(t,\varphi(t)) = \|\alpha_{ij}^{j+1,r}(t,\psi(t))\|, \quad i=\overline{d+1,n}, \quad r=\overline{1,N}$$

$$A(t,\varphi(t)) = \|\alpha_0^1(t,\varphi(t)) \ldots \alpha_m^1(t,\varphi(t))\alpha_0^2(t,\varphi(t)) \ldots \alpha_m^2(t,\varphi(t))\|,$$

$$B(t,\varphi(t)) = (-1)\|\alpha_0^2(t,\varphi(t)) \ldots \alpha_m^2(t,\varphi(t))\alpha_0^1(t,\varphi(t)) \ldots \alpha_m^1(t,\varphi(t))\|.$$

Припускаємо, що

$$\det A(0,0) \neq 0, \tag{6}$$

$$|A^{-1}(0,0)B(0,0)| < 1 \tag{7}$$

(через $|\cdot|$ позначена одна із евклідових норм матриці).

<u>Теорема</u>. При виконанні всіх вказаних вище припущеннях існує таке $\bar{t} \in]0,T]$, яке не залежить від шуканого розв"язку, що задача (I)–(4) має єдиний узагальнений розв"язок класу

$u_i^j(x,t) \in C[G(\bar{t})], \ \varphi_i(t) \in C^1[0,\bar{t}]$.

Доведення теореми проводиться за наступною схемою. Нехай $D_\varphi^1([0,T])$ – клас довільно фіксованих допустимих функцій $\varphi(t) = (\varphi_0(t), \ldots, \varphi_{m+1}(t))$, тобто функцій, які мають на $[0,T]$ неперервні перші похідні, задовольняють умови $\varphi_i(0)=0, \ \varphi_i(t) < \varphi_{i+1}(t)$ для всіх $t \in]0,T]$ і зв"язані з $\lambda_i^s(x,t)$ названим вище способом. Тоді в UG_j маємо задачу, яку можна розв"язати методом з праці [3] при $N=g$.

Цей розв"язок є деяким інтегрофункціональним оператором, визначеним на множині допустимих функцій $D_\varphi^1([0,T])$:

$$u_i^j(x,t) = U_i^j(x,t,\varphi_0(t),\ldots,\varphi_{m+1}(t)),$$
$$j=\overline{0,m},\ i=\overline{1,n},\ \varphi\in D_\varphi^1([0,T]). \tag{8}$$

Для цього розв"язку справедлива оцінка [I]

$$|u_i^j(\varphi(t)t)| \leq Ce^{\alpha t},\ i=\overline{1,n},\ j=\overline{0,m},\ \varphi(t)\in D_\varphi^1([0,T]), \tag{9}$$

де C і α – додатні константи, які не залежать від $u_i^j(x,t)$, $\varphi(t)$.

Умови (3) з врахуванням оцінок (9) дають змогу знайти значення $t=t_0$, при якому виконуються умови (4) з $T=t_0$.

Підставляючи (8) у (3) та інтегруючи по t від 0 до t, одержуємо для визначення $\varphi_0(t),\ldots,\varphi_{m+1}(t)$ систему інтегрофункціональних рівнянь Вольтерра

$$\varphi_i(t) = \int_0^t g_i(\tau,\varphi(\tau),U_i^j(\varphi(\tau),\tau,\varphi(\tau)))d\tau, \tag{10}$$
$$i=\overline{0,m+1},\ j=\overline{0,m},\ m\geq 0.$$

Розв"язок системи (10) шукають методом ітерацій для значень t, не більших деякого $t_1>0$. На цьому доведення теореми закінчується, і $\bar{t} = \min(t_0,t_1)$. У випадку лінійності функцій $\varphi_i(t)$ і якщо $\det A(t,\varphi(t))\neq 0$, то теорема має глобальний характер.

Список літератури: I. Мельник З.О. Задача с неизвестными границами для гиперболической системы первого порядка. – В кн.: Уравнения в частных производных и задачи со свободной границей. К.: Наук. думка, 1983, с. 77–79. 2. Мельник З.О. Смешанная задача с неизвестной границей для общего двумерного гиперболического уравнения второго порядка. – Докл. АН УССР. Сер. А, 1983, № 8, с. 13–15. 3. Мельник З.О., Кирилич В.М. Задача без начальных условий с интегральными ограничениями для гиперболических уравнений и систем на прямой. – Укр. мат. журн., 1983, т. 35, № 6, с. 771-776. 4. М е л ь н и к Т.Е. Задача типа Стефана для гиперболической системы первого порядка. - Укр. мат. журн., 1982, т. 34, № 3, с. 380-384. 5. М е л ь н и к Т.Е. Двухфазная задача типа Стефана для общего двухмерного гиперболического уравнения второго порядка. - В кн.: Уравнения в частных производных и задачи со свободной границей. К.: Наук. думка, 1983, с. 79-82. 6. М е л ь н и к Т.Е. Сопряжение решений гиперболического уравнения второго порядка вдоль неизвестной границы. - Докл. АН УССР. Сер. А, 1980, № 12, с. 10-12. 7. Rubinstein L. Application of the integral equations to the solutions of several Stefan problems.- Free Boundary Probl. Proc. Semin. Pavia, 1979, N1, p. 383-450. 8. Lee Da-tsin, Yu Wen-tsu. Boundary value problems for the first order quasi-linear hyperbolic systems and their applications.- J. Differ. Equat., 1981, vol. 41, N1, p. 1-26.

Стаття надійшла до редколегії 20.02.84

УДК 517.946

І.Б.Киричинська, В.М.Кирилич

НЕЛОКАЛЬНА ЗАДАЧА ДЛЯ НАВАНТАЖЕНОЇ ГІПЕРБОЛІЧНОЇ СИСТЕМИ РІВНЯНЬ ПЕРШОГО ПОРЯДКУ НА ПРЯМІЙ

Розглянемо змішану задачу для навантаженої гіперболічної системи рівнянь першого порядку з нелокальними граничними умовами. У праці [5] показано, що задачі з нелокальними (інтегральними) умовами певною невиродженою заміною можна звести до навантажених рівнянь. Нелокальні задачі для рівнянь гіперболічного типу вивчені у працях [2 – 5] .

Нехай в області $G=\{(x,t),\ 0<x<l,\ 0<t\le T,\ T>0\}$ розглядається навантажена гіперболічна система першого порядку

$$\left(D_t+\lambda_i(x,t)D_x\right)u_i=\int_0^l\sum_{j=1}^n a_{ij}(x,t,\xi)u_j(\xi,t)d\xi+f_i(x,t,u),\quad i=\overline{1,n},\qquad (1)$$

де $\lambda_i,\ a_{ij}:\ \bar G\to\bar R,\ f:\ \bar G\times R^n\to R$ – задані неперервні функції; f_i – лінійна відносно $u=(u_1(x,t),\dots,u_n(x,t))$; функції $\lambda_i\ (x,t)$ перенумеровані таким чином, що

$$\lambda_1(x,t)\le\dots\le\lambda_k(x,t)<0<\lambda_{k+1}(x,t)\le\dots\le\lambda_n(x,t).$$

В області G треба знайти функції $u_1(x,t),\dots,u_n(x,t)$, які задовольняють початкові

$$u_i(x,0)=g_i(x),\quad 0\le x\le l,\quad i=\overline{1,n}\qquad (2)$$

і граничні умови

$$\sum_{p=1}^{2}\sum_{j=1}^{n}\alpha_{ij}^{p-1}(t)u_j(p-1,t)=h_i(t),\ 0\le t\le T,\quad i=\overline{1,n},\qquad (3)$$

де $g_i:[0,l]\to R,\ \alpha_{ij}^{p-1},\ h_i:[0,T]\to R$ – задані неперервно диференційовані функції.

Припускаємо додатково, що виконується умова

$$\begin{vmatrix} \alpha^{0}_{11}(t)\ldots\alpha^{0}_{1k}(t)\alpha^{1}_{1,k+1}(t)\ldots\alpha^{1}_{1n}(t) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \alpha^{0}_{n1}(t)\ldots\alpha^{0}_{nk}(t)\alpha^{1}_{n,k+1}(t)\ldots\alpha^{1}_{nn}(t) \end{vmatrix} \neq 0 \qquad (4)$$

для всіх $t \in [0,T]$ і умови узгодження системи (I), початкових умов (2) і умов (3):

$$\sum_{\rho=1}^{2}\sum_{j=1}^{n}\alpha^{\rho-1}_{ij}(0)\,g_j(\rho-1) = h_i(0),\quad i=\overline{1,n}, \qquad (5)$$

$$\sum_{\rho=1}^{2}\sum_{j=1}^{n}\alpha^{\rho-1}_{ij}(0)\,g_j(\rho-1) +$$

$$+\sum_{\rho=1}^{2}\sum_{j=1}^{n}\alpha^{\rho-1}_{ij}(0)\Big[\lambda_j(\rho-1,0)\,g'_j(\rho-1) + \qquad (6)$$

$$+\int_0^t\sum_{m=1}^{n}a_{jm}(\rho-1,0,\xi)\,g_m(\xi)\,d\xi + f_i(\rho-1,0,g(\rho-1))\Big] = h'_i(0),$$

$$(i=\overline{1,n}).$$

Умова (4) – це аналог умови Лопатинського для випадку класичних граничних задач.

Мають місце такі теореми.

<u>Теорема I</u>. Нехай I) функції $\lambda_i(x,t),\ a_{ij}(x,t,\xi) \in C(\bar{G})$, $f_i(x,t,u) \in C(\bar{G}\times \mathbb{R}^n)$; 2) функції $g_i(x) \in C[0,\ell]$, $\alpha^{\rho-1}_{ij}(t),\ h_i(t) \in C[0,T]$; 3) виконуються умови (4) і умова (5).

Тоді задача (I)–(3) має в $\bar{G}$ єдиний узагальнений неперервний розв"язок у значенні [2, 3] .

Теорема 2. Нехай виконані умови теореми I і, крім того:

I) функції $\lambda_i(x,t) \in C^1(G), a'_{ijx} \in C(\bar{G}), f'_{ix} \in (\bar{G} \times \mathbb{R}^n)$;

2) функції $h_i(t), \alpha_{ij}^{p-1}(t) \in C^1[0,T], g_i(x) \in C^1[0,l]$;

3) виконуються умови узгодженості (6).

Тоді задача (I)-(3) має в $\bar{G}$ единий класичний розв"язок.

Доведення теорем I, 2 проводиться за допомогою комбінації методу характеристик [I] і методики з праць [2 - 5], що дає змогу звести задачу (I)-(3) до системи лінійних інтегральних рівнянь типу Вольтерра другого роду, яка розв"язується послідовними наближеннями.

Зауваження. Якщо в (I) функції $f_i(x, t, u)$ – нелінійні відносно u, то для такого випадку при умовах

I) $|f_i(x,t,u)| < \alpha(t)|u|$, $\alpha(t)$ – не обов"язково обмежена функція;

2) $\forall T>0,\ \forall U>0,\ x \in [0,1],\ t \in [0,T],\ |u^1|, |u^2| \in U, \exists L:$

$$|f_i(x,t,u^1) - f_i(x,t,u^2)| \le L\,|u^1 - u^2|$$

наявні локальні теореми коректної розв"язності, аналогічні теоремам I, 2.

Список літератури: I. А б о л и н я В.Э., М ы ш к и с А.Д. О смешанной задаче для линейной гиперболической системы на плоскости. – Уч. зап. Латв. ун-та, 1958, 20, вып. 3, с. 87-104. 2. К и р и л и ч В.М. Задача с неразделенными граничными условиями для гиперболической системы первого порядка на прямой. – Вестн. Львов. ун-та. Сер. мех.-мат., 1984, вып. 22, с. 90-94. 3. М е л ь н и к З.О., К и р и л и ч В.М. Задача без начальных условий с интегральными ограничениями для гиперболических уравнений и систем на прямой. – Укр. мат. журн., 1983, т. 35, № 6, с. 771-776. 4. М е л ь н и к З.О. Задача с интегральными ограничениями для гиперболического уравнения второго порядка. – В кн.: Общая теория граничных задач. К.: Наук. думка, 1983, с. 281-282. 5. Н а х у ш е в А.М. Нагруженные уравнения и их приложения. – Дифференциальные уравнения, 1983, т. 19, № I, с. 86-94.

Стаття надійшла до редколегії 20.02.84

УДК 517.5

М.М.Шеремета

АНАЛОГИ ТЕОРЕМИ БОРЕЛЯ ДЛЯ АНАЛІТИЧНИХ ФУНКЦІЙ

Якщо ціла функція має скінченний порядок, то за класичною теоремою Бореля логарифми її максимуму модуля і максимального члена еквівалентні. Вкажемо аналоги цієї теореми для функцій, які аналітичні в областях, відмінних від $\mathbb{C}$.

Нехай F – аналітична у півплощині $\{s: \operatorname{Re} s<0\}$ функція, задана абсолютно збіжним у цій півплощині рядом $F(s)= \sum_{n=0}^{\infty} a_n \exp\{s\lambda_n\}$, $0=\lambda_0<\lambda_1<\lambda_n\uparrow\infty\ (n\to\infty)$. Приймемо $M(\sigma,F)=\sup\{|F(\sigma+it)|: t\in R\}$ і $\mu(\sigma,F)=\max\{|a_n|\exp(\sigma\lambda_n): n\geq 0\}$, $\sigma<0$. Через $n(t)$ позначимо лічильну функцію послідовності (λ_n) .

Теорема I. Нехай Φ – додатна неперервна зростаюча до ∞ на $[0,\infty)$ функція, φ – функція, обернена до Φ , а L – додатна неперервна зростаюча до ∞ на $[0,\infty)$ функція така, що $\lim\limits_{x\to\infty} L(\lambda x)/L(x)=C(\lambda)<\infty$ для кожного $\lambda\in(0,\infty)$. Тоді, коли

$$\varlimsup_{\sigma\to 0}\frac{\ln M(\sigma,F)}{|\sigma|\Phi(1/|\sigma|)}=A<\infty,\quad \lim_{\sigma\to 0}\frac{\ln M(\sigma,F)}{|\sigma|L(1/|\sigma|)}=\infty,$$

$$\varlimsup_{t\to\infty}\frac{\varphi(t)\ln n(t)}{L(\varphi(t))}=\gamma<\infty,$$

то $\ln M(\sigma,F)\sim\ln\mu(\sigma,F)$ при $\sigma\to 0$

Наслідок I. Якщо $\ln\ln M(\sigma,F)=O(\ln(1/|\sigma|))$ і $\ln(1/|\sigma|)=O(\ln M(\sigma,F))$ при $\sigma\to 0$, а $\ln n(t)=O(\ln t)$ при $t\to\infty$, то $\ln M(\sigma,F)\sim \ln\mu(\sigma,F)$ при $\sigma\to 0$.

Нехай $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ – аналітична в крузі $\{z: |z|<1\}$ функція, $M(r,f)=\max\{|f(z)|: |z|=r\}$, $\mu(r,f)=\max\{|a_n|r^n: n\geq 0\}$, $r<1$. Порядком ϱ і нижнім логарифмічним порядком λ функції f називаються величини

$$\rho = \overline{\lim_{r\to 1}} \frac{\ln^+ \ln M(r,f)}{-\ln(1-r)}, \quad \lambda = \underline{\lim_{r\to 1}} \frac{\ln^+ M(r,f)}{-\ln(1-r)}.$$

З наслідку I неважко одержати таку теорему.

Теорема 2*. Якщо $\rho < \infty$ і $\lambda = \infty$, то $\ln M(r,f) \sim \ln\mu(r,f)$ $(r \to 1)$.

Умова $\lambda = \infty$ в теоремі 2 істотна, на що вказує наступний приклад. Нехай $\omega(x) = \frac{1}{2}\{1 + \ln_3 x + (1 - \ln_3 x)\sin(\ln_3 x)\}$ при $x \geq \exp_3 1$ і $\omega(x) = 1$ при $0 \leq x \leq \exp_3 1$, а $f_0(z) = \sum_{n=0}^{\infty} n^{\omega(n)} z^n$. Можна показати, що f_0 має порядок $\rho = 0$, нижній логарифмічний порядок $\lambda = 2$ і, незважаючи на те, що $\overline{\lim_{r\to 1}} \frac{\ln^+ M(r,f_0)}{\ln\mu(r,f_0)} \geq \infty$, для функції f_0 має місце нерівність $\underline{\lim_{r\to 1}} \frac{\ln M(r,f_0)}{-\ln(1-r)} = \infty$, тобто співвідношення $\ln M(r,f_0) \sim \ln\mu(r,f_0)$ не виконується навіть на будь-якій послідовності (r_k), яка прямує до I.

Стаття надійшла до редколегії 02.01.84

---

* Shankar H. The maximum term and maximum modulus of an analytic function. - Glas. mat., 1978, vol.13, №2, p.271-275.

УДК 517.53

М.В.Заболоцький

ПРО РЕГУЛЯРНІСТЬ РОСТУ НЕВАНЛІННІВСЬКИХ ХАРАКТЕРИСТИК СУБГАРМОНІЧНИХ ФУНКЦІЙ

А.Бернштейн [5] і А.А.Гольдберг [1] незалежно один від одного довели таку теорему.

<u>Теорема</u>. Нехай f – ціла функція порядку $\rho \le 0{,}5$, $\rho(r)$ – її уточнений порядок, $V(r) = r^{\rho(r)}$. Тоді границі $\lim\limits_{r\to\infty} N(r,f^{-1})/V(r)$ та $\lim\limits_{r\to\infty} T(r,f)/V(r)$ існують чи не існують одночасно, а при існуванні рівні.

Добре видно, що теорема справедлива для субгармонічних в $\mathbb{R}^2$ функцій порядку $\rho \le 0{,}5$. У праці [3] доведено справедливість теореми для субгармонічних в $\mathbb{R}^m$, $m \ge 2$ функцій нульового уточненого порядку. Для субгармонічних в $\mathbb{R}^m$, $m \ge 3$ функцій додатного порядку теорема неправильна.

Побудуємо функцію порядку $0<\rho<1$, субгармонічну в $\mathbb{R}^4$, для якої сформульований вище результат неправильний. Те, що ми обмежуємося випадком $m=4$, пояснюється чисто технічними міркуваннями.

Нехай $0<\rho<1$, $|x|=r$, $\rho_1(r)$ та $\rho(r)$ – уточнені порядки такі, що $V_1(r) = r^{\rho_1(r)} = r^{\rho}(2-\cos^2 \ln\ln^2 r)$, $V_2(r) = r^{\rho_2(r)} = r^{\rho}(1-\sin^2 \ln\ln r + 1/\ln\ln r)$, $r>1$.

Маємо $V_1(r)+V_2(r) \sim 2r^{\rho}$, $V_1(r_n) = 2r_n^{\rho}$, $V_1(s_n) \sim s_n^{\rho}$, $V_1(s_n) \sim V_2(s_n)$, $n\to\infty$, де $r_n = \exp\exp(\pi/2+n\pi)$, $s_n = \exp\exp(\pi n)$.

Нехай $u(x) = u_1(x)+u_2(x)$, $x_1 = r\cos\theta$, де u_1, u_2 – субгармонічні в $\mathbb{R}^4$ функції, гармонічні всюди за винятком відповідно від"ємної та додатної півосей OX_1, $u_i(0)=0$, $i=1,2$, $N(r,u_1) = V_1(r)$, $N(r,u_2) = V_2(r)$, $r \ge r_0$.

Отже, $N(r,u) \sim 2r^{\rho}$, $r\to\infty$.

Позначимо $k_1 = \pi\rho(\rho+2)/(2\sin\pi\rho)$, $k_2 = 4k_1(\rho+1)\times$ $\times\,(\pi\rho(\rho+2))^{-1}$. Враховуючи міркування з [2, 3], одержуємо $(0<\theta<\pi)$

$$u(x)=k_1\left(\frac{\sin(\rho+1)\theta}{\sin\theta}V_1(r)+\frac{\sin(\rho+1)(\pi-\theta)}{\sin(\pi-\theta)}V_2(r)\right)+o(r^\rho),\ r\to\infty.$$

Обчислимо $T(r_n, u)$ і $T(s_n, u)$. Маємо ([4], лема 4.7)$(n\to\infty)$

$$T(r_n,u)=4k_1\pi^{-1}2r_n^\rho\int_0^{\pi/(\rho+1)}\sin(\rho+1)\theta\sin\theta\,d\theta+$$

$$+\,o(r_n^\rho)=4k_2\sin\frac{\pi}{2(\rho+1)}\cos\frac{\pi}{2(\rho+1)}\,r_n^\rho(1+o(1)),$$

$$T(s_n,u)=4k_1\pi^{-1}s_n^\rho\,4\cos(\pi\rho/2)\int_{\frac{\pi\rho}{2(\rho+1)}}^{\frac{\pi}{2}}\cos(\rho+1)\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)\times$$

$$\times\,\sin\theta\,d\theta+o(s_n^\rho)=4k_2\sin\frac{\pi(1-\rho)}{2}\cos\frac{\pi}{2(\rho+1)}(1+o(1))s_n^\rho.$$

Таким чином, $\lim\limits_{r\to\infty}T(r,u)\,/\,r^\rho$ не існує.

Зауваження. Добре видно, що $\max\{u(x):|x|=r_n\}=$ $=(1+o(1))r_n^\rho(2k_1(\rho+1))$, $\max\{u(x):|x|=s_n\}=(1+o(1))s_n^\rho\left(2k_1\sin\frac{\pi(\rho+1)}{2}\right)$.

Отже, не існує границі $\lim\limits_{r\to\infty}(\max\limits_{|x|=r}u(x))/r^\rho$.

Список літератури: I. Гольдберг А.А. О целых функциях без конечных валироновских дефектных значений. - Теория функций, функциональный анализ и их приложение, 1972, вып. 15, с. 244-255. 2. Гольдберг А.А., Островский И.В. Распределение значений мероморфных функций. - М.: Наука, 1970. - 592 с. 3. Заболоцкий Н.В. Некоторые соотношения для неванлинновских характеристик δ-субгармонических функций порядка <1. - Теория функций, функциональный анализ и их приложение, 1983, вып. 39, с. 49-56. 4. Хейман У., Кеннеди П. Субгармонические функции. - М.: Мир, 1980. - 304 с. 5. Baernstein A. A nonlinear tauberian theorem in function theory. - Trans. Amer. Math

Soc., 1969, vol. 146, p. 87-104.

Стаття надійшла до редколегії 14.06.83

УДК 517.53

О.Б.Скасків

ПРО РІСТ ЦІЛИХ РЯДІВ ДІРІХЛЕ

НУЛЬОВОГО ПОРЯДКУ ЗА РІТТОМ

Нехай F – ціла функція, задана абсолютно збіжним в усій площині рядом Діріхле

$$F(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{z\lambda_n}, \quad 0\le\lambda_0<\lambda_1<\ldots<\lambda_n\uparrow+\infty\ (n\to+\infty), \tag{1}$$

$M(x)=\sup\{|F(x+iy)|:|y|<\infty\}$, $\mu(x)$, $\nu(x)$ – відповідно максимальний член і центральний індекс ряду (1).

У праці [1] показано, що умова

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda_{n+1}-\lambda_n}<+\infty \tag{2}$$

є необхідною і достатньою в класі всіх цілих функцій (1) для виконання при $x\to+\infty$ зовні множини скінченної міри співвідношення

$$F(x+iy)=(1+o(1))\,a_{\nu(x)}e^{(x+iy)\lambda_{\nu(x)}}. \tag{3}$$

Уточнимо умову (2) для класу цілих функцій (1), які задовольняють умову

$$\ln M(x)\le Ax^{\rho}, \quad 1<\rho<+\infty, \tag{4}$$

при всіх досить великих x.

Надалі через C_0 позначатимемо довільну вимірну множину з $[0,+\infty[$, для якої $\int\limits_{C_0\cap[0,x]} dx = o(x)$ при $x\to+\infty$.

Теорема I. Нехай для функції (I) виконується (4). Якщо

$$\lambda_n^{-\frac{1}{p-1}} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{\lambda_{k+1}-\lambda_k} = o(1) \quad (n\to+\infty), \tag{5}$$

то (3) виконується при $x\to+\infty$ зовні деякої множини C_0 .
З іншого боку, для кожної (λ_n) такої, що

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{\lambda_{k+1}-\lambda_k} \geq b\lambda_n^{\frac{1}{p-1}} \ (n\geq 0),\ b>0 \tag{6}$$

існує ціла функція (I), для якої виконується (4), а співвідношення (3) не виконується при $y=0$ і для всіх x з деякої множини E такої, що $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{-1}\int\limits_{E\cap[0,x]} dx = q>0$.

Наведена теорема підсилює відповідні результати для класів функцій (I) з умовою на ріст (4) із праць [I – 3] .

Доведення першого твердження теореми I аналогічне доведенню відповідного твердження з праці [I] і базується на такій лемі.

Лема. Нехай (ε_k) – послідовність невід"ємних чисел [I]. Рівності

$$\nu(x\pm\varepsilon_{\nu(x)}) = \nu(x) \tag{7}$$

на проміжку $[0,R]$ виконуються всюди, крім, можливо, множини, міра якої не перевищує числа $C(F)+2\cdot\sum_{k=0}^{\nu(R-0)}\varepsilon_k$, де $C(F)$ – постійна, залежна тільки від F , а $\nu(x)$ – центральний індекс ряду (I).

Згідно з працею [I] приймемо $\delta_\nu = \max\{(j-l+1)^{-\frac{3}{2}} \sum_{m=l}^{j} (\lambda_{m+1}-\lambda_m)^{-1}:$ $l\leq\nu-1\leq j\leq k_0(\nu)-1\}$, де для кожного $\nu\in\mathbb{N}$ $k_0(\nu)$ таке, що $\lambda_{k_0(\nu)}\leq 5\lambda_\nu<\lambda_{k_0(\nu)+1}$. Зрозуміло, що із (5) випливає співвідношення
$\sum_{k\leq n}\delta_k = o(\lambda_n^{\frac{1}{p-1}})\ (n\to+\infty)$.

Тому існує $C_k \uparrow +\infty \ (k \to +\infty)$ така, що

$$\sum_{k=1}^{n} C_k \delta_k = o\left(\lambda_n^{\frac{1}{p-1}}\right) \ (n \to +\infty). \tag{8}$$

Із (4), застосовуючи нерівність Коші та приймаючи $x = \left(\frac{\lambda n}{pA}\right)^{\frac{1}{p-1}}$, для всіх досить великих n одержуємо

$$\ln|a_n| \leq -\lambda_n x + A x^p = -A_p \lambda_n^{\frac{p}{p-1}}, \ A_p = (pA)^{-\frac{1}{p-1}} \left(1 - \frac{1}{p}\right).$$

З іншого боку, $0 \leq \ln \mu(x) = \ln|a_\nu| + \lambda_\nu x$, тому

$$x \geq -\frac{\ln|a_\nu|}{\lambda_\nu} \geq A_p \lambda_\nu^{\frac{1}{1-p}}. \tag{9}$$

Приймемо тепер $\varepsilon_k = C_k \delta_k$. Застосовуючи лему, одержуємо, що рівності (7) виконуються на $[0, +\infty[$ всюди, крім деякої множини E, для якої з (8) і (9) випливає

$$0 \leq \varlimsup_{x \to +\infty} x^{-1} \int_{E \cap [0,x]} dx \leq \lim_{\nu \to +\infty} \left(A_p \lambda_\nu^{\frac{1}{p-1}}\right)^{-1} \sum_{k=1}^{\nu} C_k \delta_k = 0,$$

тобто рівності (7) на $[0, +\infty[$ виконуються зовні деякої множини C_0. Подальше доведення першого твердження теореми І збігається з доведенням у праці [І]. Для доведення другого твердження теореми І досить розглянути при виконанні умови (6) цілу функцію (І) з коефіцієнтами

$$a_n = \exp\left\{-\beta \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\lambda_n - \lambda_k}{\lambda_{k+1} - \lambda_k}\right\} \ (n \geq 1), \ a_0 = 1,$$

де $\beta = \beta(p, A, B) > 0$ — потрібно вибрати досить великим.

Друге твердження теореми І вказує на те, що в умові (5) не можна, взагалі кажучи, замінити $o(1)$ на $O(1)$. Справедлива така теорема.

<u>Теорема 2</u>. Нехай для функції (І) виконується

$$\ln M(x) \leq O(x^p) \quad (x \to +\infty).$$

Якщо

$$\lambda_n^{-\frac{1}{p-1}} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{\lambda_{k+1}-\lambda_k} = O(1) \quad (n\to+\infty),$$

то співвідношення (3) виконується при $x\to+\infty$ зовні деякої множини C_0 .

На закінчення відзначимо, що в класі цілих функцій (I), які задовольняють (4), необхідною і достатньою для виконання співвідношення (3) при $x\to+\infty$ зовні деякої множини E такої, що $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{-1}\int\limits_{E\cap[0,x]} dx = 0$, є умова

$$\lim_{n\to+\infty} \lambda_n^{-\frac{1}{p-1}} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{\lambda_{k+1}-\lambda_k} = 0.$$

Список літератури: I. С к а с к и в О.Б. Максимум модуля и максимальный член целого ряда Дирихле. - К., 1983. - 23 с. - Рукопись деп. в УкрНИИНТИ, № 464,УК - Д83. 2. Ш е р е м е т а М.Н. Метод Вимана-Валирона для целых функций, заданных рядами Дирихле. - Докл. АН СССР, 1978, т. 240, № 5, с. 1036-1039. 3. Ш е р е м е т а М.М. Асимптотичні властивості цілих функцій повільного росту, заданих рядами Діріхле. - Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат., 1981, вип. 18, с. 74-75.

Стаття надійшла до редколегії 19.03.84

УДК 517.535.4

В.М.Сороківський

ПРО ПОВЕДІНКУ В ПІВСМУЗІ АНАЛІТИЧНИХ ФУНКЦІЙ, ЗАДАНИХ РЯДАМИ ДІРІХЛЕ

Нехай $\Lambda=(\lambda_n)$ – зростаюча послідовність додатних чисел таких, що $\sum_1^{\infty}(1/\lambda_n)<\infty$, а $S(\Lambda)$ – клас аналітичних у півплощині $\{z: Re z<0\}$ функцій f, заданих рядами Діріхле виду

$$f(z)=\sum_1^{\infty} a_n e^{z\lambda_n},$$

абсциса абсолютної збіжності яких дорівнює 0. Для $f\in S(\Lambda)$ приймемо

$$M_f(x)=\sup\{|f(x+iy)|: y\in R\},\ M_f(x,h)=\sup\{|f(x+iy)|: x\leq\sigma, |y|\leq h\},$$
$$h>0,\ x<0,$$

$$\rho=\overline{\lim_{x\to 0}}|x|\ln^+\ln M_f(x),\ \rho_h=\overline{\lim_{x\to 0}}|x|\ln^+\ln M_f(x,h),\ \rho_0=\overline{\lim_{x\to 0}}|x|\ln^+\ln|f(x)|.$$

А.М.Гайсин [1] вказав достатні умови на Λ, при виконанні яких для функцій $f\in S(\Lambda)$ виконується рівність $\rho=\rho_h$. У праці [3] вказані умови, при яких $\rho=\rho_0$. Доведено таке твердження: якщо $f\in S(\Lambda)$

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{\ln\lambda_n}{\lambda_n}\ln\frac{1}{|H'(\lambda_n)|}=0,\ H(z)=\prod_{n=1}^{\infty}(\lambda_k-z)/(\lambda_k+z), \qquad (1)$$

то $\rho_0=\rho$, причому умова (1) для виконання цієї рівності суттєва. Зрозуміло, що коли (1) виконується, то $\rho_h=\rho_0$. Виникає питання про можливість виконання цієї рівності у випадку невиконання (1).

Доведемо наступне твердження.

Теорема I. Нехай $f \in S(\Lambda)$ і виконується умова

$$\frac{n}{\lambda_n}\ln^2\lambda_n \to 0\,(n \to \infty), \tag{2}$$

тоді для будь-якого $h>0$ виконується $\rho_0 = \rho_h$.

Умова (2) не накладає ніяких обмежень на близькість двох сусідніх показників. Тому з (2) не випливає (I). Можливо, що $\rho_0 = \rho_h$ для будь-якої функції $f \in S(\Lambda)$, але застосовувана методика не дає змоги позбутися умови (2).

Нехай

$$h(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{x-i\infty}^{x+i\infty}\frac{H(z)}{(1+z)^2}e^{-tz}dz,\ \sigma_0 = \min\left\{\frac{1}{2},\frac{\lambda_1}{2}\right\}.$$

Доведено [3], що $h(t)=0$ при $t>0$ і $|h(t)| \le K e^{\sigma_0 t}, t \le 0$.

Приймемо [2]

$$\omega_B(\mu,\alpha,f) = e^{-\alpha\mu}\int_{-\infty}^{0}h(t)\left(\int_0^t f(t+\alpha-\eta)e^{\mu\eta}d\eta\right)dt,\ \alpha<0.$$

Для доведення теореми I потрібні такі леми.

Лема I. Нехай $f \in S(\Lambda)$. Тоді

$$a_k = \omega_B(\lambda_k,\alpha,f)/B'(\lambda_k),\ k=1,2,\dots\ B(z)=\frac{H(z)}{(1+z)^2}.$$

Лема 2. Нехай $f \in S(\Lambda)$ і $0<\varphi_0<\frac{\pi}{2}$. Тоді для будь-якого $\alpha<0$ і для всіх z з кута

$$\frac{\pi}{2}+\varphi_0 < \arg(z-\alpha) < \frac{3\pi}{2}-\varphi_0 \tag{3}$$

наявне зображення

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{\omega_B(\mu,\alpha,f)}{B(\mu)}e^{\mu z}d\mu, \tag{4}$$

де Γ – границя кута $|\arg\mu|<\varphi_0\,(\infty e^{i\varphi_0}, 0, \infty e^{-i\varphi_0})$.

Лема 3. Якщо виконується умова (2), то

$$-\ln|H(re^{i\varphi})| \le \varepsilon(r)\left(\frac{r}{\ln r}+\frac{r}{\ln^2 r|\sin\varphi|}\right),\ 0\le|\varphi|<\frac{\pi}{2}, \tag{5}$$

де $\varepsilon(r)\to 0$ при $r\to\infty$.

Доведемо теорему I. Якщо $\rho_0 = \infty$, то рівність $\rho_0 = \rho_h$ очевидна. Нехай $\rho_0 < \infty$. Тоді для всіх $t \in]-\infty, 0[$ маємо

$$|f(t)| \leq \mathcal{K}_2 \exp(\exp(\rho_1/|t|)), \ \rho_1 = \rho_0 + \delta, \ \delta > 0. \tag{6}$$

Нехай $\sigma < 0, \ h > 0, \ 0 < \varepsilon < 1$ – фіксовані числа, а $\alpha = (1-\varepsilon)\sigma$, $z = x + iy$. Оцінимо $|f(z)|$ у півсмузі $S_{\sigma,h} = \{z : Re z \leq \sigma, |Im z| \leq h\}$. Приймемо $\varphi_0 = arctg \frac{|\sigma - \alpha|}{2h}$. Тоді при $z \in S_{\sigma,h}$, $\arg \mu = \varphi_0$ маємо

$$Re((z-\alpha)\mu) = Re[(x-\alpha+iy)|\mu|(\cos\varphi_0 - i\sin\varphi_0)] =$$
$$= (x-\alpha)|\mu|\cos\varphi_0 - y|\mu|\sin\varphi_0 \leq -|\sigma-\alpha||\mu|\cos\varphi_0 - y|\mu|\frac{|\sigma-\alpha|}{2h}\cos\varphi_0 =$$
$$= -|\sigma-\alpha||\mu|\left(1+\frac{y}{2h}\right)\cos\varphi_0 \leq$$
$$\leq -\frac{|\sigma-\alpha|}{2}|\mu|\cos\varphi_0 = -\frac{\varepsilon}{2}|\sigma||\mu|\cos\varphi_0 . \tag{7}$$

Добре видно, що (7) справедливе при $\arg \mu = -\varphi_0$. Крім того,

$$|\omega_B(\mu,\alpha,f)| \leq |e^{-\alpha\mu}| \int_{-\infty}^{0} |h(t)| \left(\int_{0}^{t} |f(t+\alpha-\eta)||e^{\mu\eta}||d\eta| \right) |dt| \leq$$
$$\leq |e^{-\alpha\mu}| \max_{(t-\eta)\in(-\infty,0)} |f(t-\alpha-\eta)| \left|\int_{-\infty}^{0} |h(t)||t||dt|\right| \leq \mathcal{K} I(\alpha,f)|e^{-\alpha\mu}| \left|\int_{\infty}^{0} e^{\sigma_0 t}|t||dt|\right| =$$
$$= \mathcal{K}_1 I(\alpha,f)|e^{-\alpha\mu}|, \tag{8}$$

де $\mathcal{K}_1 > 0$ – стала $I(\alpha,f) = \max\{|f(\zeta+\alpha)| : \zeta \leq 0\}$.

Враховуючи (7) і (6), з (8) одержуємо

$$|\omega_B(\mu,\alpha,f)e^{\mu z}| \leq \mathcal{K}_2 I(\alpha,f)|e^{\mu(z-\alpha)}| \leq \mathcal{K}_1\mathcal{K}_2 e^{-\frac{\varepsilon}{2}|\sigma||\mu|\cos\varphi_0} \times$$
$$\times \max\{\exp(e^{\rho_1/|\zeta+\alpha|}) : \zeta \leq 0\} \leq \mathcal{K}_3 e^{-\frac{\varepsilon}{2}|\sigma||\mu|\cos\varphi_0} \exp(e^{\rho_1/|\alpha|}). \tag{9}$$

Нехай $\nu_1(\sigma) = \cos\varphi_0, \ \nu_2(\sigma) = \sqrt{\varepsilon^2|\sigma|^2 + h^2}, \ r = r(\sigma) = \exp(2\varepsilon(1+\sqrt{1+\nu_1(\sigma)\nu_2(\sigma)})/|\sigma|\nu_1(\sigma))$.

Враховуючи лему 3, маємо

$$-\ln|H(re^{\pm i\varphi_0})| \leq \frac{r\varepsilon^2}{\ln r} + \frac{\varepsilon^4 r}{\ln^2 r|\sin\varphi|} = \frac{\varepsilon^2 r}{\ln r} + \frac{\varepsilon^3 r \nu_2(\sigma)}{\ln^2 r|\sigma|}, \ r \geq r_0(\varepsilon). \tag{10}$$

З (4), беручи до уваги (I0) і (9) при $r=|\mu|$ і $z\in S_{a,h}$ одержуємо

$$|f(z)|\le\frac{2K_3}{2\pi}\exp\left(e^{\rho_1/|\sigma|}\right)\int_0^{\infty}\frac{\exp\left(-\frac{\varepsilon}{2}|\sigma|r\cos\varphi_0\right)}{|B(re^{i\varphi_0})|}dr\le$$

$$\le\frac{K_3}{\pi}\exp\left(e^{\rho_1/|\sigma|}\right)\left(\int_0^{r_0(\varepsilon)}+\int_{r_0(\varepsilon)}^{r(\sigma)}+\int_{r(\sigma)}^{\infty}\right)\frac{\exp\left(-\frac{\varepsilon}{2}|\sigma|r\cos\varphi_0\right)}{|B(re^{i\varphi_0})|}dr\le$$

$$\le\frac{K_3}{\pi}\exp\left(e^{\rho_1/|\sigma|}\right)\left\{K_4+\left(\int_{r_0(\varepsilon)}^{r(\sigma)}+\int_{r(\sigma)}^{\infty}\right)\exp\left(-\frac{\varepsilon}{2}|\sigma|r\cos\varphi_0+\frac{\varepsilon^2 r}{\ln r}+\frac{\varepsilon^3 r\nu_2(\sigma)}{\ln^2 r|\sigma|}\right)dr\right\}\le$$

$$\le\frac{K_3}{\pi}\exp\left(e^{\rho_1/|\sigma|}\right)\left\{K_4+\int_{r_0(\varepsilon)}^{r(\sigma)}\exp\left(\frac{\varepsilon^2 r}{\ln r}+\frac{\varepsilon^3 r\nu_2(\sigma)}{|\sigma|\ln^2 r}\right)dr+\int_{r(\sigma)}^{\infty}\exp\left(-\frac{\varepsilon|\sigma|r\nu_1(\sigma)}{4}\right)dr\right\}\le$$

$$\le\frac{K_3}{\pi}\exp\left(e^{\rho_1/|\sigma|}\right)\left\{K_4+r(\sigma)\exp\left(\frac{\varepsilon|\sigma|r\nu_1(\sigma)}{4}\right)+\frac{4}{\varepsilon|\sigma|\nu_1(\sigma)}e^{-r(\sigma)\varepsilon|\sigma|\nu_1(\sigma)}\right\}=$$

$$=\frac{K_3}{\pi}(1+o(1))\exp\left(e^{\rho_1/|\sigma|}\right)\exp\left(\delta\left(\frac{o(1)\varepsilon}{|\sigma|}\right)\right)=\frac{K_3}{\pi}(1+o(1))\exp\left(e^{\rho_1/((1-\varepsilon)|\sigma|)}\right)$$

при $\sigma\to 0$.

Автор висловлює вдячність Б.В.Винницькому та М.М.Шереметі за допомогу під час підготовки праці.

Список літератури: I. Г а й с и н А.М. Оценка роста функции, представленной рядом Дирихле, в полуполосе. - Мат. сб., I982, т. II7 (I59), № 2, с. 4I2-424. 2. Л е о н т ь е в А.Ф. Ряды экспонент. - М.: Наука, I976. - 535 с. 3. С о р о к и в с к и й В.М. О росте рядов Дирихле, абсолютно сходящихся в полуплоскости. К., I983. - I4 с. - Рукопись деп. в УкрНИИНТИ, № 880, УК-Д83.

Стаття надійшла до редколегії I6.04.84

УДК 517.535.4

О.В.Веселовська

ПРО АПРОКСИМАЦІЮ ТА РІСТ ЦІЛИХ ГАРМОНІЙНИХ В $\mathbb{R}^n$ ФУНКЦІЙ

Нехай S^n, K_R^n – відповідно одинична сфера та куля радіуса R у просторі $\mathbb{R}^n$, $n \geq 3$ з центрами в початку координат. Клас гармонійних в K_R^n і неперервних на замиканні $\bar{K}_R^n$ функцій позначимо через H_R, $0 < R < \infty$. Відомо [3], що для функції $u \in H_R$ при всіх r, $0 < r < R$ має місце розклад у ряд

$$u(rx) = \sum_{k=0}^{\infty} Y^{(k)}(x;u)r^k, \; x \in S^n, \tag{1}$$

де $Y^{(k)}$ – сферичні гармоніки степеня k, які виражаються через многочлени Гегенбауера C_k^ν таким чином [5] :

$$Y^{(k)}(x;u) = \frac{\Gamma(\nu)(k+\nu)}{2\pi^{\nu+1} r^k} \int_{S^n} C_k^\nu[(x,y)]u(ry)dS(y), \tag{2}$$

де $k = 0,1,\dots$, $x \in S^n$, $\nu = (n-2)/2$, (x,y) – скалярний добуток в $\mathbb{R}^n$.

Похибку апроксимації функції $u \in H_R$ гармонійними многочленами визначимо як

$$E_R^k(u) = \inf_{\mathcal{P} \in \mathcal{P}_k} \{\max_{y \in \bar{K}_R^n} |u(y) - \mathcal{P}(y)|\}, \tag{3}$$

де $\mathcal{P}_k$ – множина гармонійних многочленів степеня щонайбільше k.

У праці [6] з умови швидкості спадання похибки E_R^k знайдено для простору $\mathbb{R}^3$ необхідні та достатні умови продовжуваності функції з класу H_R до цілої гармонійної функції скінченного порядку та скінченного типу. Дослідимо аналогічні питання для n – вимірного простору.

Нехай v - ціла гармонійна в R^n функція і $M(r,v)=\max_{x\in S^n}|v(rx)|$.
За аналогією до праці [4] визначимо узагальнений порядок функції v

$$\rho_{\alpha\beta}(v)=\overline{\lim_{r\to\infty}}\frac{\alpha(\ln M(r,v))}{\beta(r)},$$

де α,β - функції одного з класів L^0, Λ [4].

Теорема. Функція $u\in H_R$ продовжується до цілої гармонійної функції тоді і лише тоді, коли

$$\lim_{k\to\infty}\sqrt[k]{E_R^k(u)}=0, \tag{4}$$

де E_R^k визначені співвідношенням (3).

При цьому, якщо для всіх c, $0<c<\infty$, виконується одна з таких умов:

а) $\alpha,\beta\in\Lambda$, $d\ln F(t,c)/d\ln t=O(1)$, $t\to\infty$;

б) $\alpha,\beta\in L^0$, $\lim_{t\to\infty}(d\ln F(t,c)/d\ln t)=\mu$, $0<\mu<\infty$,

де $F(t,c)=\beta^{-1}(c\alpha(t))$, то

$$\rho_{\alpha\beta}(u)=\overline{\lim_{k\to\infty}}\frac{\alpha(\mu k)}{\beta(e^{\mu}R[E_R^k(u)]^{-1/k})}, \tag{5}$$

причому при виконанні умови а) число μ вважається довільним додатним.

Для доведення теореми скористаємось наступними лемами.

Лема I. Якщо $u\in H_R$, то

$$\max_{x\in S^n}|Y^{(k)}(x;u)|R^k\leqslant\frac{2(k+2v)^{2v}}{v\Gamma(2v)}E_R^{k-1}(u),\ k\in N.$$

Доведення. Беручи до уваги те, що гармонійний многочлен - сума однорідних гармонійних многочленів, із співвідношення (2) на основі теореми додавання [5] для довільних многочлена

$\mathcal{P} \in \mathcal{P}_{k-1}$ і $\tau < R$ одержуємо

$$Y^{(k)}(x;u)\tau^k = \frac{\Gamma(\nu)(k+\nu)}{2\pi^{\nu+1}} \int\limits_{S^n} C_k^\nu[(x,y)]\{u(\tau y) - \mathcal{P}(\tau y)\}\, dS(y).$$

Звідси, враховуючи, що $\max\limits_{0\le\theta\le\pi} |C_k^\nu(\cos\theta)| = C_k^\nu(1)$ [5], маємо

$$|Y^{(k)}(x;u)|\tau^k \le \frac{(k+2\nu)^{2\nu}}{\nu\Gamma(2\nu)} \max_{\tau y \in \bar{K}_R^n} |u(\tau y) - \mathcal{P}(\tau y)|. \tag{6}$$

Далі з означення E_R^k випливає, що існує многочлен $\mathcal{P}^* \in \mathcal{P}_{k-1}$ такий, що

$$\max_{\tau y \in \bar{K}_R^n} |u(\tau y) - \mathcal{P}^*(\tau y)| \le 2E_R^{k-1}(u). \tag{7}$$

Приймаючи в нерівності (6) $\mathcal{P} = \mathcal{P}^*$ і враховуючи (7) та довільність τ, приходимо до твердження леми.

<u>Лема 2</u>. Для цілої гармонійної функції v при всіх $\tau > eR$ справедлива оцінка

$$E_R^k(v) \le \sqrt{2(2\nu)!}\,(2\nu+1)(k+2\nu)^{2\nu} M(\tau,v)(R/\tau)^k, \; k \in Z_+. \tag{8}$$

<u>Доведення</u>. Зі співвідношень (I), (3) та леми 2.I з праці [2] знаходимо, що

$$E_R^k(v) \le \max_{\tau x \in \bar{K}_R^n} |v(\tau x) - \sum_{m=0}^{k} Y^{(m)}(x;v)\tau^m| \le$$

$$\le (\sqrt{2}/\sqrt{(2\nu)!}) M(\tau,v) \sum_{m=k+1}^{\infty} (m+2\nu)^{\nu}(R/\tau)^m \le$$

$$\le (eR/\tau)^k \int_k^\infty (t+2\nu)^{2\nu} e^{-t} dt = (R/\tau)^k \sum_{s=0}^{2\nu} \frac{(2\nu)!\,(k+2\nu)^{2\nu-s}}{(2\nu-s)!},$$

а оскільки остання сума не перевищує $(2\nu+1)!\,(k+2\nu)^{2\nu}$, то лема 2 повністю доведена.

Доведення теореми. Нехай функція $u \in H_R$ продовжується до цілої гармонійної функції, яку ми також позначатимемо через u. Тоді співвідношення (4) безпосередньо випливає з леми 2.

Навпаки, за допомогою леми I знаходимо

$$\left|\sum_{k=0}^{\infty} Y^{(k)}(x;u) r^k\right| \le |Y^{(0)}(x;u)| + \frac{2}{\nu\Gamma(2\nu)} \sum_{k=1}^{\infty} (k+2\nu)^{2\nu} E_R^{k-1}(u) \left(\frac{r}{R}\right)^k, \tag{9}$$

звідки, беручи до уваги (4), випливає рівномірна збіжність ряду в правій частині рівності (I) на компактних підмножинах R^n, тобто ми продовжили функцію $u \in H_R$ на R^n, задавши її рядом (I).

Тепер встановимо справедливість співвідношення (5). Для цього розглянемо цілі функції

$$g_1(z) = \sum_{k=0}^{\infty} [1/((\sqrt{2(2\nu)!}(2\nu+1)(k+2\nu)^{2\nu})] E_R^k(u)(z/R)^k,$$

$$g_2(z) = \sum_{k=1}^{\infty} [2/(\nu\Gamma(2\nu))](k+2\nu)^{2\nu} E_R^{k-1}(u)(z/R)^k.$$

З нерівностей (8) і (9) випливає, що

$$\mu(r,g_1) \le M(r,u) \le |Y^{(0)}(x;u)| + M(r,g_2), \quad r > eR,$$

де $\mu(r,g_1)$ – максимальний член степеневого ряду функції g_1, $M(r,g_2) = \max_{|z|=r} |g_2(z)|$. Звідси

$$\rho_{\alpha\beta}(g_1) \le \rho_{\alpha\beta}(u) \le \rho_{\alpha\beta}(g_2). \tag{10}$$

Використовуючи формулу, що виражає узагальнений порядок цілої функції однієї комплексної змінної у термінах її тейлорівських коефіцієнтів [4, I] і належність функції β до одного з класів L, Λ, приходимо до рівності $\rho_{\alpha\beta}(g_1) = \rho_{\alpha\beta}(g_2)$, що разом з нерівністю (10) завершує доведення теореми.

Зауважимо, що співвідношення (5) при $\alpha(t) = \beta(t) = \ln t$ і $\alpha(t) = t$, $\beta(t) = t^\rho$, $p = 1/\rho$, де ρ – порядок цілої гармонійної в R^n функції u, дає відповідно формули для порядку і типу функції u.

Виражаємо глибоку вдячність А.А.Кондратюку за керівництво роботою.

Список літератури: I. Балашов С.К. О связи роста целой функции обобщенного порядка с коэффициентами ее степенного разложения и распределением корней. - Изв. вузов. Сер. мат., 1972, № 8, с. 10-18. 2. Веселовская О.В. О росте целых гармонических в R^n функций. - Изв. вузов. Сер. мат., 1983, № 10, с. 13-17. 3. Тиман А.Ф., Трофимов В.Н. Введение в теорию гармонических функций. М., 1968. - 207 с. 4. Шеремета М.Н. Связь между асимптотикой аналитических функций и коэффициентами их степенных разложений. - Автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук, Ростов-на-Дону, 1969. - 14 с. 5. Berens H., Butzer P.L., Pawelke S. Limitierungsverfahren von Reihen mehrdimensionaler Kugelfunktionen und deren Saturationsverhalten. - Publs. Res. Inst. Math. Sci., 1968, vol.4, N2, p.201-268. 6. Kapoor C.P., Nautiyal A. Approximation of entire harmonic functions in R^3. - Indian J. Pure and Appl. Math., 1982, vol.13, N9, p.1024-1030.

Стаття надійшла до редколегії 25.10.83

УДК 517.574

Я.В.Васильків

ПРО АСИМПТОТИЧНУ ПОВЕДІНКУ δ - СУБГАРМОНІЧНИХ ФУНКЦІЙ ЦІЛКОМ РЕГУЛЯРНОГО ЗРОСТАННЯ

Нехай $\lambda(r)$ - додатна, неспадна, неперервна, необмежена на $]0,+\infty[$ функція, яка називається функцією зростання, Λ_δ - клас δ -субгармонічних у C функцій скінченного λ -типу [8], Λ_s - підклас субгармонічних функцій з Λ_δ. Припустимо, що існує стала $M>0$ така, що для всіх $r>0$ виконується

$$\lambda(2r) \leq M\lambda(r).$$

Означення I. Функція $w \in \Lambda_\delta$ називається δ -субгармонічною функцією цілком регулярного зростання, якщо для довільних $\eta, \varphi \in [0, 2\pi]$ існує границя

$$\lim_{r \to \infty} \frac{1}{\lambda(r)} \int_\eta^\varphi w(re^{i\theta})\, d\theta.$$

Клас таких функцій позначимо через Λ_δ°.

Відомо [I] , що підклас $\Lambda_\varepsilon^\circ \subset \Lambda_\delta^\circ$ функцій $w = \ln|f|$, де f - ціла, при $\lambda(r) = r^{\rho(r)}$; $\rho(r)$ - уточнений порядок [6] , суміщається з класом цілих функцій цілком регулярного зростання в сенсі Левіна-Пфлюгера [6] .

А.А.Кондратюк дав узагальнення теорії Левіна-Пфлюгера, вперше ввівши класи Λ° мероморфних функцій цілком регулярного зростання [4] .

Використовуючи метод рядів Фур"є, дослідимо асимптотичну поведінку функції $w(re^{i\theta}) \in \Lambda_\delta^\circ$ при $r \to \infty$ зовні виняткової множини з нульовою лінійною щільністю [5] .

Лема I (про одностайну неперервність). Нехай $w \in \Lambda_\delta$. Тоді для довільних $\varepsilon > 0$ і $\eta > 0$ знайдуться $\delta_0 > 0$ і множина $E\eta \in \mathbb{R}_+$ з верхньою лінійною щільністю, яка не перевищує η такі, що при $r \notin E\eta$ і $|\varphi - \theta| < \delta_0$ виконується

$$|w(re^{i\theta}) - w(re^{i\varphi})| < \varepsilon \lambda(r).$$

Доведення близьке до доведення теореми I з праці [5] .

Оскільки $\Lambda_\delta = \Lambda_s - \Lambda_s$ [2] , то достатньо розглянути випадок $w \in \Lambda_s$. Формулу Пуассона-Йенсена для функції $w \in \Lambda_s$ [7] $(r = 2\rho)$ запишемо у вигляді

$$w(re^{i\theta}) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{c_k(2r, w)}{2^{|k|}} e^{ik\theta} + \int_{|a| \le r/2} \ln\left|1 - \frac{e^{-i\theta} a}{r}\right| d\mu(a) -$$

$$-\int\limits_{|a|\le 2r} \ln\left(2\left|1-\frac{\bar{a}e^{i\theta}}{4r}\right|\right)d\mu(a)+\int\limits_{r/2<|a|\le 2r}\ln\left|1-\frac{e^{-i\theta}a}{r}\right|d\mu(a), \tag{I}$$

де μ – міра асоційована за Ріссом з функцією ω, а

$$c_k(r,\omega)=c_k(r)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\omega(re^{i\theta})e^{-ik\theta}d\theta,\ k\in Z. \tag{2}$$

Позначимо суму перших трьох доданків в (I) через $G(r,\theta)$. Ряд у правій частині (I), поділений на $\lambda(r)$, збігається рівномірно по r і θ [8]. Враховуючи рівномірну неперервність функції $\ln|1-z|$ у крузі $\{z:|z|\le\frac{1}{2}\}$, приходимо до одностайної неперервності по θ сім"ї функцій $\{G(r,\theta)/\lambda(r), r>0\}$.

Позначимо останній доданок у правій частині (I) через $F(z)$, $z=re^{i\theta}$. Якщо для деяких додатних чисел δ і R виконується $|\theta-\varphi|<\delta^3$ і $R/2\le|z|=r\le R$, то, прийнявши $\xi=re^{i\varphi}$, одержимо

$$F(\xi)-F(z)=\int\limits_{r/2<|a|\le 2r}\ln\left|\frac{\xi-a}{z-a}\right|d\mu(a)\le\int\limits_{R/4<|a|\le 2R}\ln\left(1+\frac{2\delta^3R}{|z-a|}\right)d\mu(a).$$

Приймемо $H=\delta R,\ S=\mu(\{z: R/4<|z|\le 2R\})$. Позначимо через μ^* звуження μ на кільце $\{z: R/4<|z|\le 2R\}$. З огляду на теорему 4 з праці [3] в $\mathbb{C}$ знайдеться система кругів зі загальною сумою радіусів $2H$ така, що коли z не належить вказаній системі кругів, то для всіх t має місце нерівність

$$\mu_z^*(t)=\mu^*(\{a:|z-a|\le t\})\le\frac{S}{H}t.$$

Тоді для всіх $z=re^{i\theta}$, $R/2\le|z|\le R$ зовні цієї системи кругів і для всіх $\xi=re^{i\varphi}$, що задовольняють умову $|\theta-\varphi|<\delta^3$, виконується

$$F(\xi)-F(z)\le\int\limits_{R/4<|a|\le 2R}\ln\left(1+\frac{2\delta^3R}{|z-a|}\right)d\mu(a)=\int\limits_{\mathbb{C}}\ln\left(1+\frac{2\delta^3R}{|z-a|}\right)d\mu^*(a)=$$

$$= \int_0^{+\infty} \ln\left(1+\frac{2\delta^3 R}{t}\right) d\mu_z^*(t) \leq \int_0^S \ln\left(1+\frac{2\delta^2 S}{t}\right) dt \leq$$

$$\leq \sqrt{2}\,\delta\sqrt{S}\int_0^S \frac{dt}{\sqrt{t}} = 2\sqrt{2}\,\delta S \leq A\delta\lambda(r), \tag{3}$$

де A – деяка стала, не залежна від R.

Приймемо тепер $R_n = 2^n,\ n\in N$ і для кожного R_n побудуємо множину виняткових кругів з сумою радіусів $2\delta R_n$ таку, що для всіх z, які лежать зовні цієї множини, і для всіх ξ таких, що $|\theta-\varphi|<\delta^3, R_n/2\leq |z| = |\xi| \leq R_n$, виконується нерівність (3).

Тоді всі центри множини виняткових кругів лежать у кільці

$$\left\{z : \left(\frac{1}{4}-2\delta\right)R_n < |z| < (2+2\delta)R_n\right\}.$$

Крім того, виключимо круг $\{z : |z| \leq 1\}$. Тоді в крузі $\{z : |z| \leq r\}$ містяться точки виняткових кругів, сума радіусів яких не перевищує $1+2\delta(R_1+\ldots+R_n)$, де R_n – найбільше число таке, що $\left(\frac{1}{4}-2\delta\right)R_n \leq r$. Отже, ця сума радіусів не перевищує

$$1+4\delta R_n \leq 1+\frac{16\delta}{1-8\delta}r \leq 1+20\delta r \leq 1+\frac{\eta}{2}r, \tag{4}$$

якщо $\delta < \eta/40$.

Визначимо тепер множину E_η таким чином: $r\in E_\eta$, якщо існує $re^{i\theta}$, яке належить множині виняткових кругів. Тоді при $r\notin E_\eta$, $\delta<\eta/40$ і $|\varphi-\theta|<\delta^3$ виконується (3), причому з (4) випливає, що верхня лінійна щільність множини E_η не перевищує η.

Помінявши місцями φ і θ, отримаємо, що при $r\notin E_\eta$ $|\theta-\varphi|<\delta^3$ виконується $F(z)-F(\xi)\leq A\delta\lambda(r)$, яка разом з (3) дає одностайну неперервність по θ сім"ї функцій

$$\left\{F(re^{i\theta})/\lambda(r),\ r\notin E_\eta\right\}.$$

Лема 2. Для того щоб функція $\omega\in\Lambda_\delta$ належала класу Λ_δ^0, необхідно та досить, щоб для кожного $k\in\mathbb{Z}$ існувала скінчення границя

$$\lim_{r\to\infty}\frac{C_k(r,w)}{\lambda(r)}=C_k, \tag{5}$$

де $C_k(r,w)$ визначені в (2).

Доведення цілком аналогічне доведенню теореми I з праці [4].

Означення 2. Якщо $w\in\mathring{\Lambda}_\delta$, то функція

$$h(\theta,w)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}C_k e^{ik\theta},$$

де C_k визначаються співвідношеннями (5), називається індикатором функції w.

Лема 3 [5]. Якщо функція $\lambda(r)$ опукла відносно $\ln r$, то

$$M_\gamma\le 1+M^3(\gamma-1),$$

де $1<\gamma<2$ і $M_\gamma=\sup\left\{\frac{\lambda(\gamma r)}{\lambda(r)}: r>0\right\}$.

Наведемо ще дві леми.

Лема 4. Нехай $w\in\mathring{\Lambda}_\delta$. Тоді мають місце твердження:

I) $h(\theta,w)$ – неперервна функція;

2) для кожного q, $1\le q<+\infty$,

$$\lim_{r\to\infty}\left\|\frac{w(re^{i\theta})}{\lambda(r)}-h(\theta,w)\right\|_q=0,$$

де $\|\cdot\|_q$ – норма в просторі $L_q[0,2\pi]$.

Лема 5. Нехай $w\in\Lambda_\delta$. Тоді для кожного $k\in\mathbb{Z}$ існує стала $A_k>0$ така, що при $1<\gamma<2$, $r>0$ виконується

$$|C_k(\gamma r,w)-C_k(r,w)|\le A_k(\gamma-1)\lambda(r).$$

Теорема. Нехай $w\in\mathring{\Lambda}_\delta$. Тоді існує E_0 множина нульової лінійної щільності така, що

$$\lim_{\substack{r\to\infty\\ r\notin E_0}}\frac{w(re^{i\theta})}{\lambda(r)}=h(\theta,w)$$

рівномірно для $\theta\in R$.

Навпаки, нехай $\omega \in \Lambda_\delta$, функція $\lambda(r)$ опукла відносно $\ln r$ та існують E_0 множина нульової лінійної щільності, а також дійсна функція $H(\theta)$ такі, що

$$\lim_{\substack{r\to\infty \\ r\notin E_0}} \frac{\omega(re^{i\theta})}{\lambda(r)} = H(\theta)$$

рівномірно для $\theta \in \mathbb{R}$. Тоді $\omega \in \Lambda_\delta^0$ і $h(\theta,\omega) = H(\theta)$ для всіх $\theta \in \mathbb{R}$.

Доведення. Беручи до уваги леми I, 4, доведення першої частини теореми дістаємо аналогічно доведенню теореми 5 з праці [4].

Зауважимо, що функція $H(\theta)$ неперервна на $\mathbb{R}$ і 2π - періодична, оскільки функція $\frac{1}{\lambda(r)}\omega(re^{i\theta})$ неперервна по θ на $\mathbb{R}$ для значень r з деякої необмеженої множини, 2π - періодична і прямує до $H(\theta)$ рівномірно по θ. Позначимо через d_k коефіцієнти Фур"є функції $H(\theta)$. Тоді для довільного $\varepsilon>0$, $\gamma r \notin E_0$, $1<\gamma$, $r>R_1=R_1(\varepsilon)$ маємо

$$|c_k(\gamma r) - d_k\lambda(\gamma r)| < \varepsilon\lambda(\gamma r),\ k\in\mathbb{Z}. \qquad (6)$$

Оскільки множина E_0 має нульову лінійну щільність, то для довільного γ_0, $1<\gamma_0<2$ знайдеться $R_2=R_2(\gamma_0)$ таке, що при $E_0 \ni r > R_2$ існує γ, $1<\gamma\le\gamma_0$, для якого $\gamma r\notin E_0$. Тоді, використавши леми 3,5 і співвідношення (6), при $E_0 \ni r > R_0 = \max(R_1,R_2)$ дістаємо

$$|c_k(r) - d_k\lambda(r)| \le |c_k(\gamma r) - d_k\lambda(\gamma r)| +$$
$$+|c_k(\gamma r) - c_k(r)| + |d_k||\lambda(\gamma r) - \lambda(r)| \le$$
$$\le M\varepsilon\lambda(r) + A_k(\gamma_0 - 1)\lambda(r) + |d_k| M^3(\gamma_0-1)\lambda(r).$$

Звідси випливає, що $\lim\limits_{r\to+\infty}\frac{1}{\lambda(r)}c_k(r,\omega) = d_k$. На підставі леми 2 $\omega\in\Lambda_\delta$. Теорема доведена.

Висловлюємо щиру подяку А.А.Кондратюку за керівництво роботою.

Список літератури: I. А з а р и н В.С. О регулярности роста коэффициентов Фурье логарифма модуля целой функции. - Теория функций, функциональный анализ и их приложение, 1977, вып. 27, с. 9-21. 2. В а с и л ь к і в Я.В. Деякі властивості δ -субгармонічних функцій скінченного λ -типу. - Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат., 1983, вип. 21, с. 14-21. 3. Г р и ш и н А.Ф. О регулярности роста субгармонических функций. - Теория функций, функциональный анализ и их приложение, 1968, вып. 6, с. 3-29. 4. К о н д р а т ю к А.А. Метод рядов Фурье для целых и мероморфных функций вполне регулярного роста. - Мат. сб., 1978, т 106 /148/, № 3, с. 386-408. 5. К о н д р а т ю к А.А. Асимптотична поведінка та кількість дефектних значень цілих функцій цілком регулярного зростання. - Доп. АН УРСР, 1981, № 5, с. 11-13. 6. Л е в и н Б.Я. Распределение корней целых функций. - М.: Гостехиздат, 1956. - 632 с. 7. Х е й м а н У., К е н н е д и П. Субгармонические функции. - М.: Наука, 1980. - 304 с. 8. Noverraz P. Fonctions plurisousharmoniques et analytiques dans les espaces topologiques complexes. - Ann. Inst. Fourier, Grenoble, 1969, N 19, p. 419-493.

Стаття надійшла до редколегії 14.02.83

УДК 517.51

Л.Є.Базилевич

ПРО СЕЛЕКЦІЮ ФУНКЦІЇ ВІДСТАНІ ДО КОМПАКТА

З довільним компактом $M \subset \mathbb{R}^n$ пов"язане многозначне відображення $\varphi: [0,\infty[\to 2^{\mathbb{R}^n}$, $\varphi(r) = E(M,r)$, де $E(M,r) := \{y \in \mathbb{R}^n \mid d(M,y) = r\}$; $2^{\mathbb{R}^n}$ - множина компактних підмножин $\mathbb{R}^n$; d - евклідова метрика. Розглянемо задачу побудови неперервної селекції відображення φ, тобто неперервного відображення $\alpha: [0,\infty[\to \mathbb{R}^n$ такого, що $\alpha(r) \in \varphi(r)$, $r \in [0,\infty[$

("лінії втечі" за термінологією з праці [1] , де задача розв"язана для випадку, коли M – замикання однозв"язної жорданової області в $\mathbb{R}^2$).

Розглянемо загальний випадок. Зауважимо, що відображення φ не є, взагалі кажучи, півнеперервним знизу [2] , тому неможливо застосувати відомі результати про селекцію [3] . Побудова диференційовної селекції розглядатиметься в іншій публікації.

Введемо необхідні означення та позначення. Доведення лем 1–4 достатньо очевидні й опускаються.

Зафіксуємо деякий компакт $M \subset \mathbb{R}^n$, ніяка компонента зв"язності якого не розрізає простору $\mathbb{R}^n$. Позначимо

$$P(x) := \{y \in M \mid d(x,y) = d(x,M)\},\ x \in \mathbb{R}^n \setminus M.$$

Лема 1. Нехай $\{x_n\}$ – послідовність точок множини $\mathbb{R}^n \setminus M$ і $x \in \mathbb{R}^n \setminus M$ її точка згущення. Тоді $P(x) \cap \lim\limits_{n\to\infty} P(x_n) \neq \emptyset$.

Нехай $p(x) \in P(x)$. Відрізок $]p(x), x]$ назвемо проекційним відрізком з основою $p(x)$ і кінцем x . Два різні проекційні відрізки не можуть перетинатися по внутрішній точці одного з них; вони або мають спільний кінець, або один з них є частиною іншого. Проекційний відрізок, який не міститься в жодному іншому, називаємо максимальним.

Нехай $r > 0$. Позначимо $E^+(M,r) := \{y \in \mathbb{R}^n \mid d(y,M) > r\}$, $E^-(M,r) := \{y \in \mathbb{R}^n \setminus M \mid d(y,M) < r\}$. Через $E^{+\infty}(M,r)$ запишемо необмежену компоненту зв"язності множини $E^+(M,r)$. Області $E^{+\infty}(M,r)$ монотонно зростають при спаданні r . Маємо $E^{+\infty}(M,r) \subsetneq \bigcup_{r'<r} E^{+\infty}(M,r')$. Позначимо $G' := \bigcup_{r>0} Bd\, E^{+\infty}(M,r)$.

Кажемо, що точку $x \in Cl\, X$ можна з"єднати з нескінченністю в множині X , якщо існує дуга $\gamma(t), t \in [0,\infty[$ така, що $\gamma(0) = x$, $\gamma(t) \in X$ при $t \in]0,\infty[$ і функція $g(t) := d(\gamma(t), M)$ монотонно прямує до нескінченності.

Лема 2. Множина точок з $BdE^{+\infty}(M,r)$, які не є кінцями максимальних проекційних відрізків, всюди щільна в $BdE^{+\infty}(M,r)$.

Лема 3. Нехай $y \in BdE^{+\infty}(M,r), p(y) \in P(y)$. Тоді $]p(y),y] \subset G'$.

Лема 4. Нехай $]p(x),x]$ – максимальний проекційний відрізок і $y \in]p(x),x] \cap G'$. Тоді $]y,x[\cap G' \neq \emptyset$.

Позначимо через Ω множину компонент зв"язності компакта M. Нехай $M' \in \Omega$. Через $M(M',r)$ позначимо об"єднання таких компонент $A \in \Omega$, що існує послідовність $A_0 = A, A_1, \dots A_{n-1}, A_n = M'$ елементів $A_i \in \Omega$, для якої $d(A_{i-1}, A_i) < 2r, i \in \overline{1,n}$ ($n \in N$ – довільне). Приймемо $D(M',r) := BdE^{+\infty}(M(M',r),r), G := \bigcup_{r>0} D(M',r)$. Множини $D(M',r)$ замкнені та зв"язні. Для того щоб існувала неперервна селекція функції відстані до M з початком $c \in BdM'$ $(\alpha(0)=c)$, необхідно, щоб множина G була зв"язна.

Зробимо такі припущення. Нехай $\Lambda := \{r \in R, r>0 / N(M',r) := \bigcap_{r'>r} M(M',r') \setminus M(M',r) \neq \emptyset\}$. Множина Λ не більш як злічення з єдиною можливою точкою згущення – нулем. Тому відображення $\psi:]0,\infty[\to 2^{R^n}, \psi(r) = M(M',r)$ є зростаючою східчастою неперервною зліва функцією, яка має стрибки в точках множини Λ. Нехай далі $D^*(M',r) := D(M',r) \bigcap \lim_{r' \to r} D(M',r')$, $G^* = \bigcup_{r>0} D^*(M',r)$ (зв"язність G^* випливає зі зв"язності G). Якщо $r \notin \Lambda$, то $D(M',r) = D^*(M',r)$. Тому для r, R таких, що $[r,R] \cap \Lambda = \emptyset$, маємо $G' \cap D = G \cap D = G^* \cap D$, $D := E^+(M(M',r),r) \cap E^-(M(M',R),R)$.

Лема 5. Множина точок $D^*(M',r)$, які не є кінцями максимальних проекційних відрізків, всюди щільна в $D^*(M',r)$.

Доведення. Вважаємо, що $r \in \Lambda$ (при $r \notin \Lambda$ див. лему 2). Нехай $x \in D^*(M',r)$. Якщо $K(x,\delta) \cap E^-(N(M',r),r) = \emptyset$ для деякого $\delta > 0$ / $K(x,\delta) := \{y \in R^n / d(x,y) < \delta\}$, то доведення також зводиться до леми 2. У протилежному випадку існує точка $p_2(x) \in P(x) \cap N(M',r)$. Нехай $p_2(x) \in P(x) \cap M(M',r)$. Тоді $p_1(x), p_2(x)$ і x розташовані на одній прямій.

Зауважимо, що коли $Y = Bd\,J$, де J – об"єднання деякої сукупності куль радіуса R, та існує куля K радіуса R така, що $Int\,J \cap K = \emptyset$, то для будь-якої точки $x \in Bd\,K \cap Y$ існує $\delta > 0$ таке, що множина $K(x,\xi) \cap Y$ гомеоморфна диску D^{n-1} для всіх $\xi \in]0,\delta]$. Прийнявши $Y = D(M,r)$ і $\tilde{Y} = D(N(M,r),r)$, знайдемо числа δ_1, δ_2 і позначимо $\sigma = \min\{\delta_1, \delta_2\}$. Припустимо, що всі точки з $K(x,\sigma) \cap D^*(M,r)$ є кінцями максимальних проекційних відрізків. Тоді $Bd_{K(x,\sigma)}(E^{+\infty}(M(M,r),r) \cap K(x,\delta)) \subset D(N(M,r),r) \cap K(x,\delta)$, що неможливо, оскільки остання множина, ні жодна її підмножина не відділяє в $K(x,\sigma)$ точок $E^+(M,r)$ від точок $E^-(M,r)$. Лема доведена.

Нехай $\Gamma(a,b) = \alpha([a,b])$, де α – неперервна селекція відображення $\varphi/[r,R]$, причому $\alpha(r) = a \in D^*(M,r)$ і $\alpha(R) = b \in D^*(M,R)$, а $\mathcal{T}(a,b) := \{\Gamma(a,b)\}$.

Теорема I. Для довільних точок $a \in D^*(M,r)$ і $b \in D^*(M,R)$ $R > r$, $R, r \in \Lambda$ маємо $\mathcal{T}(a,b) \neq \emptyset$.

Доведення. Загальний випадок легко зводиться до ситуації, коли a і b не лежать на одному проекційному відрізку та $[r,R] \cap \Lambda = \emptyset$ (застосовуємо лему 5). Нехай $a_1 \in D(M,r)$ таке, що $d(a,a_1) < \alpha$ $(0 < \alpha \ll R-r, r)$ і a_1 не є кінцем максимального проекційного відрізка (див. лему 2), а $z_1 \in G \cap E^-(M(M,r),r)$ таке, що існує $p(z_1) \in P(z_1)$, для якого $a_1 \in]p(z_1), z_1]$ (лема 4). Позначимо $R' := d(z_1,M)$, $x_1 := [b,p(b)[\cap D(M,R')$, $p(b) \in P(b)$. Візьмемо $y_1 \in]a_1, z_1[$ таке, що $0 < r' - r < \alpha$, $r' := d(M,y_1)$.

Через $L(y_1,x_1,\alpha)$ позначимо послідовність $q_0 = y_1, q_1, \ldots, q_N = y_1$, яка задовольняє умови $d(q_{i-1},M) < d(q_i,M)$, $0 < d(q_i,q_{i-1}) < 3\alpha$ і $0 < \beta^*(i-j) < d(q_i,q_j)$ для всіх $i \in \overline{1,N}$, $j < i$, а через $\mathcal{L}(y_1,x_1,\alpha)$ – множину точок послідовності $L(y_1,x_1,\alpha)$. Покажемо, що послідовність $L(y_1,x_1,\alpha)$ існує.

На $D(M', R')$ виберемо послідовність точок $s_0 = z_1, s_1, \ldots, s_n = z_1$ таку, що $d(s_i, s_{i-1}) < \alpha,\ i \in \overline{1,n}$ / n достатньо велике, щоб $(R' - r')/n : \beta < \alpha$ /. Проведемо проекційні відрізки $[s_i, p(s_i)[$ і позначимо

$$t_i := [s_i, p(s_i)[\cap D(M', r' + \beta \cdot i),\ i \in \overline{0,n}\ (t_0 = y_1,\ t_n = s_n = x_1)$$

$$t_i^* := [s_i, p(s_i)[\cap D(M', r' + \beta(i+1)),\ i \in \overline{0,n-1}\ (t_{n-1}^* = s_{n-1}).$$

Якщо для деякого $i \in \overline{1,n-1}$ $d(t_i, t_{i-1}^*) \geq \alpha$, то на $D_{n(i)}(A, r + \beta i)$ обираємо послідовність точок $k_i^0 = t_{i-1}^*, k_i^1, \ldots k_i^{n(i)}$ так, щоб $d(k_i^j, k_i^{j-1}) < \alpha,\ j \in \overline{1, n(i)}$. Проводимо проекційні відрізки $[k_i^j, p(k_i^j))$ і на них обираємо точки $\tilde{k}_i^j := [k_i^j, p(k_i^j)[\cap D(M, r' + \beta(i-1) + \beta j / n(i))$ $(\tilde{k}_i^0 = t_{i-1})$.
Нехай $\beta^* := \min\{\beta / \max\{n(i) \mid i \in \overline{1,n-1}\}, r' - r\}$. Перепозначивши всі (різні) точки t_i, $\tilde{k}_i^j$, одержимо шукану послідовність.

$\Gamma(a,b)$ шукаємо у вигляді $\bigcup_{i=1}^{\infty} Q_i \cup \bigcup_{j=i}^{\infty} T_i^j$, де T_i^j — послідовність $L(q_0^{i,j}, q_{N(i,j)}^{i,j}, \alpha/2^{n-1})$. Приймемо $Q_1 := [b, x_1[\cup \{a\}$, $T_1^1 := \overset{\circ}{L}(y_1, x_1, \alpha)$ і припустимо, що Q_i, T_i^j, $i \in \overline{1,n}, j \in \overline{i,n}$ вже побудовані.

Точку a_{n+1} обираємо аналогічно до a_1, тільки щоб $d(a, a_{n+1}) < \frac{\alpha}{2^n}$ z_{n+1} і y_{n+1} аналогічно до z_1 і y_1, але $0 < r'_{n+1} - r < \frac{\alpha}{2^n}$ і $R'_{n+1} := d(M, z_{n+1}) < d(M, q_0^{n,n})$, та позначимо $x_{n+1} := [q_0^{n,n}, p(q_0^{n,n})[\cap D(M', R'_{n+1})$. Приймемо $Q_{n+1} :=]q_0^{n,n}, x_{n+1}[$,
$T_{n+1}^{n+1} := \overset{\circ}{L}(y_{n+1}, x_{n+1}, \frac{\alpha}{2^n})$, $T_j^{n+1} := \overset{\circ}{L}(q_0^{j,n+1}, q_{N(j,n)}^{j,n+1}, \alpha/2^n) = \bigcup_{i=1}^{N(j,n)} \overset{\circ}{L}(q_{i-1}^{j,n}, q_i^{j,n}, \alpha/2^{n-1})$.

З побудови випливає, що $\Gamma(a,b)$ гомеоморфно відрізку $[0,1]$ і $\Gamma(a,b) \cap D(M', r') = \{*\}, r' \in [r, R]$. Тому $\Gamma(a,b) \in \mathcal{T}(a,b) \neq \emptyset$.

Теорема доведена.

Для простору $\mathbb{R}^2$ наявна така теорема.

Теорема 2. Існує неперервна селекція функції відстані до континууму M з початком у будь-якій точці $x \in Bd\, M'$, яку можна з"єднати з нескінченністю (множина таких точок міститься, але не збігається з множиною досяжних зовні точок компакта M').

Для вищих розмірностей теорема 2, взагалі кажучи, неправильна. Проте для довільної точки $x \in Bd\, M'$ можна побудувати таку селекцію $d(\tau)$, що $\lim d(\tau) \ni x$. Справді, виберемо послідовності точок з G^*: $\{x_n\} \xrightarrow{\tau \to 0} x$ таку, що $\{d(M, x_n)\}$ монотонно прямує до нуля в множині $\mathbb{R}_+ \setminus \Lambda$ і $\{y_n\}$ таку, що послідовність $\{d(M, y_n)\}$ монотонно прямує до нескінченності в $\mathbb{R}_+ \setminus \Lambda$, причому $d(M, x_1) < d(M, y_1)$. Тоді $d(]0, \infty[) =$

$$= \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \Gamma(y_n, y_{n+1}) \right) \cup \Gamma(x_1, y_1) \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} \Gamma(x_{n+1}, x_n).$$

Список літератури: 1. Базилевич Л.Е., Песин И.Н. Две задачи о расстоянии Фреше и о линии побега.–Сиб. мат. журн., 1981, т. 22, № 4, с. 14–22. 2. Куратовский К. Топология. – М.: Мир, 1969. Т. 2. – 624 с. 3. E. Michael. Continuous selections and finite-dimensional sets – Pacif. Journ. of Math., 1980, vol. 87, N 1, p. 189-197.

Стаття надійшла до редколегії 14.02.83

УДК 513.83

Б.М.Бокало, І.Й.Гуран

ОБМЕЖЕНІСТЬ У ТОПОЛОГІЧНИХ КІЛЬЦЯХ

У праці [4] для кожного нескінченного кардинала τ введено поняття τ -обмеженої топологічної групи. Клас ω -обмежених топологічних груп має ряд хороших властивостей і допускає повне описання. Ці групи топологічно ізоморфні підгрупам добутків сепарабельних метризованих груп.

Поширимо поняття ω -обмеженості на топологічні кільця. Оскільки кільце – алгебраїчна структура з двома бінарними операціями, то перш за все виникає питання: який зв"язок між обмеженістю адитивної групи кільця і обмеженістю його мультиплікативної півгрупи? З"ясуємо, що ці обмеженості нееквівалентні.

Термінологія та позначення. Розглянемо лише віддільні кільця з одиницею. Відкриті околи нуля кільця позначатимемо великими літерами U, V, W, ... з індексом 0, а 0 коли одиниці з індексом I. Скрізь далі ω – перший нескінченний, а ω_1 – перший незчисленний кардинали. Дійсні числа і їх підмножини наділяються стандартними топологіями. Під ізоморфним ущільненням розумітимемо неперервний ізоморфізм кільця.

I. Обмежені та ω -обмежені кільця

I.I.Означення. Підмножина B топологічного кільця R називається $(\omega,+)$ -обмеженою ($(\omega,\cdot)$ -обмеженою), якщо для довільного околу U_0 (U_1) існує така підмножина $A\subset R, |A|\leqslant\omega$, що $U_0+A\supseteq B$ $(U_1\cdot A\supseteq B)$.

У випадку $B=R$ кільце R називається $(\omega,+)$-,$(\omega,\cdot)$-обмеженим. Клас всіх $(\omega,+)$- ($(\omega,\cdot)$-) обмежених кілець позначатимемо через $\mathcal{K}_\omega^+$, $(\mathcal{K}_\omega^\circ)$.

1.2. Твердження. Якщо R фінально компактне кільце, то $R\in\mathcal{K}^+_\omega\cap\mathcal{K}^\circ_\omega$. Зокрема, кільце дійсних чисел $\mathbb{R}$ належить як класу $\mathcal{K}^+_\omega$, так і класу $\mathcal{K}^\circ_\omega$.

1.3. Приклад. $\mathcal{K}^\circ_\omega\not\subset\mathcal{K}^+_\omega$. Приймемо $\sigma(0)=\{x\in\mathbb{R}^\omega / x=(x_0,\dots x_i,\dots) / |\{i / x_i\neq 0\}|<\omega\}$. Розглянемо кільце R_1 нескінченних матриць, стрічки яких належать $\sigma(0)$. Одиницею кільця R_1 є матриця:

$$E=\begin{cases} a_{ij}=1, & \text{при } i=j;\\ a_{ij}=0, & \text{при } i\neq j.\end{cases}$$

Для всякого $n\in\omega$ через J_n позначимо підмножину таких матриць $(a_{ij})\in R_1$, що $a_{ij}=0$ при $1\le i\le n;\ i,j\in\omega$.

Очевидно, J_n – правий ідеал кільця R_1 для кожного $n\in\omega$. Система $\mathcal{B}=\{J_n / n\in\omega\}$ – задовольняє умови бази околів нуля топологічного кільця [2]. Задамо на R_1 топологію, породжену системою $\mathcal{B}$, і покажемо, що R_1 – $(\omega,\cdot)$ –обмежене кільце. Множина $U_1^n=J_n+E$ є околом одиниці. $\{U_1^n / n\in\omega\}$ – база околів одиниці кільця R_1. Позначимо через E_n матрицю

$$E_n=\begin{cases} a_{ij}=1, & \text{при } j=n-i+1;\\ a_{ij}=0, & \text{при } j\neq n-i+1.\end{cases}$$

Нехай U_1^n – довільний базисний окіл одиниці кільця R_1. Тоді $E_n U_1^n=R_1$. Отже, R_1 – $(\omega,\cdot)$ – обмежене кільце. Легко бачити, що R_1 не $(\omega,+)$ –обмежене кільце.

1.4. Приклад. $\mathcal{K}^+_\omega\not\subset\mathcal{K}^\circ_\omega$. Нехай $R_2=\{z+a_1x+\dots+a_nx^n / n\in N,\ z\in Z,\ a_i\in\mathbb{R}\}$. Розглянемо довільні раціональні додатні числа $b,c\in Q^+$. Через U_{bc} позначаємо множину

$$U_{bc}=\{a_1x+\dots+a_nx^n / a_i\in\left]-\frac{1}{(bc)^i},\frac{1}{(bc)^i}\right[,\ i=1,\dots,n;\ n\in N\}.$$

Безпосередньою перевіркою визначаємо, що система $\mathcal{B}=\{U_{bc} / b,c\in Q^+\}$ задовольняє умови бази околів нуля топологічного кільля. Задамо на R_2 топологію, породжену системою $\mathcal{B}$. Очевидно, що $R_2 \in \mathcal{K}_\omega^+$. Покажемо, що кільце R_2 не $(\omega,\cdot)$ - обмежене. Припустимо протилежне, тобто, що для довільного околу нуля $U_{\Delta c}$ кільця R_2 існує зчисленна множина $Q \subset R_2$ така, що $(U_{\Delta c}+1)Q = R_2$. Розглянемо многочлени $\{ax^2+x+1 \mid a \in \mathbb{R}\}$. Згідно $(\omega,\cdot)$ -обмеженості існують многочлени $p(x) \in U_{\Delta c}$ і $q(x) \in Q$ такі, що $p(x)\cdot q(x) = ax^2+x+1$. Оскільки многочлен ax^2+x+1 при $a > \frac{1}{4}$ незвідний над полем дійсних чисел, то можливий лише один з таких двох випадків:

1) $\deg p(x) = 2,\ q(x) = const;$

2) $\deg q(x) = 2,\ p(x) = const.$

Оскільки коефіцієнти $p(x)$ обмежені, то випадок 1) неможливий; випадок 2) теж неможливий з огляду на те, що множини $\{ax^2+x+1 \mid a > \frac{1}{4}\}$ і Q мають різну потужність.

Наступні теореми дають достатні умови на кільце для того, щоб з його $(\omega,\cdot)$ -обмеженості випливала $(\omega,+)$ -обмеженість.

<u>1.5.Теорема</u>. Якщо $R - (\omega,\cdot)$ -обмежене кільце і в R існує $(\omega,+)$ -обмежений окіл U_0, то $R - (\omega,+)$ -обмежене кільце.

<u>1.6.Наслідок</u>. Якщо $\mathcal{K}$ - клас локально компактних або локально фінально компактних кілець, то $\mathcal{K} \cap \mathcal{K}_\omega^{\cdot} \subseteq \mathcal{K} \cap \mathcal{K}_\omega^+$.

Нагадаємо, що кільце R називається обмеженим зліва (справа), якщо для довільного околу нуля U_0 існує V_0 в кільці R, що $V_0 \cdot R \subseteq U_0$ $(R \cdot V_0 \subseteq U_0)$.

<u>1.7.Теорема</u>. Нехай $\mathcal{T}$ - недискретна кільцева топологія на полі P. Якщо топологічне кільце $(P,\mathcal{T})$ локально обмежене зліва (справа), то з його $(\omega,\cdot)$ - обмеженості випливає $(\omega,+)$ - обмеженість.

2. Ізоморфні ущільнення топологічних кілець

Дамо достатні умови на топологічне кільце, нуль якого є G_δ -множиною, при яких воно ізоморфно ущільнюється на метризоване кільце. Як свідчить приклад 2.5, у загальному випадку це не так.

2.1. Означення. Кільце називається врівноваженим, якщо для кожного околу U_0 існує така зчисленна система околів $\gamma=\{V_0^n \mid n\in\omega\}$, що для будь-якого $a\in R$ існує $n_0\in\omega$, що $aV_0^{n_0}\subseteq U_0$ і $V_0^{n_0}a\subset U_0$. Очевидно, будь-яке метризоване кільце врівноважене.

2.2. Твердження. Якщо $R-(\omega,+)$ – обмежене кільце, то R – врівноважене кільце.

2.3. Теорема. Нехай R – врівноважене кільце, нуль якого G_δ – множина. Тоді R ізоморфно ущільнюється на метризоване кільце.

2.4. Наслідок. Якщо $R-(\omega,+)$ – обмежене кільце, нуль якого G_δ – множина, то R – ізоморфно ущільнюється на сепарабельне метризоване кільце. Модифікуючи положення з праці [5], маємо таке.

2.5. Приклад. Нехай $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ – кільце матриць другого порядку над полем дійсних чисел. Розглянемо кільце $K=\Pi\{K_\alpha \mid \alpha\in\omega_1\}$, де $K_\alpha=\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ для всіх $\alpha\in\omega_1$ в box – топології [3]. Нуль, очевидно, кільця K є G_δ -множиною. Припустимо, що K – ізоморфно ущільнюється на топологічне кільце з метризованою топологією. Нехай її база в нулі $\mathcal{B}_0=\{V_0^n \mid n\in\omega\}$.

Виберемо стандартні ящики U^n так, що $U_0^n\subset V_0^n$ для всіх $n\in\omega$. Позначимо їх $U^{n_0}=\Pi\{U^n(\alpha) \mid \alpha\in A, |A|=\omega_1\}$. Очевидно, в кільці $\mathcal{M}_2$ існують послідовності $\{x_n\}$ і $\{y_n\}$ такі, що $x_ny_n\to e$, $y_nx_n\to e$, $x_n\to 0$. Справді, достатньо взяти $x_n=\begin{pmatrix}1/n & 0\\ 0 & 1/n\end{pmatrix}$, $y_n=\begin{pmatrix}n & 0\\ 0 & n\end{pmatrix}$. Цю умову можна записати так: для будь-якого V_0 і для кожного околу W_1 існує $y \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, що $yV_0 \cap W_1 \neq \emptyset$, $V_0 y \cap W_1 \neq \emptyset$.

Для кожного одиничного елемента $e_\alpha \in K_\alpha$ виберемо такі околи W_α, що $e_\alpha \in W_\alpha \subset [W_\alpha]$ і $O_\alpha \notin [W_\alpha]$.

Нехай $B = \{\alpha_k | k \in \omega\} \subset A$. Визначимо елемент $y^* \in K$:

$$y^*(\alpha) = \begin{cases} e_\alpha & \text{, якщо } \alpha \in A \setminus B; \\ y^*_{\alpha_k} & \text{, коли } \alpha_k \in B, \end{cases}$$

де $U(\alpha_k) y^*_{\alpha_k} \cap W_{\alpha_k} \neq \emptyset$; $^k y_{\alpha_k} U(\alpha_k) \cap W_{\alpha_k} \neq \emptyset$.

Для фіксованого $n \in \omega$ існує $m \in \omega$ таке, що $y^* V_0^m \subsetneq V_0^n$, $V_0^m y^* \subsetneq V_0^n$. Оскільки $U_0^m \subset V_0^m$, то $y^* U_0^m \subsetneq V_0^m$, $U_0^m y^* \subsetneq V_0^m$, тому при $k \geq m$ маємо $y^*_{\alpha_k} U_{\alpha_k} \cap W_{\alpha_k} \supseteq$ $\supseteq y^*_{\alpha_k} U_{\alpha_k} \cap W_{\alpha_k} \neq \emptyset$. Отже $V^n_{\alpha_k} \cap K_{\alpha_k} \cap^k W_{\alpha_k} \neq \emptyset$.

Ми показали, що для будь-якого $n \in \omega$ і для кожної зчисленної підмножини $B \subset A$ існує індекс $\alpha \in B$ такий, що $V^n_\alpha \cap K_\alpha \cap W_\alpha \neq \emptyset$. Звідси випливає, що множина тих $\alpha \in A$, що не при всіх $n \in \omega$ виконується $V^n_\alpha \cap K_\alpha \cap W_\alpha \neq \emptyset$, не більш ніж зчисленна. Отже, існує індекс $\alpha \in A$, що при всіх $n \in \omega$ справджується $U^n_\alpha \cap K_\alpha \cap W_\alpha \neq \emptyset$, яка означає $O_\alpha \subset [W_\alpha]$. Протиріччя.

Список літератури: 1. Архангельский А.В. Классы топологических групп. – Усп. мат. наук, 1981, т.36, вып. 3, с. 127–146. 2. Арнаутов В.И., Водинчар М.И., Михалев А.В. Введение в теорию топологических колец и модулей. Кишинев: Штиинца, 1981. – 212 с. 3. Бурбаки Н. Общая топология. Топологические группы. Числа и связанные с ними группы и пространства. – М.: Наука, 1969. – 392 с. 4. Гуран И.И. О топологических группах, близких к финально компактным. – Докл. АН СССР, 1981, т.256, с. 1305–1307. 5. Пестов В.Г. О вложениях топологических групп. – Мат. заметки, 1982, т.31, № 3, с. 443–446.

Стаття надійшла до редколегії 30.05.83

УДК 513.83

М.М.Зарічний

СИМЕТРИЧНІ ДОБУТКИ, ЩО Є НЕСКІНЧЕННОВИМІРНИМИ МНОГОВИДАМИ

Пряму границю системи

$$\mathbb{R}^1 \longrightarrow \mathbb{R}^1 \times \{0\} \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \times \{0\} \subset \mathbb{R}^3 \longrightarrow \ldots$$

позначимо $\mathbb{R}^\infty$. Для кожного скінченновимірного ANR - компакта X з неізольованою точкою $e \in X$ нескінченний симетричний добуток $SP(X,e)$ в розумінні А.Дольда і Р.Тома [4] є $\mathbb{R}^\infty$-многовидом [2]. Вивчимо властивості компакта X, для якого $SP(X,e)$ - $\mathbb{R}^\infty$-многовид.

У деяких місцях обмежимося тільки ескізами доведень, відсилаючи читача до аналогічних міркувань у цитованих роботах.

<u>Теорема</u>. Нехай $SP(X,e)$ - $\mathbb{R}^\infty$ -многовид, де X -компакт і $e \in X$. Тоді $X \setminus \{e\} \in ANR(\mathfrak{M})$.

<u>Доведення</u>. Для $SP(X,e)$ маємо два зображення у вигляді границь обернених систем:

$$SP(X,e) = \underrightarrow{\lim}\{SP^k(X), j_k\} = \underrightarrow{\lim}\{M_\ell, i_\ell\},$$

де j_k - природні вкладення [4] ; M_ℓ - компактні поліедри; i_ℓ - вкладення (з приводу другого зображення див. працю [5]). Тоді існують m і n такі, що $X = SP^1(X) \subset M_m \subset SP^n(X)$.

Нехай $x \in X \setminus \{e\}$. Розглянемо околи U і V точок x і e такі, що $U \cap V = \varnothing$. Приймемо $W = \{[y_1, \ldots, y_n] \in$ $\in SP^n(X) \mid y_1 \in U,\ \{y_2, \ldots, y_n\} \subset V\}$.

Тоді W - відкритий окіл точки $x = [x]$ в $SP^k(X)$. Означимо ретракцію $r: W \to U$, прийнявши $r[y_1, \ldots, y_n] = z$, де $z \in \{y_1, \ldots, y_n\} \cap U$. Тоді відображення $r|_{W \cap M_m}$ задає ретракцію множини $W \cap M_m$ на U. За першою теоремою

Ханнера [I] $W \cap M_m \in ANR(\mathfrak{m})$, отже, $U \in ANR(\mathfrak{m})$. Оскільки, як показано вище, кожна точка простору $X \setminus \{e\}$ має $ANR(\mathfrak{m})$-окіл, то за другою теоремою Ханнера [I] $X \setminus \{e\} \in ANR(\mathfrak{m})$. Теорема доведена.

Далі нам знадобиться технічний результат, що нескладно доводиться методами з праці [6] (через I позначаємо сегмент $[0,1]$).

<u>Лема I</u>. Нехай $X = \varinjlim \{X_i, j_i\}$, де $X_1 \xrightarrow{j_1} X_2 \xrightarrow{j_2} X_3 \xrightarrow{j_3} \ldots$ – пряма система метризовних ANR – компактів і вкладень. Якщо, крім цього, виконується така умова:

$(*)$ коли для кожного компакта K і вкладення $K \xrightarrow{f} X$ існує вкладення $\bar{f} : K \times I \longrightarrow X$, для якого діаграма

$$\begin{tikzcd} K \arrow[r, "\times\{0\}"] \arrow[dr, "f"'] & K \times \{0\} \arrow[r, hook] & K \times I \arrow[dl, "\bar{f}"] \\ & X & \end{tikzcd}$$

комутативна, то X – $\mathbb{R}^\infty$-многовид.

<u>Лема 2</u>. Якщо в умовах леми I додатково вимагати, щоб для всіх i, то $X \cong \mathbb{R}^\infty$.

<u>Доведення</u>. Нехай $g : S^n \longrightarrow X$ – неперервне відображення сфери S^n в X. Тоді $g(S^n)$ лежить в деякому X_k і зі стягуваності простору X_k випливає, що відображення g гомотопне нулю. Таким чином, простір X слабо гомотопічно еквівалентний точці. А з результатів праці [5] маємо $X \cong \mathbb{R}^\infty$.

Наступний приклад показує, що в умовах теореми I не можна вимагати, щоб X був ANR-компактом.

<u>Приклад</u>. Компакт $Z \notin ANR$ такий, що $SP(Z, a)$-$\mathbb{R}^\infty$-многовид, $a \in Z$.

Нехай Y – компактний зв"язний ациклічний нестягуваний поліедр. Приймемо $Y_i = Y \setminus \{a\}, a \in Y, Z = \bigcup\{Y_i \mid i \in N\} \cup \{a\}$ – одноточкова компактифікація простору $\bigcup\{Y_i \mid i \in N\}$. Легко бачити, що $Z \notin ANR$.

Розглянемо $SP(Z,a)$ і покажемо, що існує абсолютний ретракт A_1 такий, що $Z = SP^1(Z) \subset A_1 \subset SP(Z,a)$. Оскільки при $i \geq 1$ $H_i(Y) = 0$, то за теоремою Дольда–Тома [4], $\pi_i(SP^\infty(Y,a)) = 0$. Оскільки $SP(Y,a)$ – R^∞-многовид [1], то простір $SP(Y,a)$ – стягуваний [5] і отже, $SP(Y,a) \cong R^\infty$.

Для кожного $i \in N$ існує абсолютний ретракт $B_i \subset SP(Y_i \cup \{a\}, a) \subset SP(Z,a)$ такий, що $Y_i \cup \{a\} \subset B_i$. Тоді можна прийняти $A_1 = \bigcup\{B_i \mid i \in N\}$. Тепер для кожного $k \geq 2$ знайдемо абсолютний ретракт A_k такий, що $SP^k(Z) \subset A_k \subset SP(Z,a)$. Насамперед зауважимо, що $A_1 \subset SP^\ell(Z)$ для деякого ℓ. Позначимо через i вкладення $A_1 \hookrightarrow SP^\ell(Z)$ і означимо відображення $i_k : SP^k(A_1) \longrightarrow SP(Z,a)$ наступним способом. Нехай $x = [x_1, \dots, x_k] \in SP^k(A)$ і $i(x_i) = [y_{1,i}, \dots, y_{j_i,i}]$; приймемо $i(x) = [y_{1,1}, \dots, y_{j_1,1}, y_{1,2}, \dots, y_{j_2,\ell}, \dots, y_{1,k}, \dots, y_{j_k,k}] \in SP(Z,a)$.

Розглянемо комутативну діаграму

$$\begin{tikzcd} A_1^k \arrow[r, "p"] \arrow[d, hook] & SP^k(A_1) \arrow[d, "i_k"] \\ (SP(Z,a))^k \arrow[r, "q"] & SP(Z,a), \end{tikzcd}$$

де p – природне відображення A_1^k в $SP^k(A_1)$; $p(a_1, \dots, a_k) = [a_1, \dots, a_k]$; q – множення, $q(x_1, \dots, x_k) = x_1 \dots x_k$. Тоді неперервність відображення i_k випливає з відкритості відображення p.

Використовуючи техніку доведення теореми I з праці [2], відображення i нескладно модифікувати у вкладення $j: SP^k(A_1) \subset SP(Z,a)$ такого, що $j|SP^k(Z) = i|SP^k(Z) = id_{SP^k(Z)}$. При цьому можна прийняти $A_k = j(SP^k(A))$, оскільки $SP^k(A) \in ANR$ [3].

Остаточно маємо $SP(Z,a) = \lim\{A_k, i'_k\}$, де $i'_k: A_k \to A_{k+1}$ – природні вкладення. Умову $(*)$ з леми I для $SP(Z,a)$ знову ж таки перевіряємо з використанням техніки доведення теореми I з праці [2].

За лемою I одержуємо, що $SP(Z,a)$ – $\mathbb{R}^\infty$-многовид.

<u>Зауваження I</u>. З леми 2 випливає, що для побудованого простору Z $SP(Z,a) \cong \mathbb{R}^\infty$. Оскільки $SP(I,0) \cong \mathbb{R}^\infty$, то дістаємо приклад двох компактів, нескінченні симетричні добутки яких гомеоморфні й один з цих компактів локально стягуваний, а інший ні.

Аналогічні до наведених результатів наявні, якщо замінити $\mathbb{R}^\infty$-многовиди на Q^∞-многовиди, де Q^∞ – границя такої оберненої системи (Q – гільбертовий куб, $a \in Q$):

$$Q \to Q \times \{a\} \subset Q^2 \to Q^2 \times \{a\} \subset Q^3 \to \ldots$$

<u>Список літератури</u>: I. Борсук К. Теория ретрактов. – М.: Мир, I97I. – 292 с. 2. Заричный М.М. Свободные топологические группы абсолютных окрестностных ретрактов и бесконечномерные многообразия. – Докл. АН СССР, I982, т. 266, № 3, с. 54I–544. 3. Федорчук В.В. Ковариантные функторы в категории компактов, абсолютные ретракты и $\mathbb{R}^\infty$-многообразия. – Усп. мат. наук, I98I, т. 36, вып. 3, с. I77–I95. 4. Dold A., Thom R. Quasifaserungen und unendliche symmetrische Producten. – Ann. Math., Ser. 2 1958, bcin 67, №2, s. 239-281. 5. Heisey R.E. Stability, classification, open embeddings and triangulation of $\mathbb{R}^\infty$-manifolds. – In: Proc. Intern. Conf. on Geom. Topology. Warszawa, PWN, 1980, p. 541-544.

6. Heisey R.E., Toruńczyk H. On the topology of direct limits of ANR's. - Pacif. Journ. of Math., 1981, vol. 93, №2, p. 307-312.

Стаття надійшла до редколегії 05.03.83

УДК 513.6

В.І.Андрійчук

КОГОМОЛОГІЇ ГРУПИ КЛАСІВ ІДЕАЛІВ І УЗАГАЛЬНЕНИХ ЯКОБІАНІВ

Наша мета показати, що стандартні наслідки дуальності Тейта-Шафаревича [6] в еліптичних кривих, визначених над локальним полем, залишаються справедливими при заміні локального поля псевдолокальним, тобто повним відносно дискретного нормування полем k з псевдоскінченним [5] полем лишків $\varkappa$, $\operatorname{char} \varkappa \neq 2,3$.

Група головних однорідних просторів узагальнених якобіанів. Нехай A - еліптична крива, визначена над псевдолокальним полем k, A_k - група k-раціональних точок кривої A, $a_0 = \infty$ (нуль групи A_k), $a_1, \dots, a_n$ - $n+1$ різних точок з групи A_k; F - замикання в A_k підгрупи, породженої точками $a_1, \dots, a_n$, $\mathfrak{m}$ - додатний дивізор на A, $J_{\mathfrak{m}}$ - узагальнений якобіан [3] кривої A відносно $\mathfrak{m}$. Існує така теорема.

Теорема І. Якщо $\mathfrak{m}$ - дивізор виду $r_0 a_0 + r_1 a_1 + \dots + r_n a_n$ (всі $r_i > 0$), то існує невироджений зліва добуток

$$H^1(k, J_{\mathfrak{m}}) \times A_k/F \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$$

групи $H^1(k, J_{\mathfrak{m}})$ - головних однорідних просторів над $J_{\mathfrak{m}}$ і групи A_k/F.

Доведення. Позначимо через $\mathfrak{n}$ – дивізор $a_0+a_1+\ldots+a_n$ і через l/k – скінченне розширення Галуа поля констант k поля функцій $K=k(A)$ на кривій A. $\mathfrak{g}=Gal(l/k)$. Як відомо [4], $H^1(k,\dot{J}_m)\xrightarrow{\sim}H^1(k,\dot{J}_m)$, тому далі розглянемо групу $H^1(k,\dot{J}_\mathfrak{n})$ замість групи $H^1(k,\dot{J}_m)$. Покажемо [3], що наявна точна послідовність когомології Галуа

$$0\longrightarrow H^1(\mathfrak{g},\dot{J}_\mathfrak{n}(l))\longrightarrow H^1(\mathfrak{g},\dot{J}(l))\xrightarrow{\delta}H^2(\mathfrak{g},L_\mathfrak{n}(l)),\tag{I}$$

в якій $\mathfrak{g}$-модуль $\dot{J}_\mathfrak{n}(l)$ (відповідно $\dot{J}(l)$) природно ототожнюється з $\mathfrak{g}$-модулем класів раціональних над l дивізорів на A нульового степеня за модулем $\mathfrak{n}$ (відповідно 0) еквівалентності та $L_\mathfrak{n}(l)\xrightarrow{\sim}(l^*)^n$.

Наявна комутативна діаграма

$$\begin{array}{ccc} H^1(\mathfrak{g},\dot{J}(l)) & \xrightarrow{\delta} & H^2(\mathfrak{g},L_\mathfrak{n}(l)) \\ \Sigma^*\downarrow\wr & & i^*\downarrow\wr \\ H^1(\mathfrak{g},A_l) & \xrightarrow{\varphi} & (H^2(\mathfrak{g},l^*))^n, \end{array}$$

в якій Σ^* індукований додаванням на A, i^* індукований i, для $\alpha\in H^1(\mathfrak{g},A_l)$; $\varphi(\alpha)=(-(\alpha,a_1),\ldots,-(\alpha,a_n))$, де (α,a_i) – результат добутку за Тейтом-Шафаревичем класу α з $a_i\in A_k$.

Невиродженість зліва добутку Тейта-Шафаревича в еліптичних кривих над псевдолокальним полем [I] показує, що $Ker\,\delta=0$. Звідси випливає твердження теореми I.

Тривіальність одновимірних когомологій Галуа групи класів ідеалів еліптичної кривої. Зберігаємо позначення попереднього пункту. Крім того, через $L=l(A)$ позначимо поле раціональних над l функцій на A, $C(L)$ (відп. $C^0(L)$) – група класів ідеалів (відп. класів ідеалів степеня 0) поля L.

Теорема 2. $H^1(\mathcal{G}, C(L)) = 0$.

Доведення. Досить довести, що $H^1(\mathcal{G}, C^0(L)) = 0$. Позначимо через $C^0_\sigma(L)$ фактор-модуль $\mathcal{G}$-модуля $C^0(L)$ по образу гомоморфізму $\prod_p U_p(L) \to C^0(L)$, де p пробігає всі прості дивізори поля L, а $U_p(L)$ – група p – одиниць.

Розглянемо точну послідовність $\mathcal{G}$-модулів

$$0 \to E \to C^0(L) \to C_\sigma(L) \to 0. \tag{2}$$

Нехай Q – дивізор поля L, що відповідає точці $Q \in A_k$, а $U^1_Q(L)$ – підгрупа групи $U_Q(L)$, що складається з головних одиниць. Використовуючи праці [3, 6], показуємо, що має місце ізоморфізм

$$\Big(\prod_{p \neq Q} U_p(L)\Big) U^1_Q(L) \xrightarrow{\sim} E.$$

Нехай, крім того, ρ – ізоморфізм

$$\rho : H^2(\mathcal{G}, E) \xrightarrow{\sim} \Big[\prod_{x \in A_k,\, x \neq Q} H^2(\mathcal{G}, U_x(L)/U^1_x(L))\Big] \oplus Y,$$

де Y – деяка абелева група. Нагадаємо [3], що $H^1(\mathcal{G}, E) = 0$.

Отже, точній послідовності (2) відповідає точна послідовність когомологій Галуа

$$0 \to H^1(\mathcal{G}, C^0(L)) \to H^1(\mathcal{G}, C^0_\sigma(L)) \xrightarrow{\delta} H^2(\mathcal{G}, E). \tag{3}$$

Покажемо, що $Ker\, \delta = 0$, і теорема 2 буде доведена.

Нехай f – коцикл, що є представником нетривіального класу α групи $H^1(\mathcal{G}, A_\ell)$ і $b_i\ (i \in J)$ – система представників нетривіальних класів групи $H^0(\mathcal{G}, A_\ell)$. Виберемо точку $Q \in A_k$ так, щоб $Q, Q - b_i$ (дія на A) були відмінні від точок $\pm \sigma f(\tau), \infty$, де σ, τ – довільні елементи з групи $\mathcal{G}$. Такий вибір точки Q можливий, бо множина

$\{b_i\,(i\in\mathcal{J})\}\cup\{\pm\sigma f(\tau)\}$ перетинається з досить малою підгрупою Люти групи A_k лише по нескінченно віддаленій точці. Нехай

$$\pi_Q:\Big[\prod_{x\in A_k,\, x\neq Q} H^2(\mathcal{Y}, U_x(L)/U'_x(L))\Big]\oplus Y \longrightarrow (H^2(\mathcal{Y}, \ell^*))^{\mathcal{J}}$$

композиція проекції добутку на компоненти, відповідні точкам Q_i, $i\in\mathcal{J}$, при якій $\pi_Q(Y)=0$ та ізоморфізму

$$\prod_{i\in\mathcal{J}} H^2(\mathcal{Y}, U_{Q_i}(L)/U'_{Q_i}(L)) \xrightarrow{\sim} (H^2(\mathcal{Y}, \ell^*))^{\mathcal{J}}.$$

Перевіряємо, що наявна комутативна діаграма

$$\begin{array}{ccccc}
H^1(\mathcal{Y}, j(\ell)) & \xrightarrow{\omega} & H^1(\mathcal{Y}, C^0_\sigma(L)) & \xrightarrow{\delta} & H^2(\mathcal{Y}, E) \\
\Sigma^{n-1}\big\uparrow\wr & & & & \big\downarrow \pi_Q \\
H^1(\mathcal{Y}, A_\ell) & & \xrightarrow{\quad\lambda\quad} & & (H^2(\mathcal{Y}, \ell^*))^{\mathcal{J}},
\end{array}$$

де $\Sigma^{n-1}(\alpha)$ – клас $H^1(\mathcal{Y}, j(\ell))$. Представник його – коцикл, значення якого на $\sigma\in\mathcal{Y}$ – це клас лінійної еквівалентності дивізора $f(\sigma)-\infty$, ω індукований ізоморфізмом $j(\ell)\xrightarrow{\sim} C^0_\sigma(L)$; $\lambda(\alpha)=((\alpha, b_i)_{i\in\mathcal{J}})\in H^2(\mathcal{Y}, \ell^*)^{\mathcal{J}}$, (α, b_i) – результат добутку Тейта-Шафаревича класу $\alpha\in H^1(\mathcal{Y}, A_\ell)$ і класу $\beta\in H^0(\mathcal{Y}, A_\ell)$ з представником $b_i\in A_k$. Оскільки добуток Тейта-Шафаревича невироджений зліва для еліптичних кривих над псевдолокальним полем [I], то $Ker\,\lambda=0$, і отже, $Ker\,\delta=0$.

<u>Інтерпретація показника в термінах груп Брауера</u>. Нехай V – крива роду I над псевдолокальним полем k. Тоді V – головний однорідний простір для еліптичної кривої A, визначеної

над k. Нехай $k(V)$ – поле функцій на кривій V над k, k^* та $k(V)^*$ – мультиплікативні групи полів k та $k(V)$. $Br\,k$, $Br\,k(V)$ – групи Брауера полів k та $k(V)$.

Теорема 3. Ядро гомоморфізму $Br\,k \longrightarrow Br\,k(V)$, індукованого вкладенням $k^* \longrightarrow k(V)^*$, є циклічною групою, порядку, що дорівнює показнику V.

Доведення. Для доведення теореми потрібно використати міркування з праці [3] при доведенні відповідного факту у випадку локального поля k. При цьому потрібно використати рівність порядку і показника V [2] і невиродженість зліва добутку Тейта-Шафаревича в еліптичних кривих над псевдолокальним полем [1].

Висловлюємо щиру подяку О.М.Введенському за допомогу.

Список літератури: 1. Андрийчук В.И. Об эллиптических кривых над псевдолокальным полем. – Мат. сб., 1979, т. 110, № 1, с. 88-101. 2. Андрійчук В.І. Деякі питання, зв"язані з добутком Тейта-Шафаревича в еліптичних кривих над псевдолокальним полем. – У цьому ж Віснику, с. 74-78. 3. Введенський О.М. Показники еліптичних кривих, визначених над локальним полем. – Укр. мат. журн., 1971, т. 23, № 4, с. 33-45.
4. Серр Ж.-П. Алгебраические группы и поля классов. – М.: Мир. – 220 с. 5. Ax J. The elementary theory of finite fields. Ann. Math., 1968, vol. 80, N2, p. 231-245. 6. Tate J. WC-group over p-adic fields. – Sem. Bourbaki, 1956. – 24 p.

Стаття надійшла до редколегії 05.03.84

УДК 513.6

В.І.Андрійчук

ДЕЯКІ ПИТАННЯ, ЗВ"ЯЗАНІ З ДОБУТКОМ ТЕЙТА-ШАФАРЕВИЧА В ЕЛІПТИЧНИХ КРИВИХ НАД ПСЕВДОЛОКАЛЬНИМИ ПОЛЯМИ

Нехай A – еліптична крива, визначена над псевдолокальним полем k, тобто над повним відносно дискретного нормування полем k з псевдоскінченним, за Аксом [5], полем лишків $\varkappa$. Вважатимемо, що $\operatorname{char} \varkappa \neq 2,3$.

Взаємодія фільтрацій. У праці [2] визначені зростаюча фільтрація $(H^1(k,A))^n_2$, $n \in Z$, $n \geq -1$ групи головних однорідних просторів $H^1(k,A)$ еліптичної кривої A над загальним локальним полем k і спадна фільтрація A^n_k, $n \in Z$, $n \geq -1$ групи A_k - k – раціональних точок кривої A і доведена теорема про їх взаємодію при добутку Тейта-Шафаревича у випадку локального поля k, а для кривих з мультиплікативною редукцією й у випадку довільного загального локального поля k.

Доведемо аналог теореми про взаємодію фільтрацій для еліптичних кривих, визначених над псевдолокальним полем k.

Нехай $[(H^1(k,A))^*]^n$ – група характерів дискретної групи $H^1(k,A)$, тривіальних на підгрупі $(H^1(k,A))^n_2$,

$\omega_k : A_k \longrightarrow (H^1(k,A))^*$ – гомоморфізм, індукований добутком Тейта-Шафаревича. Існує така теорема.

Теорема I. $\omega_k(A^n_k) \subset [(H^1(k,A))^*]^n$ для всіх $n \in Z$, $n \geq -1$.

Доведення. Нехай ℓ/k – скінченне розширення Галуа поля k, A_ℓ – група ℓ – раціональних точок кривої A, $\mathcal{Y}$ – група Галуа розширення ℓ/k. Для $n \in Z$, $n \geq -1$ нехай $\mathcal{Y}^n$ – n підгрупа верхньої фільтрації [I] групи $\mathcal{Y}$.

Згідно з працею [2] досить показати, що для довільного скінченного розширення Галуа ℓ/k, для якого $\mathcal{Y}^n = \{1_\mathcal{Y}\}$, має місце $N_{\ell/k} A_\ell \supset A_k^n$ ($N_{\ell/k}$ - норменний гомоморфізм $\mathcal{Y}$ - модуля A_ℓ, $n \in \mathbb{Z}, n \geq -1$).

Нехай A - крива з невиродженою редукцією. При $n=-1$ доводити не потрібно. Якщо $n=0$, то розширення ℓ/k нерозгалужене. Отже (див. лему I [1]), тейтівські когомології $H^i(\mathcal{Y}, A_\ell)$ тривіальні. Зокрема, $H^0(\mathcal{Y}, A_\ell)=0$. Це означає, що $N_{\ell/k} A_\ell = A_k = A_k^0$, а для $n \geq 1$ твердження $N_{\ell/k} A_\ell \supset A_k^n$ доведено О.М.Введенським [2] в ситуації довільного загального локального поля k.

Доведення теореми I для кривих типу (B), за Нероном [8], редукується до доведення для кривих з мультиплікативною редукцією [2], але при доведенні рівності $N_{\ell/k} A_\ell^0 = A_k^0$ замість підрахунку кількості елементів в $Ker\, N_{\ell/k}$ потрібно в нашому випадку використати те, що $H^1(\mathcal{Y}, \lambda^*) = 0$ з огляду на теорему Гільберта-90 (λ^* - мультиплікативна група поля лишків поля ℓ).

Залишається зауважити, що кожна еліптична крива, визначена над полем k, k - ізоморфна кривій типу (a), (B) або (c) за Нероном, а в праці [2] показано, як редукувати доведення у випадку кривої типу (c) до випадку кривої типу (a) або типу (B).

Порядок і показник. Теорема 2. Нехай V - головний однорідний простір для еліптичної кривої A над псевдолокальним полем k. Тоді порядок V дорівнює його показнику.

Доведення. Використовуючи міркування С.Ліхтенбаума [7] і О.М.Введенського [5], розглянемо комутативну діаграму з точними стрічками та стовпчиками

$$\begin{tikzcd}
 & Br\,k \arrow[r, "1"] & Br\,k & \\
0 \arrow[r] & {[Pic_0(V)]^G} \arrow[r] \arrow[u, "\psi_1"] & {[Pic(V)]^G} \arrow[r] \arrow[u, "\psi_2"] & Z \\
0 \arrow[r] & {[Div_0(V)]^G} \arrow[r] \arrow[u] & {[Div(V)]^G} \arrow[r] \arrow[u] & Z \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

Тут $G = Gal(k_s/k)$ - група Галуа сепарабельного замикання k_s поля k, $Div(V)$ - група k_s - раціональних дивізорів на V, $Pic(V)$ - факторгрупа $Div(V)$ за модулем лінійної еквівалентності. $Div(V)$ і $Pic_0(V)$ - відповідні групи дивізорів нульового степеня. X^G - підмодуль G - інваріантних елементів G - модуля X. Гомоморфізми ψ_1 і ψ_2 визначені у праці [7]. Інші позначення та гомоморфізми стандартні.

Порядок (відп. показник) V дорівнює [7] індексу образу $[Pic(V)]^G$ (відп. $[Div(V)]^G$) в Z. Нехай порядок V дорівнює n. Тоді існує $D \in [Pic(V)]^G$ з $\deg D = n$. Рівність порядку і показника V випливає з двох фактів [7]

$$\psi_1([Pic_0(V)]^G) = \frac{1}{n} Z/Z, \tag{I}$$

$$\psi_2(D) \subset \frac{1}{n} Z/Z. \tag{2}$$

Доведемо (I). Нагадаємо [7], що $Im\,\psi_1$ - результат добутку Тейта-Шафаревича класу V з усією групою A_k, k - раціональних точок кривої A. Нехай $\psi_1([Pic_0(V)]^G) = \frac{1}{m} Z/Z$,

де m/n . Якщо $W = mV$ в $H^1(k,A)$, то $\psi_q([Pic_S(V)]^G) = 0$.
З невиродженості зліва добутку Тейта-Шафаревича [1] випливає, що $W = 0$ в $H^1(k,A)$. Отже, $m = n$.

Доведення (2) Ліхтенбаума [7] не використовує специфіки локальних полів і придатне для довільних загальних локальних полів.

Нетривіальність двовимірних когомологій Галуа і ядра справа в добутку Тейта-Шафаревича. Нехай $\mathcal{K}$ – псевдоскінченне поле, що містить як поле абсолютних чисел алгебраїчне замикання $\overline{\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}}$ простого поля $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ (відносно цієї можливості див. [2]). Нехай $k = \mathcal{K}((t))$ – поле формальних степеневих рядів від t з коефіцієнтами з поля $\mathcal{K}$.

Нехай $\mathfrak{A}$ – еліптична крива, Вейєрштрасове рівняння якої має своїми коефіцієнтами елементи з $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. Розглянемо криву A над k , Вейєрштрасове рівняння якої збігається з рівнянням для $\mathfrak{A}$. Тоді A – крива з невиродженою редукцією. $H^2(k,A)$ – група двовимірних когомологій Галуа для A над k .

Теорема 3. $H^2(k,A) \neq 0$.

Доведення. Нехай q – просте число, $q \neq p$, $n \in \mathbb{Z}$, $n \geq 1$, A' – редукція кривої A (тобто крива $\mathfrak{A}$, розглянута над $\mathcal{K}$). Група $A'_{\mathcal{K}}$ – $\mathcal{K}$ – раціональних точок кривої A' містить всі точки порядку q^n на A' . Справді,
$\mathfrak{A}_{q^n} \subset \mathfrak{A}_{\overline{\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}}} \subset A'_{\mathcal{K}}$. Оскільки $A'_{\mathcal{K}} \subset A_k$, то
${}_{q^n}(A_k) \simeq (\mathbb{Z}/q^n\mathbb{Z})^2$ з тривіальною дією операторів з $Gal(k_s/k)$.
Отже, для q – компоненти $H^2(k,A)$ маємо, використовуючи результати праці [7]

$$H^2(k,A)(q) = \varinjlim H^2(k, A_{q^n}) = \varinjlim H^2(k, (\mathbb{Z}/q^n\mathbb{Z})^2) \simeq (\mathbb{Q}_q/\mathbb{Z}_q)^2.$$

($\mathbb{Q}_q$ (відп. $\mathbb{Z}_q$) – група q – адичних (відп. цілих q – адичних) чисел).

Теорема 4. Ядро справа в добутку Тейта-Шафаревича в еліптичних кривих над псевдолокальними полями може бути нескінченним.

Доведення. Нехай A – крива, використана при доведенні теореми 3. Припустимо додатково, що інваріант Хассе редукції кривої A дорівнює нулю. Ядро справа містить підгрупу універсальних норм $D_k = \cap N_{\ell/k} A_\ell$ (перетин береться по всіх скінченних розширеннях Галуа ℓ/k). Нескладне обчислення показує, що група D_k містить у свою чергу групу $\mathfrak{A}_{\overline{\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}}}$, що й завершує доведення.

Автор висловлює подяку О.М.Введенському за постановку задач і допомогу при їх розв"язанні.

Список літератури: 1. Андрийчук В.И. Об эллиптических кривых над псевдолокальными полями. – Мат. сб., 1979, т. 110, № 1, с. 88-101. 2. Введенский О.Н. О локальных "полях классов" эллиптических кривых. Изв. АН СССР. Сер. мат., 1973, 37, с. 20-88. 3. Введенський О.М. Підгрупи норм у еліптичних кривих, визначених над локальним полем. – Укр. мат. журн., 1970, т. 20, № 4. Серр Ж.-П. Когомологии Галуа. – М.: Мир, 1968. – 235 с. 5. Ax J. The elementary theory of finite fields. – Ann. Math., 1968, 80, N2, p.245-255. 6. Artin E, Tate J. Class field theory. Harvard, 1961, - 175 p. 7. Lichtenbaum S. The period-index problem for elliptic curves. - Amer. J. Math, 1968, 90, N4, p.981-992. 8. Neron A. Modeles minimaux des varietes abeliennes sur les corps locaux et globaux. Publ. Math IHES, 1964, N21, p.341-356.

Стаття надійшла до редколегії 05.03.84

УДК 512.553

О.Л.Горбачук, В.О.Оніщук

ПРО КРУЧЕННЯ НАД НІВДОСКОНАЛИМИ КІЛЬЦЯМИ

У праці [I] для довільного ідеалу S дуо-кільця (кожний правий ідеал – двосторонній) будується S -кручення. Більш точно система ідеалів $\mathcal{E}_S = \{J, J+S = R$, де R -дуо-кільце, утворює радикальний фільтр [I] . У довільному кільці система правих ідеалів $\mathcal{E}_S$, взагалі кажучи, не є радикальним фільтром, причому ідеал S буває двостороннім. З іншого боку, для правого ідеалу S , який не є двостороннім, система правих ідеалів $\mathcal{E}_S$ може бути радикальним фільтром.

Розглянемо кільце верхніх трикутних матриць над полем P і приймемо

$$S_1 = \left\{\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, a, b \in P\right\} \text{ і } S_2 = \left\{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & c \end{pmatrix}, c \in P\right\}.$$

Для двостороннього ідеалу S_1 система правих ідеалів $\mathcal{E}_{S_1}$ не радикальний фільтр, оскільки містить найменший правий ідеал S_2, який не є двостороннім. А для правого ідеалу S , який не є двосторонній, система $\mathcal{E}_{S}$ – радикальний фільтр.

Вивчимо це питання для півдосконалого кільця. Нагадаємо, що кільця, в якому ідемпотенти піднімаються за модулем радикала Джекобсона, а фактор-кільце за радикалом класично півпросте, називаються півдосконалими.

Лема. Для довільного правого ідеалу S півдосконалого кільця система правих ідеалів $\mathcal{E}_S$ містить найменший правий ідеал.

Доведення. Враховуючи, що $\mathcal{E}_{S}$ не змінюється, коли до S приєднуються елементи з радикала $Rad\,R + J + S = R$

випливає, що $J+S=R$, а також те, що ідемпотенти піднімаються за модулем радикала, можна вважати $S=e_0 R$, де e_1 - ідемпотент. Отже, найменший елемент $\mathcal{E}_S$ збігається з правим ідеалом $(1-e_1)R$. З цього випливає, що $\mathcal{E}_S$ - радикальний фільтр тоді і тільки тоді, коли $(1-e_1)R$ -двосторонній ідеал. Цей радикальний фільтр містить найменший ідеал, а кручення, яке відповідає такому радикальному фільтру, називається радикально-півпростим.

Наслідок. S - кручення над півдосконалим кільцем - радикально-півпросте.

Теорема. Для довільного правого ідеалу S півдосконалого кільця R система правих ідеалів $\mathcal{E}_S$ радикальний фільтр тоді і тільки тоді, коли R - пряма сума (скінченна) локальних кілець.

Доведення. Враховуючи, що S -кручення над локальним кільцем тривіальне, можна довільний правий ідеал S замінити на пряму суму тих локальних кілець, які мають з ним ненульовий перетин, при цьому $\mathcal{E}_S$ не зміниться. Безпосередньо ясно, що $\mathcal{E}_S$ містить найменший ідемпотентний ідеал, тобто $\mathcal{E}_S$ - радикальний фільтр. В зворотний бік - нехай над півдосконалим кільцем система правих ідеалів $\mathcal{E}_S$ утворює радикальний фільтр для довільного правого ідеалу S. Враховуючи, що досконале кільце $R=e_1R\dotplus e_2R\dotplus\ldots\dotplus e_nR$ (модульна пряма сума), e_iRe_i - локальні кільця [2], для доведення теореми достатньо показати e_iR - двосторонні ідеали. Приймемо $S=(e_1+\ldots+e_{i-1}+e_{i+1}+\ldots+e_n)$ і розглянемо систему правих ідеалів $\mathcal{E}_S$, яка за умовою теореми утворює радикальний фільтр. Радикальний фільтр $\mathcal{E}_S$ містить найменший ідеал e_iR. Таким чином, пряма сума кільцева, e_iR - локальні кільця.

Список літератури: I. Горбачук О.Л., Комарницький М.Я. Про S - кручення в модулях. - Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат., 1977, вип. I2, с. 32-35. 2. Anderson F.W., Fuller K.R. Rings and categories of modules. New-York, e.a. Springer, 1974. - 339 c.

Стаття надійшла до редколегії I7.0I.83

УДК 5I2.553

О.Л.Горбачук, Н.М.Михаловська

ПРО АКСІОМАТИЗАЦІЮ КЛАСІВ АБЕЛЕВИХ ГРУП

У цій праці всюди під словом група розуміємо абелеву групу. Як основний критерій, використовуємо таку теорему [I, 3] .

Теорема. Клас абелевих груп аксіоматизований тоді і лише тоді, коли він замкнутий відносно переходу до елементарно еквівалентних груп і ультрадобутків.

Лема. Якщо деякий клас періодичних груп аксіоматизований, то порядки елементів в сукупності обмежені.

Доведення. Припустимо, що існують групи A_n (які можуть повторюватися), що містять елементи a_n, порядки яких більші n . Розглянемо фільтр Фреше множини натуральних чисел, який вкладається в ультрафільтр, а також фільтрований добуток груп A_n за цим ультрафільтром. Елемент фільтрованого добутку $(a_1, a_2, a_3, \dots a_n, \dots)$ не має скінченного порядку m , оскільки $ma_i = 0$ не виконується в групах A_i , для безмежного числа a_i . Припущення, що існують групи A_n , порядки елементів яких у сукупності необмежені, суперечить названій вище теоремі.

Теорема I. Клас груп без кручення, замкнутий відносно підгруп, аксіоматизований тоді і лише тоді, коли він складається з усіх груп без кручення.

Доведення. Позначимо через $\mathcal{K}$ - аксіоматизований клас, замкнутий відносно підгруп. Кожна група без кручення містить підгрупу цілих чисел Z . Оскільки клас $\mathcal{K}$ - аксіоматизований, то він замкнутий відносно ультрадобутків. Розглянемо ультрадобуток груп цілих чисел за фільтром Фреше. Одержаний ультрадобуток є групою без кручення, яка містить групу раціональних чисел Q . Беручи ультрадобуток одержаних груп, можна дістати пряму суму груп Q довільної потужності. Враховуючи, що довільна група без кручення є підгрупою, діленою без кручення, яка збігається з прямою сумою груп Q , а клас замкнутий відносно підгруп, одержуємо, що $\mathcal{K}$ містить всі абелеві групи без кручення.

Очевидно, що всі групи без кручення аксіоматизовані.

Теорема 2. Клас періодичних груп, замкнутий відносно прямих сум і фактор-груп, аксіоматизований тоді і лише тоді, коли це клас груп, що анулюються деяким числом m .

Доведення. Скористаємось наведеною вище лемою, а також теоремою Прюфера [2] .

З огляду на лему всі елементи груп класу анулюються деяким числом $n < m!$, де m - число, що обмежує порядки елементів груп класу. За першою теоремою Прюфера та теоремою про розклад періодичної групи в пряму суму примарних, кожна група класу розкладається в пряму суму циклічних. Враховуючи замкнутість класу відносно фактор-груп, класу належать всі циклічні групи Z_k , де k/n . А виходячи з замкнутості класу відносно прямих сум, всі групи, що анулюються числом n , належать класу, оскільки вони розкладаються в пряму суму циклічних.

Доведення у зворотний бік очевидне.

Список літератури: I. К е й с л е р Г., Ч е н. Теория моделей. - М.: Мир, 1977. - 614 с. 2. К у р о ш А.Г. Теория групп. - М.: Наука, 1967. - 648 с. 3. М а л ь ц е в А.И. Алгебраические системы. - м.: наука, 1970. - 392 с.

Стаття надійшла до редколегії 25.10.83

УДК 514

С.В.Дениско

ПРО ОДНЕ ВІДОБРАЖЕННЯ КРИВИХ

Нехай взаємнооднозначне відображення однієї кривої на другу задовольняє умову

$$\sigma = m\sigma^{*}, \tag{I}$$

де $m = const$; σ – довжина довільної дуги першої кривої; σ^{*} – довжина образу цієї дуги. Таке відображення для зручності назвемо відображенням S.

Відображення S - еліпсів, яке здійснюється за допомогою механізму, розглянуто у праці [3].

Нехай криві (Δ) і (Δ^{*}) розміщені у площинах (на положення цих площин у просторі ніяких обмежень не накладається). Полярні рівняння кривих (Δ), (Δ^{*}) мають відповідно вигляд

$$\rho = \rho(\varphi), \qquad \rho^{*} = \rho^{*}(k\varphi),$$

де $k = const$; φ і $k\varphi$ – полярні кути; ρ і ρ^{*} – полярні радіуси. Відображення кривої (Δ) на криву (Δ^{*}), для якого відповідні точки мають одне і те ж значення φ, називатимемо відображенням T.

З огляду на (I), для того щоб відображення T було також відображенням S, необхідно і достатньо

$$\left(\frac{d\rho}{d\varphi}\right)^{2} + \rho^{2} = m^{2}\left[\left(\frac{d\rho^{*}}{d\varphi}\right)^{2} + k^{2}\rho^{*2}\right].$$

Звідси випливають теореми.

<u>Теорема I</u>. Нехай криві (Δ) і (Δ^{*}) є равликами Паскаля [I], полярні рівняння яких мають вигляд

$$\rho = a\cos\varphi \pm b, \quad \rho^* = a^*\cos k\varphi \pm b^*, \tag{2}$$

де a, b, a^*, b^* – додатні сталі.

Для того щоб у цьому випадку відображення T кривої (Δ) на криву (Δ^*) було відображенням S, необхідно і достатньо $a = ma^*$, $b = mb^*$ (або $2a = mb^*$, $b = 2ma^*$), $k = \pm 1$. Перед b і b^* в формулах (2) вибирали однакові знаки.

Теорема 2. Нехай криві (Δ), (Δ^*) – конхоїди Слюса [I], полярні рівняння яких мають вигляд

$$\rho = \frac{a}{\cos\varphi} + \frac{b^2}{a}\cos\varphi, \quad \rho^* = \frac{a^*}{\cos k\varphi} + \frac{b^{*2}}{a^*}\cos k\varphi,$$

де a, b, a^*, b^* – додатні сталі.

Тоді відображення T кривої (Δ) на криву (Δ^*) є відображенням S в тому і тільки тому випадку, коли $a = ma^*$, $b = mb^*$, $k = \pm 1$.

Теорема 3. Нехай криві (Δ), (Δ^*) – конхоїди Нікомеда [I], полярні рівняння яких мають вигляд

$$\rho = \frac{a}{\sin\varphi} \pm b, \quad \rho^* = \frac{a^*}{\sin k\varphi} \pm b^*, \tag{3}$$

де a, b, a^*, b^* – додатні сталі.

Тоді відображення T кривої (Δ) на криву (Δ^*) є відображенням S тоді і тільки тоді, коли $a = ma^*$, $b = mb^*$, $k = 1$, в формулах (3) перед b і b^* обирають однакові знаки або, коли $a = ma^*$, $b = mb^*$, $k = -1$, а в формулах (3) перед b і b^* – протилежні знаки.

Теорема 4. Нехай криві (Δ), (Δ^*) – циссоїди Діоклеса [I], полярні рівняння яких мають вигляд

$$\rho = \frac{a}{\cos^3\varphi}, \quad \rho^* = \frac{a^*}{\cos^3 k\varphi},$$

де a, a^* – додатні сталі.

У такому випадку відображення T кривої (Δ) на криву (Δ^*) є відображенням S тоді і тільки тоді, коли $a = ma^*$; $k = \pm 1$.

Теорема 5. Нехай криві (Δ), (Δ^*) – трисектриси Маклорена [I], полярні рівняння яких мають вигляд

$$\rho = -a\,\frac{1-4\cos^2\varphi}{\cos\varphi}, \quad \rho = -a^*\,\frac{1-4\cos^2 k\varphi}{\cos k\varphi},$$

де a, a^* – додатні сталі.

Тоді відображення T кривої (Δ) на криву (Δ^*) – це відображення S тоді і тільки тоді, коли $a = ma^*$, $k = \pm 1$.

Теорема 6. Нехай криві (Δ), (Δ^*) – кубічні дублікатриси [I], полярні рівняння яких мають вигляд $\rho = \dfrac{a}{\cos^3\varphi}$,

$$\rho^* = \frac{a^*}{\cos^3 k\varphi},$$

де a, a^* – додатні сталі.

Тоді відображення T кривої (Δ) на криву (Δ^*) є відображенням S тоді і тільки тоді, коли $a = ma^*$, $k = \pm 1$.

Зауваження I. Розглянуті в теоремах I–6 відображення T можна здійснити за допомогою механізмів з праць [I, 2].

Зауваження 2. Кожне відображення T в теоремах 2–6, яке є також відображенням S, можна одержати подібним відображенням площини кривої (Δ) на площину кривої (Δ^*) або послідовним виконанням подібного відображення площини кривої (Δ) на площину кривої (Δ^*) і відображенням відносно осі симетрії кривої (Δ^*)

Список літератури: I. Артоболевский И.И. Теория механизмов для воспроизведения плоских кривых. – М.: Изд-во АН СССР, 1959. – 25I с. 2. Артоболевский И.И. Теория механизмов. – 3-е изд., перераб. и доп. – М.: Наука, 1975. – 256 с. 3. Дениско С.В. Механізми для відтворення спеціальних відображень еліпсів. – Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат., 1975, вип. IO, с. 28–3I.

Стаття надійшла до редколегії 25.10.83

УДК 514

С.В.Дениско, С.І.Кубів

ПРО ВІДТВОРЕННЯ ЗА ДОПОМОГОЮ МЕХАНІЗМІВ ДЕЯКИХ РОЗГОРТНИХ ПОВЕРХОНЬ, ДЛЯ КОЖНОЇ З ЯКИХ НАПРЯМНИМИ Є ДВА КОЛА

Нехай пряма M_1M_2 проходить через кінці (точки M_1, M_2) радіусів двох кіл Γ_1, Γ_2, розміщених у площинах α_1, α_2, а точки O_1, O_2 – центри кіл Γ_1, Γ_2.

Радіус O_1M_1 повертається навколо точки O_1 у площині α_1, а радіус O_2M_2 навколо точки O_2 в площині α_2 так, що відношення кута повороту одного радіуса до кута повороту другого – величина стала. При цьому пряма M_1M_2 відтворюватиме лінійчасту поверхню, яку для зручності назвемо поверхнею Σ. Вказане відтворення поверхні Σ можна реалізувати за допомогою механізму [1].

Для того щоб поверхня Σ була розгортною, необхідно та достатньо, щоб виконувалась така умова:

$$
\begin{aligned}
&(b_1^3a^2 - b_1^2a^3)\sin\varphi\sin k\varphi + (b_2^2a^3 - b_2^3a^2)\times \\
&\times\cos k\varphi\sin\varphi + (b_1^3a^1 - b_1^1a^3)\sin k\varphi\cos k\varphi + \\
&+ (b_2^1a^3 - b_2^3a_1)\cos k\varphi\cos\varphi + R_2(b_1^3b_2^2 - \\
&- b_2^3b_1^2)\sin\varphi + R_2(b_2^1b_1^3 - b_1^1b_2^3)\cos\varphi + \\
&+ R_1b_2^3\cos k\varphi - R_1b_1^3\sin k\varphi = 0,
\end{aligned}
\qquad (1)
$$

де R_1, R_2 – радіуси кіл Γ_1, Γ_2; φ, $k\varphi$ – кути повороту радіусів O_1M_1, O_2M_2; a^i – коефіцієнти розкладу $\overline{O_1O_2}=\sum_{i=1}^{3} a^i \bar{e}_i$ ($\bar{e}_1$, $\bar{e}_2$ належать площині α_1, причому $\bar{e}_i\bar{e}_j=\delta_{ij}$, $\overline{O_1M_1}=\bar{e}_1\cos\varphi+\bar{e}_2\sin\varphi$); b_j^i – коефіцієнти розкладу $\bar{e}'_j=\sum_{i=1}^{3} b_j^i\bar{e}_i$ $(j=1,2)$; $\bar{e}'_1$, $\bar{e}'_2$ належать площині α_2, $\bar{e}'_i\bar{e}'_j=\delta_{ij}$, $\overline{O_2M_2}=\bar{e}'_1\cos k\varphi+$ $+\bar{e}'_2\sin k\varphi$.

Про розгортні поверхні Σ для випадку, коли $b_1^3=b_2^3=0$, йшлося у статті [2].

Знайдемо розгортні поверхні Σ для таких двох випадків:

$$b_1^1=1,\ b_1^2=b_1^3=0,\ b_2^3\neq 0 \tag{2}$$

і

$$b_1^1=-1,\ b_1^2=b_1^3=0,\ b_2^3\neq 0. \tag{3}$$

В обох випадках беручи до уваги (I), наявна система рівностей:

$$a^1+R_1-R_2=0,$$

$$-\left(\frac{k^2}{2!}+\frac{1}{2!}\right)a^1-\frac{k^2}{2!}R_1+\frac{1}{2!}R_2=0,$$

$$\left(\frac{k^4}{4!}+\frac{k^2}{2!2!}+\frac{1}{4!}\right)a^1+\frac{k^4}{4!}R_1-\frac{1}{4!}R_2=0.$$

Звідси випливає, що

$$k=1 \tag{4}$$

або

$$k=-1. \tag{5}$$

Отже, умова (I) має вигляд

$$(a_3b_2^2-a^2b_2^3-ka^3b_1^1)\sin\varphi\cos\varphi-a_1b_2^3\cos^2\varphi+$$
$$+b_2^3(R_1-R_2b_1^1)\cos\varphi=0,$$

де $k=\pm 1$, $b_1^1=\pm 1$. Вона рівносильна системі

$$a^3 b_2^2 - a^2 b_2^3 - k a^3 b_1^1 = 0, \qquad (6)$$

$$a^1 = 0, \qquad (7)$$

$$R_1 - R_2 b_1^1 = 0. \qquad (8)$$

З рівності (8) видно, що у випадку (3) розгортних поверхонь Σ не існує. З цієї ж рівності для (2) маємо $R_1 = R_2$. У цьому ж випадку (6) набирає вигляду

$$a_3 b_2^2 - a^2 b_2^3 - k a^3 = 0. \qquad (9)$$

Беручи до уваги (7) та (9), остаточно приходимо до таких висновків щодо існування розгортних поверхонь Σ у випадку (2).

Якщо для (4) і (5) вектор $\bar{e}_2'$ один і той же, то поверхня Σ у кожному з цих випадків розгортна тоді і тільки тоді, коли центри кіл Γ_1, Γ_2, радіуси яких рівні, суміщаються. При цьому існують дві розгортні поверхні Σ (еліптичні циліндри), лініями перетину яких є кола Γ_1, Γ_2.

Якщо ж відмовитись від названого обмеження на вектор $\bar{e}_2'$, то, як у випадку (4), так і в (5), поверхня Σ розгортна тоді і тільки тоді, коли пряма O_1O_2 перпендикулярна вектору $\bar{e}_1$, коло Γ_1 симетричне колу Γ_2 відносно площини $\mathcal{P}$, яка проходить через середину відрізка O_1O_2, перпендикулярно до нього. Причому у випадку (4) вектор $\bar{e}_2'$ має бути симетричним вектору $\bar{e}_2$, відносно площини $\mathcal{P}$, а у випадку (5) вектор $\bar{e}_2'$ симетричний вектору $-\bar{e}_2$ відносно тієї ж самої площини.

Очевидно, в обох випадках (4) і (5) відтворюється одна і та ж розгортна поверхня Σ (еліптичний циліндр, твірні якого паралельні прямій O_1O_2).

Список літератури: 1. Артоболевский И.И. Теория механизмов и машин. – М.: Наука, 1975. – 251 с. 2. Д е-

Н и с к о С.В. Про деякі способи відтворення розгортних поверхонь. - Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат., 1982, вип. 20, с. 83-86.

Стаття надійшла до редколегії 08.02.84

УДК 519.21

І.Д.Квіт, В.М.Косарчин

ДВОВИМІРНЕ ВІДБИТТЯ

Узагальнимо основні результати статті [1] на двовимірний випадок.

Нехай додатний випадковий вектор (ξ, η) має функцію розподілу ймовірностей $\mathcal{F}(x, y)$. Відбиттям вектора (ξ, η) називаємо сподівання випадкової змінної $\xi^{z_1-1}\eta^{z_2-1}$, де z_1 та z_2 - комплексні параметри. Двовимірне відбиття $\varphi(z_1, z_2)$ існує, якщо існують додатні сталі $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ такі, що інтеграл

$$\varphi(z_1, z_2) = E(\xi^{z_1-1}\eta^{z_2-1}) = \int_0^\infty\int_0^\infty x^{z_1-1} y^{z_2-1} d\mathcal{F}(x, y) \tag{1}$$

абсолютно збігається в області

$$1-\alpha < Re\, z_1 < 1+\beta, \quad 1-\gamma < Re\, z_2 < 1+\delta. \tag{2}$$

Аналогічно до того, як в одновимірному випадку за допомогою інтервального обмежника виводиться зворотна формула та згодом доводиться теорема єдиності, так у випадку існування відбиття (1) в області (2) за допомогою прямокутного обмежника виводиться двовимірна зворотна формула та доводиться відповідна теорема єдиності. Відбиття (1) в області (2) однозначно визначає свою функцію розподілу $\mathcal{F}(x, y)$, причому

$$\mathcal{F}(x,y)=\frac{1}{(2\pi i)^2}\int\limits_{h-i\infty}^{h+i\infty}\int\limits_{k-i\infty}^{k+i\infty}\frac{(x+0)^{1-z_1}}{1-z_1}\,\frac{(y+0)^{1-z_2}}{1-z_2}\,\varphi(z_1,z_2)\,dz_2\,dz_1,$$

$$\max(0,1-\alpha)<h<1,\ \max(0,1-\gamma)<k<1,\ x>0,\ y>0. \qquad (3)$$

Якщо додатний випадковий вектор (ξ,η) абсолютно неперервний з густиною $p(x,y)=\dfrac{\partial^2\mathcal{F}(x,y)}{\partial x\,\partial y}$, то замість формул (I) і (3) маємо

$$\varphi(z_1,z_2)=\int\limits_0^\infty\int\limits_0^\infty x^{z_1-1}y^{z_2-1}p(x,y)\,dx\,dy$$

$$1-\alpha<\operatorname{Re}z_1<1+\beta,\quad 1-\gamma<\operatorname{Re}z_2<1+\delta \qquad (4)$$

та

$$p(x,y)=\frac{1}{(2\pi i)^2}\int\limits_{h-i\infty}^{h+i\infty}\int\limits_{k-i\infty}^{k+i\infty}x^{-z_1}y^{-z_2}\varphi(z_1,z_2)\,dz_2\,dz_1$$

$$\max(0,1-\alpha)<h<1,\ \max(0,1-\gamma)<k<1,\ x>0,\ y>0. \qquad (5)$$

Відбиття (I) не лише однозначно визначає відповідний розподіл ймовірностей, але також дає змогу швидко обчислити існуючі числові характеристики випадкового вектора. Наприклад, якщо нас цікавлять сподівання та дисперсії компонент, коваріація та кореляція між компонентами, то беремо до уваги

$$\varphi(2,1),\ \varphi(1,2),\ \varphi(2,2),\ \varphi(3,1),\ \varphi(1,3) \qquad (6)$$

і маємо відповідно

$$E\xi=\varphi(2,1),\ E\eta=\varphi(1,2),\ D\xi=\varphi(3,1)-\varphi^2(2,1),\ D\eta=\varphi(1,3)-\varphi^2(1,2),$$

$$cov(\xi,\eta)=\varphi(2,2)-\varphi(1,2)\varphi(2,1),\ \rho(\xi,\eta)=\frac{cov(\xi,\eta)}{\sqrt{D\xi}\sqrt{D\eta}}. \tag{7}$$

Для ілюстрації наведених формул розглянемо приклади.

Нехай

$$\mathcal{F}(x,y)=1-\frac{1}{1+x}-\frac{1}{1+y}+\frac{1}{1+x+y},\ x>0,\ y>0.$$

Тоді за формулою (I)

$$\varphi(z_1,z_2)=\Gamma(z_1)\Gamma(z_2)\Gamma(3-z_1-z_2),$$

$$0<Re\,z_1,\ 0<Re\,z_2,\ Re\,z_1+Re\,z_2<3.$$

Нехай

$$\varphi(z_1,z_2)=\Gamma(z_1)\Gamma(z_2),\ 0<Re\,z_1,\ 0<Re\,z_2.$$

Тоді за формулою (3) і теорією залишків дістаємо

$$\mathcal{F}(x,y)=(1-e^{-x})(1-e^{-y}),\ x>0,\ y>0.$$

Двовимірний вектор Фішера з густиною

$$p(x,y)=\Gamma\left(\frac{k+m+n}{2}\right)n^{-\frac{k+m+n}{2}}\cdot\frac{k^{\frac{k}{2}}}{\Gamma(\frac{k}{2})}\cdot\frac{m^{\frac{m}{2}}}{\Gamma(\frac{m}{2})}\cdot\frac{n^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2})}\times$$

$$\times\frac{x^{\frac{k}{2}-1}\,y^{\frac{m}{2}-1}}{\left(1+\frac{k}{n}x+\frac{m}{n}y\right)^{\frac{k+m+n}{2}}},$$

$$x>0,\ y>0;\ k,m,n=1,2,\dots,$$

за формулою (4) має відбиття

$$\varphi(z_1,z_2)=\left(\frac{n}{k}\right)^{z_1-1}\left(\frac{n}{m}\right)^{z_2-1}\cdot\frac{\Gamma\left(\frac{k}{2}+z_1-1\right)}{\Gamma(\frac{k}{2})}\cdot\frac{\Gamma\left(\frac{m}{2}+z_2-1\right)}{\Gamma(\frac{m}{2})}\times$$

$$\times\frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}+2-z_1-z_2\right)}{\Gamma(\frac{n}{2})},$$

$$1-\frac{k}{2} < Re z_1,\ 1-\frac{m}{2} < Re z_2,\ Re z_1 + Re z_2 < 2+\frac{n}{2}.$$

Двовимірне відбиття

$$\varphi(z_1,z_2)=a^{2-z_1-z_2}\cdot\frac{\Gamma(z_1+b-1)\,\Gamma(z_1+z_2+b+c-2)}{\Gamma(b)\,\Gamma(z_1+b+c-1)},$$

$$(a>0,\ b>0,\ c>0),\ 1-b<Re z_1,\ 1-c<Re z_2$$

за формулою (5) переходить у густину двовимірного гамма-вектора

$$p(x,y)=\frac{a^{b+c}}{\Gamma(b)\Gamma(c)}x^{b-1}(y-x)^{c-1}e^{-ay},$$

$$0<x<y,\quad a>0,\ b>0,\ c>0.$$

Двовимірний бета-вектор з густиною

$$p(x,y)=\frac{\Gamma(a+b+c)}{\Gamma(a)\Gamma(b)\Gamma(c)}x^{a-1}y^{b-1}(1-x-y)^{c-1},$$

$$0<x,\ 0<y,\ x+y\le 1;\ a>0,\ b>0,\ c>0$$

має відбиття

$$\varphi(z_1,z_2)=\frac{\Gamma(a+z_1-1)}{\Gamma(a)}\cdot\frac{\Gamma(b+z_2-1)}{\Gamma(b)}\cdot\frac{\Gamma(a+b+c)}{\Gamma(a+b+c+z_1+z_2-2)},$$

$$1-a<Re z_1,\ 1-b<Re z_2.$$

Звідси, знайшовши вирази (6), за формулами (7) одержуємо

$$E\xi = \frac{a}{A},\ E\eta = \frac{b}{A},\ D\xi = \frac{a(b+c)}{A^2(A+1)},\ D\eta = \frac{b(a+c)}{A^2(A+1)},$$

$$\mathrm{cov}(\xi,\eta) = -\frac{ab}{A^2(A+1)},\ \rho(\xi,\eta) = -\sqrt{\frac{ab}{(a+c)(b+c)}},$$

де $A = a+b+c$. Відзначимо, що кореляція між компонентами бета-вектора завжди від"ємна. Двовимірні густини Фішера, гамма та бета описані в праці [2].

Список літератури: I. К в і т І.Д. Зворотна формула для відбиття. - Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат., 1978, вип. 13, с. 47-52. 2. Mardia K.V. Families of bivariate distributions. London, 1970.- 109 p.

Стаття надійшла до редколегії 24.01.83

УДК 517.917

Л.М.Лісевич

ПРО ОДНУ ДОСТАТНЮ УМОВУ ІСНУВАННЯ ОБМЕЖЕНОГО ТА МАЙЖЕ ПЕРІОДИЧНОГО РОЗВ"ЯЗКУ ЛІНІЙНОГО ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОГО РІВНЯННЯ ДРУГОГО ПОРЯДКУ

У цій статті продовжуємо дослідження достатніх умов існування обмеженого та майже періодичного розв"язку (м.п.) рівняння

$$y'' = \varphi(x)y + \psi(x)y' + \omega(x). \tag{I}$$

Одна така достатня умова доведена у праці [2]. Вкажемо ще одну достатню умову існування обмеженого і м.п. розв"язку рівняння (I), доведення якої грунтується на одній теоремі у праці [2]. Сформулюємо цю теорему.

Теорема I. Нехай у рівнянні

$$y'' = f(x)y + g(x): \tag{2}$$

I) $f(x)$ – неперервна на всій дійсній осі функція, причому

$$0<\alpha^2<f(x)<\beta^2;$$

2) $g(x)$ – S^p – сумовна функція $(p\geq 1)$ з обмеженим інтегралом

$$G(x)=\int_0^x g(t)dt, \quad x\in J=]-\infty,+\infty[. \tag{3}$$

Тоді існує обмежений розв"язок рівняння (2), для якого

$$\sup_{x\in J}|y(x)|\leq \frac{2|\beta|\sup_{x\in J}|G(x)|}{\alpha^2}. \tag{4}$$

Якщо, крім того, $f(x)$ – м.п. функція Бора, а $g(x)$ – S^p – м.п. функція, то цей розв"язок – м.п. функція Бора.

<u>Теорема 2</u>. Нехай у рівнянні (I):

I) $\varphi(x)$ – неперервна функція на всій дійсній осі;

2) $\psi(x)$ – неперервно диференційовна функція, для якої

$$|\Psi(x)|=\left|\int_0^x \psi(t)dt\right|<+\infty, \quad x\in J;$$

3) $0<\alpha^2<\varphi(x)+\frac{1}{4}\psi^2(x)-\frac{1}{2}\psi'(x)<\beta^2;$

4) $|\Omega(x)|=\left|\int_0^x \omega(t)dt\right|<+\infty, \quad x\in J.$

Тоді існує обмежений розв"язок рівняння (I), для якого

$$\sup_{x\in J}|y(x)|\leq \frac{2|\beta|\sup_{x\in J}|\Omega(x)|}{\alpha^2}. \tag{5}$$

<u>Доведення</u>. Приймемо

$$u(x)=y(x)\exp\left(-\frac{1}{2}\Psi(x)\right). \tag{6}$$

Тоді, виходячи з (I), отримуємо

$$u''=\left(\varphi(x)+\frac{1}{4}\psi^2(x)-\frac{1}{2}\psi'(x)\right)u+\omega(x)\exp\left(-\frac{1}{2}\Psi(x)\right). \tag{7}$$

Співвідношення (7) є рівнянням виду (2), причому коефіцієнт при u задовольняє умову I) теореми I, а вільний член – умову

2) цієї теореми. Отже, існує обмежений розв"язок рівняння (7), для якого

$$\sup_{x\in J}|u(x)| \le \frac{2|\beta|}{\alpha^2}\sup_{x\in J}\left|\int_0^x \omega(t)\exp\left(-\frac{1}{2}\psi(t)\right)dt\right|.$$

Але $y(x)=u(x)\exp\left(\frac{1}{2}\psi(x)\right)$. Тоді

$$\sup_{x\in J}|y(x)|=\sup_{x\in J}|u(x)|\exp\left(\frac{1}{2}\psi(x)\right)\le$$

$$\le\frac{2|\beta|}{\alpha^2}\sup_{x\in J}\left|\int_0^x\omega(t)\exp\left(-\frac{1}{2}\psi(t)\right)dt\right|\exp\left(\frac{1}{2}\psi(x)\right)\le$$

$$\le\frac{2|\beta|\sup_{x\in J}|\Omega(x)|}{\alpha^2}, \tag{8}$$

що й треба було довести.

Теорема 3. Нехай у рівнянні (1) $\varphi(x)$, $\psi(x)$, $\psi'(x)$ – м.п. функції Бора, які задовольняють умови I) – 3) теореми 2, $\omega(x)$ – S^p – м.п. функція, що задовольняє умову 4) цієї теореми. Тоді існує обмежений і м.п. за Бором розв"язок рівняння (I).

Доведення. Існування обмеженого розв"язку безпосередньо випливає з теореми 2. Доведемо його м.п. за Бором. Функція $f(x)=\varphi(x)+t\psi^2(x)-\frac{1}{2}\psi'(x)$ м.п. функція Бора, а

$$g(x)=\omega(x)\exp\left(-\frac{1}{2}\psi(x)\right),$$

S^p – м.п. функція, причому

$$|G(x)|=\left|\int_0^x g(t)dt\right|<+\infty,\ x\in J.$$

Тоді за теоремою I обмежений розв"язок $u(x)$ рівняння (7) м.п. функція Бора. Але

$$y(x)=u(x)\exp\left(\frac{1}{2}\psi(x)\right).$$

За умовою функція $\psi(x)$ обмежена і за відомою теоремою Бора вона м.п. за Бором, а функція $\exp(\frac{1}{2}\psi(x))$ м.п. за Бором як суперпозиція неперервної і м.п. за Бором функція. Тоді $y(x)$ м.п. за Бором функція, як добуток двох м.п. за Бором функцій. Теорема доведена.

Список літератури: 1. Л і с е в и ч Л.М., К о с т ю к Я.П. Про майже періодичність розв"язків деяких звичайних диференціальних рівнянь другого порядку з S^p – майже періодичною правою частиною. – Доп. АН УРСР. Сер. А, 1971, № 1, с. 25-26.
2. Л і с е в и ч Л.М. Деякі достатні умови існування обмеженого і майже періодичного розв"язку одного лінійного диференціального рівняння другого порядку. – Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат., 1981, вип. 18, с. 93-97.

Стаття надійшла до редколегії 21.05.84

УДК 536.12

Б.В.Ковальчук, Я.М.Середа

ДВОВИМІРНА ЗАДАЧА ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ ТІЛ З ТОНКИМ ВКЛЮЧЕННЯМ

Розглянемо шар товщиною l, в якому на відстані $z_1 - d$ від граничної поверхні $z=0$ розміщено чужорідне включення товщиною $2d$. На поверхнях $z=0$, $z=l$ шару задані температури як періодичні функції координати x і гармонічні функції часу τ, тобто

$$t\Big|_{z=0} = t_0 \cos\omega x\, e^{i\beta\tau}, \quad t\Big|_{z=l} = t_l \cos\omega x\, e^{i\beta\tau}, \tag{1}$$

де ω, β – сталі величини.

Коефіцієнти теплопровідності й об"ємної теплоємності даного кусково-однорідного тіла як єдиного цілого подаємо у вигляді

$$\lambda(z) = \lambda_1 + (\lambda_0 - \lambda_1) N(z), \quad C(z) = C_1 + (C_0 - C_1) N(z), \tag{2}$$

де λ_1, C_1 і λ_0, C_0 – коефіцієнти теплопровідності й об"ємної теплоємності основного матеріалу і включення;

$$N(z) = S_-(z - z_1 + d) - S_+(z - z_1 - d);$$

$$S_\pm(\zeta) = \begin{cases} 1, & \zeta > 0, \\ 0{,}5 \mp 0{,}5 & \zeta = 0, \\ 0, & \zeta < 0. \end{cases}$$

Підставивши (2) у рівняння теплопровідності неоднорідного тіла [1]

$$\lambda(z)\frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial z}\left[\lambda(z)\frac{\partial t}{\partial z}\right] = C(z)\dot{t}, \tag{3}$$

одержимо

$$\lambda_1 \Delta t + (\lambda_0 - \lambda_1)\left\{\frac{\partial}{\partial z}\left[N(z)\frac{\partial t}{\partial z} + N(z)\frac{\partial^2 t}{\partial x^2}\right\} = C_1\dot{t} + (C_0 - C_1)N(z)\dot{t}, \tag{4}$$

де

$$\dot{t} = \frac{\partial t}{\partial \tau},\ \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$ – оператор Лапласа.

Оскільки включення тонке, то, враховуючи співвідношення [2]

$$\lim_{d \to 0} \frac{N(z)}{2d} = \delta(z - z_1), \tag{5}$$

замість (4) маємо

$$\Delta t - \frac{\dot{t}}{a} = -\frac{\Lambda_0}{2\lambda_1}(1 - K_\lambda)\left[2\frac{\partial^2 t}{\partial x^2}\bigg|_{z_1}\delta(z - z_1) + \right.$$

$$\left. + \left(\frac{\partial t}{\partial z}\bigg|_{z_1+0} + \frac{\partial t}{\partial z}\bigg|_{z_1-0}\right)\delta'(z - z_1)\right] + \frac{C_0}{2\lambda_1}(1 - K_c)\dot{t}\big|_{z_1}\delta(z - z_1), \tag{6}$$

де $K_\lambda = \frac{\lambda_1}{\lambda_0}$, $K_c = \frac{C_1}{C_0}$, $a = \frac{\lambda_1}{C_1}$ – коефіцієнти теплопровідності основного матеріалу; $\Lambda_0 = 2\lambda_0 d$, $C_0 = 2C_0 d$ – зведені теплопровідність і теплоємність включення; $\delta(\zeta)$ – дельта-функція Дірака, $\delta'(z) = \frac{d\delta(\zeta)}{d\zeta}$.

Розв"язок рівняння (6) шукаємо у вигляді

$$t = \theta e^{i\beta\tau}. \tag{7}$$

Тоді для визначення функції θ маємо таке рівняння

$$\Delta\theta - \frac{i\beta}{a}\theta = -\frac{\Lambda_0}{2\lambda_1}(1-K_\lambda)\Big[2\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2}\Big|_{z_1}\delta(z-z_1) +$$

$$+\Big(\frac{\partial\theta}{\partial z}\Big|_{z_1+0} + \frac{\partial\theta}{\partial z}\Big|_{z_1-0}\Big)\delta'(z-z_1)\Big] + \frac{i\beta c_0}{\lambda_1}(1-K_c)\theta\Big|_{z_1}\delta(z-z_1). \tag{8}$$

Застосуємо до рівняння (8) інтегральне перетворення Фур"є по x . В результаті записуємо

$$\frac{d^2\bar{\theta}}{dz^2} - \varkappa\bar{\theta} = 2\mathcal{L}\bar{\theta}\Big|_{z_1}\delta(z-z_1) - \frac{\Lambda_0}{2\lambda_1}(1-K_\lambda)\Big(\bar{\theta}'\Big|_{z_1+0} + \bar{\theta}'\Big|_{z_1-0}\Big)\delta'(z-z_1), \tag{9}$$

де

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(|\xi|) = \frac{\Lambda_0}{2\lambda_1}(1-K_\lambda)\xi^2 + \frac{i\beta c_0}{2\lambda_1}(1-K_c),\quad \varkappa = \sqrt{\xi^2 + \frac{i\beta}{a}}\,;$$

ξ – параметр перетворення Фур"є.

При цьому граничні умови (I), враховуючи (7), зобразимо як

$$\bar{\theta}\Big|_{z=0} = t_0\sqrt{\frac{\pi}{2}}\big[\delta(\xi+\omega)+\delta(\xi-\omega)\big],\quad \bar{\theta}\Big|_{z=l} = t_l\sqrt{\frac{\pi}{2}}\big[\delta(\xi+\omega)+\delta(\xi-\omega)\big]. \tag{I0}$$

Загальний розв"язок рівняння (9) шукаємо у вигляді

$$\bar{\theta} = A\,\mathrm{ch}\,\varkappa z + B\,\mathrm{sh}\,\varkappa z - \frac{\mathcal{L}}{\varkappa}\bar{\theta}\Big|_{z_1} e^{-\varkappa|z-z_1|} -$$

$$-\frac{\Lambda_0}{4\lambda_1}(1-K_\lambda)\Big(\bar{\theta}'\Big|_{z_1+0} + \bar{\theta}'\Big|_{z_1-0}\Big)e^{-\varkappa|z-z_1|}\,\mathrm{sign}(z-z_1), \tag{II}$$

де A, B – сталі величини.

Продиференціювавши (II) по z , маємо

$$\bar{\theta}' = \varkappa(A\,\mathrm{sh}\,\varkappa z + B\,\mathrm{ch}\,\varkappa z) + \mathcal{L}(\theta)\Big|_{z_1} e^{-\varkappa|z-z_1|}\,\mathrm{sign}(z-z_1) +$$

$$+\frac{\Lambda_0}{4\lambda_1}(1-K_\lambda)\Big(\bar{\theta}'\Big|_{z_1+0} + \bar{\theta}'\Big|_{z_1-0}\Big)\Big[\varkappa e^{-\varkappa|z-z_1|} - 2\delta(z-z_1)\Big]. \tag{I2}$$

Із (II) і (I2) знаходимо

$$\bar{\theta}\Big|_{z_1} = \frac{\varkappa(A\,ch\,\varkappa z_1 + B\,sh\,\varkappa z_1)}{\varkappa + \mathcal{L}}, \tag{I3}$$

$$\bar{\theta}'\Big|_{z_1+0} + \bar{\theta}'\Big|_{z_1-0} = \frac{4\lambda_1 \varkappa(A\,sh\,\varkappa z_1 + B\,ch\,\varkappa z_1)}{2\lambda_1 - \Lambda_0(1-K_\lambda)\varkappa}. \tag{I4}$$

Враховуючи (I3) і (I4), розв"язок (II) можна записати

$$\bar{\theta} = \left[ch\,\varkappa z - \mathcal{K}\,ch\,\varkappa z_1\, e^{-\varkappa|z-z_1|} - \mu\,sh\,\varkappa z_1\, e^{-\varkappa|z-z_1|}\,sign(z-z_1)\right]A +$$

$$+ \left[sh\,\varkappa z - \mathcal{K}\,sh\,\varkappa z_1\, e^{-\varkappa|z-z_1|} - \mu\,ch\,\varkappa z_1\, e^{-\varkappa|z-z_1|}\,sign(z-z_1)\right]B, \tag{I5}$$

де

$$\mathcal{K} = \mathcal{K}(|\xi|) = \frac{\mathcal{L}}{\varkappa + \mathcal{L}}, \quad \mu = \mu(|\xi|) = \frac{\Lambda_0(1-K_\lambda)\varkappa}{2\lambda_1 - \lambda_0(1-K_\lambda)\varkappa}.$$

Коефіцієнти A і B згідно з граничними умовами (I0) визначаються за формулами

$$A = \Delta_0^{-1}\Big\{\bar{\theta}_0\left[sh\,\varkappa l - (\mu\,ch\,\varkappa z_1 + \mathcal{K}\,sh\,\varkappa z_1)\,e^{-\varkappa(l-z_1)}\right] -$$

$$- \bar{\theta}_l(\mu\,ch\,\varkappa z_1 - \mathcal{K}\,sh\,\varkappa z_1)\,e^{-\varkappa z_1}\Big\}, \tag{I6}$$

$$B = \Delta_0^{-1}\Big\{\bar{\theta}_0\left[(\mu\,sh\,\varkappa z_1 + \mathcal{K}\,ch\,\varkappa z_1)\,e^{-\varkappa(l-z_1)} - ch\,\varkappa l\right] +$$

$$+ \bar{\theta}_l\left[1 + (\mu\,sh\,\varkappa z_1 - \mathcal{K}\,ch\,\varkappa z_1)\,e^{-\varkappa z_1}\right]\Big\}, \tag{I7}$$

де

$$\Delta_0 = \Delta_0(|\xi|) = sh\,\varkappa l - \mu\left[e^{-\varkappa l} + ch\,\varkappa(l-2z_1)\right] +$$

$$+ \mathcal{K}\left[e^{-\varkappa l} - ch\,\varkappa(l-2z_1)\right] + 2\mathcal{K}\mu\,e^{-\varkappa l}.$$

Підставивши тепер (I6) і (I7) у (I5) та перейшовши від трансформант до оригіналів, одержимо

$$\theta = \frac{\cos\omega x}{\Delta_0(\omega)}\left[t_0\varphi(z) + t_l\psi(z)\right], \tag{18}$$

де

$$\varphi(z) = sh\,\bar{\varkappa}(l-z) - \mu(\omega)\left[ch\,\bar{\varkappa}(z-z_1)e^{-\bar{\varkappa}(l-z_1)} - ch\,\bar{\varkappa}(l-z)e^{-\bar{\varkappa}|z-z_1|}\operatorname{sign}(z-z_1)\right] + \mathcal{K}(\omega)\left[sh\,\bar{\varkappa}(z-z_1)e^{-\bar{\varkappa}(l-z_1)} - sh\,\bar{\varkappa}(l-z_1)e^{-\bar{\varkappa}|z-z_1|} - 2\mu(\omega)e^{-\bar{\varkappa}(|z-z_1|+l-z_1)}S(z-z_1)\right];$$

$$\psi(z) = sh\,\bar{\varkappa}z - \mathcal{K}(\omega)\left[sh\,\bar{\varkappa}(z-z_1)e^{-\bar{\varkappa}z_1} + sh\,\bar{\varkappa}z_1 e^{-\bar{\varkappa}|z-z_1|} - 2\mu(\omega)e^{-\bar{\varkappa}(|z-z_1|+z_1)}S(z-z_1)\right] - \mu(\omega)\left[ch\,\bar{\varkappa}(z-z_1)e^{-\bar{\varkappa}z_1} + ch\,\bar{\varkappa}z_1 e^{-\bar{\varkappa}|z-z_1|}\operatorname{sign}(z-z_1)\right];$$

$$\bar{\varkappa} = \sqrt{\omega^2 + \frac{i\beta}{a}}.$$

Якщо $t_l = 0$, то замість (I8) маємо

$$\theta = \frac{t_0\cos\omega x}{\Delta_0(\omega)}\varphi(z). \tag{19}$$

Перейшовши в (I9) до границі при $l \to \infty$, дістаємо вираз θ для півпростору з включенням. Підставивши знайдені значення θ за формулами (I8), (I9) і для півпростору в (7) та виділивши дійсні або уявні частини, знайдемо розв"язки, що відповідають випадкам, коли температури поверхностей змінюються у часі за законом синуса або косинуса.

Зауважимо, що аналогічним способом можна визначити температурне поле в шарі з n тонкими включеннями.

Список літератури: I. Коляно Ю.М., Кулик А.Н. Температурные напряжения от объемных источников. – К.: Наук.

думка, 1983. - 288 с. 2. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике для научных работников и инженеров. - М.: Наука, 1968. - 720 с.

Стаття надійшла до редколегії 19.03.84

УДК 539.377

Б.В.Ковальчук

ЗАДАЧА ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ ДЛЯ КУСКОВО-ОДНОРІДНИХ ТІЛ ПРИ РОЗРИВНОМУ ГРАНИЧНОМУ РОЗПОДІЛІ ТЕМПЕРАТУРИ

Розглянемо приклад, який ілюструє спосіб розв"язування задач теплопровідності для кусково-однорідних тіл при розривному розподілі температури на границі. Нехай напівнескінченний циліндр радіуса R_2 з чужорідним циліндричним включенням радіуса R_1 піддається нагріванню по поверхні $z=0$ зовнішнім середовищем, температура якого змінюється за законом

$$t\Big|_{z=0} = t_0 J_0(\mu r) S_+(R-r) + t_c S_-(r-R), \tag{1}$$

де t_0, t_c - сталі значення температури; $S_\pm(\xi)$ - асиметричні одиничні функції; $J_\nu(\mu r)$ - функція Бесселя першого роду порядку ν (μ - константа). На поверхні $z=0$ має місце гранична умова першого роду.

Температура поверхні $r=R_2$ змінюється за законом

$$t\Big|_{r=R_2} = t_c e^{-kz}, \tag{2}$$

де k - стала величина.

Подамо коефіцієнт теплопровідності $\lambda(r)$ кусково-однорідного циліндра як єдиного цілого у вигляді

$$\lambda(r) = \lambda_1 + (\lambda_2 - \lambda_1) S_-(r-R), \tag{3}$$

де λ_1, λ_2 - коефіцієнти теплопровідності включення й основного матеріалу ($R_1 < R < R_2$).

Зауважимо при цьому справедливість тотожностей [I]

$$\frac{1}{\lambda(r)} = \frac{1}{\lambda_1} + \left(\frac{1}{\lambda_2} - \frac{1}{\lambda_1}\right) S_{-}(r-R), \tag{4}$$

$$S_{-}(r-R)\,\delta(r-R) = 0, \tag{5}$$

де $\delta_{-}(\xi) = \dfrac{dS_{-}(\xi)}{d\xi}$.

Підставивши (3) у рівняння теплопровідності неоднорідного тіла [2]

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left[r\lambda(r)\frac{\partial t}{\partial r}\right] + \lambda(r)\frac{\partial^2 t}{\partial z^2} = 0 \tag{6}$$

і враховуючи (4) і (5), приходимо до диференціального рівняння з сингулярним коефіцієнтом

$$\frac{\partial^2 t}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial t}{\partial r} + \frac{\partial^2 t}{\partial z^2} - (1-K_\lambda^{-1})\,\delta_{-}(r-R_1)\frac{\partial t}{\partial r}\Big|_{r=R_1} = 0, \tag{7}$$

де

$$K_\lambda = \frac{\lambda_1}{\lambda_2}, \quad \frac{\partial t}{\partial r}\Big|_{r=R_1} = \frac{\partial t}{\partial r}\Big|_{r=R_1+0}.$$

Застосуємо до рівняння (7) інтегральне синус-перетворення Фур"є по z, допустивши, що функція температури і її похідна по z на нескінченності перетворюються в нуль. Згідно з граничною умовою (I) одержуємо

$$\frac{d^2\bar{t}}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{d\bar{t}}{dr} - \xi^2\bar{t} = \varphi(r), \tag{8}$$

де

$$\varphi(r) = (1-K_\lambda^{-1})\frac{d\bar{t}}{dr}\Big|_{r=R_1}\delta_{-}(r-R_1) - \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\xi\left[t_0 J_0(\mu r)S_{+}(R-r) + t_c S_{-}(r-R)\right]$$

(ξ - параметр синус-перетворення Фур"є).

При цьому граничну умову (2) запишемо як

$$\bar{t}\Big|_{r=R_2} = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{t_c\,\xi}{K^2+\xi^2}. \tag{9}$$

Враховуючи (9) і умову обмеженості трансформанти температури при $r=0$, розв"язок рівняння (8) можна записати у вигляді

$$\bar{t}=\frac{I_0(\xi r)}{I_0(\xi R_2)}\left[\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{t_c\,\xi}{K^2+\xi^2}+K_0(\xi R_2)\int_0^{R_2}\eta\psi(\eta)I_0(\xi\eta)d\eta\right]+$$

$$+I_0(\xi r)\int_{R_2}^{r}\eta\psi(\eta)K_0(\xi\eta)d\eta-K_0(\eta r)\int_0^{r}\eta\psi(\eta)I_0(\xi\eta)d\eta, \tag{10}$$

де $I_\nu(\eta), K_\nu(\eta)$ – модифіковані функції Бесселя першого та другого роду порядку ν .

Використавши табличні дані [3] , наведемо значення типічних інтегралів, які входять до виразу (10).

$$\int_0^r \eta I_0(\xi\eta)\delta_-(\eta-R)d\eta=RI_0(\xi R)\delta_-(r-R), \tag{11}$$

$$\int_0^r \eta I_0(\xi\eta)S_-(\eta-R)d\eta=\frac{S_-(r-R)}{\xi}\left[rI_1(\xi r)-RI_1(\xi R)\right], \tag{12}$$

$$\int_0^r \eta I_0(\xi\eta)J_0(\mu\eta)S_+(R-\eta)d\eta=S_+(R-r)\int_0^r\eta I_0(\xi\eta)J_0(\mu\eta)d\eta+$$

$$+S_-(r-R)\int_0^R\eta I(\xi\eta)J_0(\mu\eta)d\eta=$$

$$=\frac{rS_+(R-r)}{\mu^2+\xi^2}\left[\mu I_0(\xi r)J_1(\mu r)+\xi I_1(\xi r)J_0(\mu r)\right]+$$

$$+\frac{RS_-(r-R)}{\mu^2+\xi^2}\left[\mu I_0(\xi R)J_1(\mu R)+\xi I_1(\xi R)J_0(\mu R)\right], \tag{13}$$

$$\int_{R_2}^{r} \eta K_0(\xi\eta)\delta_-(\eta-R)\,d\eta = RK_0(\xi R)\left[S_-(r-R)-1\right],$$

$$\int_{R_2}^{r} \eta K_0(\xi\eta)S_-(\eta-R)\,d\eta = \frac{S_-(r-R)}{\xi}\left[RK_1(\xi R)-rK_1(\xi r)\right]+ \tag{I4}$$

$$+\frac{1}{\xi}\left[R_2K_1(\xi R_2)-RK_1(\xi R)\right], \tag{I5}$$

$$\int_{R_2}^{r} \eta J_0(\mu\eta)K_0(\xi\eta)S_+(R-\eta)\,d\eta = S_+(R-r)\int_{R}^{r}\eta J_0(\mu\eta)K_0(\xi\eta)\,d\eta-$$

$$-\int_{0}^{R}\eta J_0(\mu\eta)K_0(\xi\eta)\,d\eta = \frac{S_+(R-r)}{\mu^2+\xi^2}\left[\mu r J_1(\mu r)K_0(\xi r)-\right.$$

$$\left.-\xi r J_0(\mu r)K_1(\xi r)-\mu R J_1(\mu R)K_0(\xi R)+\xi R J_0(\mu R)K_1(\xi R)\right]-$$

$$-\frac{1}{\mu^2+\xi^2}\left[\mu R J_1(\mu R)K_0(\xi R)-\xi R J_0(\mu R)K_1(\xi R)+1\right]. \tag{I6}$$

Продиференціювавши (I0) по r, маємо

$$\frac{d\bar t}{dr} = \frac{\xi I_1(\xi r)}{I_0(\xi R_2)}\left[\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{t_c\,\xi}{K^2+\xi^2}+K_0(\xi R_2)\int_0^{R_2}\eta\psi(\eta)I_0(\xi\eta)\,d\eta\right]+$$

$$+\xi I_1(\xi r)\int_{R_2}^{r}\eta\psi(\eta)K_0(\xi\eta)\,d\eta+\xi K_1(\xi r)\int_0^{r}\eta\psi(\eta)I_0(\xi\eta)\,d\eta. \tag{I7}$$

Згідно зі значеннями інтегралів (II) – (I6) одержуємо

$$\int_0^{R_2}\eta\psi(\eta)I_0(\xi\eta)\,d\eta = R_1(1-K_\lambda^{-1})I_0(\xi R_1)\left.\frac{d\bar t}{dr}\right|_{r=R_1}-$$

$$-t_0\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{R\xi}{\mu^2+\xi^2}\left[\mu I_0(\xi R)I_1(\mu R)+\xi I_1(\xi R)J_0(\mu R)\right]-$$

$$-t_c\sqrt{\frac{2}{\pi}}\left[R_2 I_1(\xi R_2)-R I_1(\xi R)\right], \tag{18}$$

$$\int_0^{R_1}\eta\varphi(\eta)I_0(\xi\eta)d\eta=R_1(1-K_2^{-1})I_0(\xi R_1)\frac{d\bar{t}}{dr}\Big|_{r=R_1}-$$

$$-t_0\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{R_1\xi}{\mu^2+\xi^2}\left[\mu I_0(\xi R_1)J_1(\mu R_1)+\xi I_1(\xi R_1)J_0(\mu R_1)\right], \tag{19}$$

$$\int_{R_1}^{R_2}\eta\varphi(\eta)K_0(\xi\eta)d\eta=t_0\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\xi}{\mu^2+\xi^2}\left[\mu R_1 J_1(\mu R_1)K_0(\xi R_1)-\right.$$

$$-\xi R_1 J_0(\mu R_1)K_1(\xi R_1)-2\mu R J_1(\mu R)K_0(\xi R)+$$

$$\left.+2\xi R J_0(\mu R)K_1(\xi R)-1\right]+t_c\sqrt{\frac{2}{\pi}}\left[R_2K_1(\xi R_2)-RK_1(\xi R)\right]. \tag{20}$$

Враховуючи вирази інтегралів (18) – (20), із (17) знаходимо

$$\frac{d\bar{t}}{dr}\Big|_{r=R_1}=\Delta_0^{-1}\left\{t_0\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\xi}{\mu^2+\xi^2}\left[\xi I_1(\xi R_1)+R_1\xi^2 I_1(\xi R_1)J_0(\mu R_1)K_1(\xi R_1)+\right.\right.$$

$$+2R_1\mu\xi I_1(\xi R_1)J_1(\mu R)K_0(\xi R)-R_1\mu\xi I_1(\xi R_1)J_1(\mu R_1)K_0(\xi R_1)-$$

$$-2R\xi^2 I_1(\xi R_1)J_0(\mu R)K_1(\xi R)-R\mu\xi\frac{I_0(\xi R)}{I_0(\xi R_2)}I_1(\xi R_1)J_1(\mu R)K_0(\xi R_2)-$$

$$-R\xi^2\frac{I_1(\xi R)I_1(\xi R_1)}{I_0(\xi R_2)}J_0(\mu R)K_0(\xi R_2)-$$

$$-R_1\mu\xi\frac{I_0(\xi R_1)}{I_0(\xi R_2)}I_1(\xi R_1)J_1(\mu R_1)K_1(\xi R_1)-$$

$$-R_1\xi^2\frac{I_1(\xi R_1)I_1(\xi R_1)}{I_0(\xi R_2)}J_0(\mu R_1)K_1(\xi R_1)\Big]+$$

$$+t_c\sqrt{\frac{2}{\pi}}I_1(\xi R_1)\xi\Big[\frac{\xi}{I_0(\xi R_2)(K^2+\xi^2)}-R_2\frac{I_1(\xi R_2)}{I_0(\xi R_2)}K_0(\xi R_2)+$$

$$+R\frac{I_1(\xi R)}{I_0(\xi R_2)}K_0(\xi R_2)-R_2K_1(\xi R_2)+RK_1(\xi R)\Big]\Big\},$$

(2I)

де

$$\Delta_0=\Delta_0(|\xi|)=1-R_1(1-K_\lambda^{-1})\xi I_0(\xi R_1)\Big[\frac{I_1(\xi R_1)}{I_0(\xi R_2)}K_0(\xi R_2)+K_1(\xi R_1)\Big].$$

Використовуючи (2I) і вирази інтегралів (I8) – (20), перейдемо в (I0) від трансформант до оригіналів згідно з формулою

$$t=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty \bar{t}\sin z\xi\, d\xi. \qquad (22)$$

У результаті одержимо єдиний для всієї області визначення розв"язок задачі теплопровідності для кусково-однорідного напівнескінченного циліндра з розривним розподілом температури на границі поверхні. Його зручно використовувати, наприклад, при визначенні температурних напружень у напівнескінченному циліндрі зі сталими термопружними характеристиками.

Список літератури: I. К о л я н о Ю.М., П р о ц ю к Б.В. Термоупругость неоднородных и кусочно-однородных пластин, обладающих цилиндрической анизотропией. – В кн.: Обобщенные функции в термоупругости. К.: Наук. думка, I980, с. 3-I8. 2. К о л я н о Ю.М., П о п о в и ч В.С. Об одном эффективном методе решения задач термоупругости для кусочно-однородных тел, нагреваемых внешней средой. – Физико-химическая механика материалов, I976,

№ 2, с. 108-112. 3. П р у д н и к о в А.Г., Б р ы ч к о в Ю.А., М а р и ч е в О.И. Интегралы и ряды. Специальные функции. - М.: Наука, 1983. - 720 с.

Стаття надійшла до редколегії 19.03.84

З М І С Т

УДК 517.956

Нелокальная задача для квазилинейного параболического уравнения. Л а в р е н ю к С.П. – Вестн. Львов. ун-та. Сер. мех.-мат, вып. 24. Вопросы математической физики. Львов: Вища шк. Изд-во при Львов. ун-те, 1985, с. 3–6 (на укр. яз.).

Рассматривается нелокальная задача для уравнения

$$u_t = u_{xx} + f(x,t,u)$$

в области $Q_T = \{(x,t) : 0<x<1, 0<t<T\}$ с нулевой начальной функцией. Получены условия существования и единственности решения почти всюду указанной задачи. Библиогр.: 3 назв.

УДК 517.946

Применение метода интегралов энергии в одной сингулярно возмущенной задаче. Ц ы м б а л В.Н. – Вестн. Львов. ун-та. Сер. мех.-мат., вып. 24. Вопросы математической физики. Львов: Вища шк. Изд-во при Львов. ун-те, 1985, с. 7–11 (на укр. яз.).

Получена оценка, доказывающая асимптотическую корректность разложения решения смешанной задачи для уравнения

$$\varepsilon\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right) + a(x,t)\frac{\partial u}{\partial t} + b(x,t)u + \int_0^T\int_0^\ell K(x,t;\xi,\eta)u(\xi,\eta)\,d\xi\,d\eta = f(x,t)$$

по степеням малого параметра $\varepsilon > 0$. Библиогр.: 4 назв.

УДК 517.946

Смешанная задача для гиперболического уравнения с несколькими малыми параметрами. Ф л ю д В.М., Ц ы м б а л В.Н. – Вестн. Львов. ун-та. Сер. мех.-мат., вып. 24. Вопросы математической физики. Львов: Вища шк. Изд-во при Львов. ун-те, 1985, с. 11–15 (на укр. яз.).

Построено асимптотическое разложение сингулярно возмущенной смешанной задачи для гиперболического уравнения второго порядка. Библиогр.: 4 назв.

УДК 517.946

Задача Дирихле для неоднородного дифференциального уравнения второго порядка эллиптического типа в пространстве обобщенных функций. Гупало А.-В.С., Лопушанская Г.П. – Вестн. Львов. ун-та. Сер. мех.-мат., вып. 24. Вопросы математической физики. Львов: Вища шк. Изд-во при Львов. ун-те, 1985, с. 16-20 (на укр. яз.).

Рассмотрена задача Дирихле для неоднородного дифференциального уравнения второго порядка эллиптического типа, когда граничные значения и правая часть уравнения являются обобщенными функциями. Доказаны теоремы единственности и представления решения. Библиогр.: 3 назв.

УДК 517.946

Обобщенная задача Неймана для неоднородного дифференциального уравнения второго порядка эллиптического типа. Гупало А.-В.С., Лопушанская Г.П. – Вестн. Львов. ун-та. Сер. мех.-мат., вып. 24. Вопросы математической физики. Львов: Вища шк. Изд-во при Львов. ун-те, 1985, с. 20-23 (на укр. яз.).

Рассмотрена задача Неймана для неоднородного дифференциального уравнения второго порядка эллиптического типа, когда правые части граничного условия и уравнения являются обобщенными функциями. Доказаны теоремы единственности и представления решения. Библиогр.: 3 назв.

УДК 517.946

Многофазная задача типа Стефана для гиперболической системы первого порядка. Кирилич В.М. – Вестн. Львов. ун-та. Сер. мех.-мат., вып. 24. Вопросы математической физики. Львов: Вища шк. Изд-во при Львов. ун-те, 1985, с. 24-28 (на укр. яз.).

В криволинейном треугольнике плоскости $t>0$ с вершиной в начале координат исследуется многофазная задача типа Стефана для гиперболической системы первого порядка. Граничные условия задаются в нелокальном виде по x. Установлены достаточные условия локальной по t корректной разрешимости задачи. Библиогр.: 8 назв.

УДК 517.946

Нелокальная задача для нагруженной гиперболической системы уравнений первого порядка на прямой. Киричинская И.Б., Кирилич В.М. – Вестн. Львов. ун-та. Сер. мех.-мат., вып. 24. Вопросы математической физики. Львов: Вища шк. Изд-во при Львов. ун-те, 1985, с.29-31 (на укр. яз.).

Исследуется корректная разрешимость смешанной задачи для нагруженной гиперболической системы первого порядка. Библиогр.: 5 назв.

УДК 517.5

Аналоги теоремы Бореля для аналитических функций. Шеремета М.Н. – Вестн. Львов. ун-та. Сер. мех.-мат., вып. 24. Вопросы математической физики. Львов: Вища шк. Изд-во при Львов. ун-те, 1985, с.32-33 (на укр. яз.).

Пусть F – аналитическая в $\{s: \operatorname{Re} s<0\}$ функция, представленная абсолютно сходящимся в этой плоскости рядом Дирихле $\sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{s\lambda_n}$ $(0<\lambda_n \uparrow +\infty)$, $n(t)$ – считающая функция последовательности (λ_n), $M(\sigma,F)=\sup\{|F(\sigma+it)|: t\in\mathbb{R}\}$ и $\mu(\sigma,F)=\max\{|a_n|\exp(\sigma\lambda_n): n\geq 0\}$, $\sigma<0$.

Пусть L и Φ – положительные непрерывные возрастающие к $+\infty$ на $[0,+\infty)$ функции, причем $(\forall\lambda\in(0,+\infty))\{L(\lambda x) = O(L(x)),\ x\to+\infty\}$, а φ – функция, обратная к Φ. Тогда, если

$$\varlimsup_{\sigma\to 0}\frac{\ln M(\sigma,F)}{|\sigma|\Phi(1/|\sigma|)}<\infty,\quad \lim_{\sigma\to 0}\frac{\ln M(\sigma,F)}{|\sigma|L(1/|\sigma|)}=\infty$$

и $$\varlimsup_{t\to\infty}\frac{\varphi(t)\ln n(t)}{L(\varphi(t))}<\infty,\ \text{то}\ \ln M(\sigma,F)\sim\ln\mu(\sigma,F)$$

при $\sigma\to 0$.

УДК 517.53

<u>О регулярности роста неванлинновских характеристик субгармонических функций</u>. З а б о л о ц к и й Н.В. – Вестн. Львов. ун-та. Сер. мех.-мат., вып. 24. Вопросы математической физики. Львов: Вища шк. Изд-во при Львов. ун-те, 1985, с. 34–36 (на укр. яз.).

Построен пример субгармонической в R^m, $m \geq 3$, функции u порядка ρ, $0 < \rho < 1$, для которой предел $\lim\limits_{r \to \infty} N(r,u)\, r^{-\rho(r)}$ существует, а предел $\lim\limits_{r \to \infty} T(r,u)\, r^{-\rho(r)}$ не существует, где N, T – стандартные неванлинновские характеристики, $\rho(r)$ – уточненный порядок функции u. Библиогр.: 5 назв.

УДК 517.53

<u>О росте целых рядов Дирихле нулевого порядка по Ритту</u>. С к а с к и в О.Б. – Вестн. Львов. ун-та. Сер. мех.-мат., вып. 24. Вопросы математической физики. Львов: Вища шк. Изд-во при Львов. ун-те, 1985, с. 36–39 (на укр. яз.).

Для класса целых функций F, представленных абсолютно сходящимися во всей комплексной плоскости рядами Дирихле $\sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{z\lambda_n}$, $0 = \lambda_0 < \lambda_1 < \ldots < \lambda_n \uparrow +\infty \ (n \to +\infty)$ с условием на рост

$$\ln \sup \{ |F(x+iy)| : |y| < \infty \} \leq A x^{p} \ (-\infty \leq x_0 < x < +\infty),\ 1 < p < +\infty,$$

доказано, что условие

$$\lambda_n^{-\frac{1}{p-1}} \sum_{k=0}^{n-1} (\lambda_{k+1} - \lambda_k)^{-1} = O(1) \quad (n \to +\infty) \tag{I}$$

является достаточным для выполнения при $x \to +\infty$ вне множества нулевой плотности соотношения

$$F(x+iy) = (1+o(1))\, a_{\nu(x)}\, e^{(x+iy)\lambda_{\nu(x)}},$$

где $\nu(x)$ – центральный индекс ряда Дирихле. Указано также, что условие (I) ослабить, вообще говоря, нельзя. Библиогр.: 3 назв.

УДК 517.535.4

О поведении в полуполосе аналитических функций, представленных рядами Дирихле. С о р о к и в с к и й В.М. – Вестн. Львов. ун-та. Сер. мех.-мат., вып. 24. Вопросы математической физики. Львов: Вища шк. Изд-во при Львов. ун-те, 1985, с. 40–43 (на укр. яз.).

Пусть f – аналитическая в полуплоскости $\{z : \operatorname{Re} z < 0\}$ функция, представленная рядом Дирихле с положительными возрастающими к $+\infty$ показателями λ_n и абсциссой абсолютной сходимости, равной нулю. Библиогр.: 3 назв.

УДК 517.535.4

Об аппроксимации и росте целых гармонических в R^n функций. В е с е л о в с к а я О.В. – Вестн. Львов. ун-та. Сер. мех.-мат., вып. 24. Вопросы математической физики. Львов: Вища шк. Изд-во при Львов. ун-те, 1985, с. 44–48 (на укр. яз.).

Устанавливается критерий продолжительности гармонической в шаре функции n-мерного пространства к целой гармонической и исследуется рост целой гармонической функции в терминах наилучшего приближения такой функции гармоническими полиномами. Библиогр.: 6 назв.

УДК 517.574

Об асимптотическом поведении δ -субгармонических функций вполне регулярного роста. В а с и л ь к и в Я.В. - Вестн. Львов. ун-та. Сер. мех.-мат., вып. 24. Вопросы математической физики. Львов: Вища шк. Изд-во при Львов. ун-те, 1985, с. 48-54 (на укр. яз.).

В классе Λ_δ δ -субгармонических в C функций конечного λ -типа ($\lambda(r)$ - положительная, непрерывная на $]0,+\infty[$ функция, $\lambda(r)\uparrow+\infty$, при $r\to+\infty$, удовлетворяющая условию $\lambda(2r)\le M\lambda(r)$, при некотором $M>0$ и всех $r>0$) выделяется подкласс Λ^0_δ δ -субгармонических функций вполне регулярного роста. Используя метод рядов Фурье, исследуется асимптотическое поведение функций $w(re^{i\theta})\in\Lambda^0_\delta$, при $r\to+\infty$ вне исключительных множеств с нулевой линейной плотностью. Установлено, что для произвольного $\eta>0$ семейство функций $\{\omega(re^{i\theta})/\lambda(r), r\notin E_\eta, \omega\in\Lambda_\delta\}$ равностепенно непрерывно по θ, где E_η некоторое измеримое множество такое, что $\lim\limits_{r\to\infty}\frac{1}{r}\,mes\,(E_\eta\cap[0,r])\le\eta$. Библиогр.: 8 назв.

УДК 517.51

О селекции функции расстояния до компакта. Б а з и л е в и ч Л.Е. - Вестн. Львов. ун-та. Сер. мех.-мат., вып. 24. Вопросы математической физики. Львов: Вища шк. Изд-во при Львов. ун-те, 1985, с.54-59 (на укр. яз.).

Находятся достаточные условия для существования селекции функции расстояния до компакта, лежащего в эвклидовом пространстве. Библиогр.: 3 назв.

УДК 513.83

Ограниченность в топологических кольцах. Бокало Б.М., Гуран И.И. – Вестн. Львов. ун-та. Сер. мех.-мат., вып. 24. Вопросы математической физики. Львов: Вища шк. Изд-во при Львов. ун-те, 1985, с. 60-64 (на укр. яз.).

Определяются и изучаются ω -ограниченные по сложению и умножению топологические кольца. Приведены примеры, различающие классы ω -ограниченных по сложению и умножению колец. Даны достаточные условия для совпадения этих классов. В достаточно широких предположениях получен положительный ответ на вопрос об изоморфном уплотнении топологических колец на метризуемые кольца. Библиогр.: 5 назв.

УДК 513.83

Симметрические произведения, являющиеся бесконечномерными многообразиями. Заричный М.М. – Вестн. Львов. ун-та. Сер. мех.-мат., вып. 24. Вопросы математической физики. Львов: Вища шк. Изд-во при Львов. ун-те, 1985, с. 65-69 (на укр. яз.).

Доказано, что если бесконечная симметрическая степень $SP(X,e)$ в смысле Дольда и Тома компакта X – $\mathbb{R}^\infty$ -многообразие, то пространство $X\setminus\{e\}$ является абсолютным окрестностным ретрактом в классе метрических пространств. Приводится пример компакта X, не являющегося абсолютным окрестностным ретрактом, для которого пространство $SP(X,e)$ гомеоморфно $\mathbb{R}^\infty$. Библиогр.: 6 назв.

УДК 513.6

Когомологии группы классов идеалов и обобщенных якобианов Андрийчук В.И. – Вестн. Львов. ун-та. Сер. мех.-мат., вып. 24. Вопросы математической физики. Львов: Вища шк. Изд-во при Львов. ун-те, 1985, с. 69-73 (на укр. яз.).

Доказаны аналоги стандартных следствий из двойственности Тэйта-Шафаревича в эллиптических кривых, определенных над локальным полем, при замене локального основного поля псевдолокальным полем. Библиогр.: 6 назв.

УДК 513.6

Некоторые вопросы, связанные со спариванием Тэйта-Шафаревича в эллиптических кривых над псевдолокальными полями. Андрийчук В.И. - Вестн. Львов. ун-та. Сер. мех.-мат., вып. 24. Вопросы математической физики. Львов: Вища шк. Изд-во при Львов. ун-те, 1985, с. 74-78 (на укр. яз.).

Для эллиптических кривых, определенных над псевдолокальным полем, исследованы вопросы о взаимодействии фильтраций О.Н. Введенского при спаривании Тэйта-Шафаревича и о соотношении порядка и показателя главного однородного пространства над такими кривыми. Показано также, что в отличие от случая локального поля спаривание Тэйта-Шафаревича может вырождаться справа, а двумерные когомологии Галуа могут быть нетривиальными. Библиогр.: 8 назв.

УДК 512.553

О кручении над полусовершенными кольцами. Горбачук Е.Л., Онищук В.А. - Вестн. Львов. ун-та. Сер. мех.-мат., вып. 24. Вопросы математической физики. Львов: Вища шк. Изд-во при Львов. ун-те, 1985, с. 79-81 (на укр. яз.).

Доказывается теорема, что для произвольного правого идеала S полусовершенного кольца R система правых идеалов $\mathcal{E}_S$ радикальный фильтр тогда и только тогда, когда R -прямая сумма (конечная) локальных колец. Библиогр.: 3 назв.

УДК 512.553

О аксиоматизации классов абелевых групп. Горбачук Е.Л., Михаловская Н.М. - Вестн. Львов. ун-та. Сер. мех.-мат., вып. 24. Вопросы математической физики. Львов: Вища шк. Изд-во при Львов. ун-те, 1985, с. 81-82 (на укр. яз).

Указаны условия, при которых некоторые классы абелевых групп аксиоматизированы. Библиогр.: 3 назв.

УДК 514

Об одном отображении кривых. Д е н и с к о С.В. - Вестн. Львов. ун-та. Сер. мех.-мат., вып. 24. Вопросы математической физики. Львов: Вища шк. Изд-во при Львов. ун-те, 1985, с. 83-85 (на укр. яз.).

Рассматривается осуществляемое с помощью механизмов отображение специальных кривых, сохраняющее отношение длин дуг. Библиогр.: 3 назв.

УДК 514

О воспроизведении с помощью механизмов некоторых развертывающихся поверхностей, для каждой из которых направляющими являются две окружности. Д е н и с к о С.В., К у б и в С.И. - Вестн. Львов. ун-та. Сер. мех.-мат., вып. 24. Вопросы математической физики. Львов: Вища шк. Изд-во при Львов. ун-те, 1985, с. 86-89 (на укр. яз.).

Рассматривается один класс линейчатых поверхностей, каждая из которых имеет две направляющие, которые представляют собой окружности, и может быть воспроизведена с помощью определенного механизма. Получено условие, необходимое и достаточное для того, чтобы поверхность этого класса являлась развертывающейся поверхностью. Исследуются частные случаи этого условия. Библиогр.: 2 назв.

УДК 519.21

Двухмерное отражение. К в и т И.Д., К о с а р ч и н В.Н. - Вестн. Львов. ун-та. Сер. мех.-мат., вып. 24. Вопросы математической физики. Львов: Вища шк. Изд-во при Львов. ун-те, 1985, с. 89-93 (на укр. яз.).

Рассматривается теорема единственности для отражения двухмерного положительного случайного вектора. Указано формулы плотности и некоторых существующих числовых характеристик вектора в терминах отражения. Каждая формула проиллюстрирована конкретным двухмерным распределением. Библиогр.: 2 назв.

УДК 517.917

Об одном достаточном условии существования ограниченного и почти периодического решения линейного дифференциального уравнения второго порядка. Лисевич Л.Н. – Вестн. Львов. ун-та. Сер. мех.-мат., вып. 24. Вопросы математической физики. Львов: Вища шк. Изд-во при Львов. ун-те, 1985, с. 93-96 (на укр. яз).

Найдено одно достаточное условие существования ограниченного и почти периодического по Бору решения линейного дифференциального уравнения второго порядка с S^p – почти периодическим свободным членом. Библиогр.: 2 назв.

УДК 536.12

Двумерная задача теплопроводности тел с тонким включением. Ковальчук Б.В., Середа Я.М. – Вестн. Львов. ун-та. Сер. мех.-мат., вып. 24. Вопросы математической физики. Львов: Вища шк. Изд-во при Львов. ун-те, 1985, с. 96-101 (на укр. яз).

Предлагается способ определения двумерных установившихся температурных полей в телах с тонкими включениями, который иллюстрируется на задаче теплопроводности для слоя с включением, подвергнутом двухстороннему нагреву. Библиогр.: 2 назв.

УДК 539.377

Задача теплопроводности для кусочно-однородных тел при разрывном граничном распределении температуры. Ковальчук Б.В. – Вестн. Львов. ун-та. Сер. мех.-мат., вып. 24. Вопросы математической физики. Львов: Вища шк. Изд-во при Львов. ун-те, 1985, с. 101-106 (на укр. яз.).

Предлагается способ определения температурных полей в кусочно-однородных телах при разрывном распределении температуры на граничной поверхности. Задача сводится к решению дифференциального уравнения второго порядка с сингулярным коэффициентом. Способ решения задачи иллюстрируется на примере полубесконечного кусочно-однородного цилиндра, на граничной поверхности которого задано разрывное распределение температуры. Библиогр.: 3 назв.

Министерство высшего и среднего специального образования

УССР

Вестник Львовского университета

Серия механико-математическая

Выпуск 24

ВОПРОСЫ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Издается с 1965 г.

Львов

Издательство при Львовском государственном университете

издательского объединения "Вища школа"

/290000, Львов, ул. Университетская, I/

/На украинском языке/

Редактор В.В.Войтович

Технічний редактор С.Д.Довба

Коректор К.Г.Логвиненко

Н/К

Підп. до друку 13.02.85. БГ 02342. Формат 60х84 I/16.
Папір офсетная. Офс. друк. Умовн. друк. арк. 6,97.
Умовн. фарб.-відб. 7,20. Обл.-вид. арк. 5,09. Тираж 600 прим.
Вид. № 1359. Зам. 3149 . Ціна 70 к. Замовне.

Видавництво при Львівському державному університеті
видавничого об'єднання "Вища школа", 290000, Львів,
вул. Університетська, I.

Обласна книжкова друкарня, 290000, Львів,
вул. Стефаника, II.

70 к.

Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех. мат., 1985, вип. 24, 1—120.