УДК 517.956

С.П.Лавренюк

НЕЛОКАЛЬНІ ЗАДАЧІ ДЛЯ ЕЛІПТИЧНИХ РІВНЯНЬ З ПАРАМЕТРОМ І ПАРАБОЛІЧНИХ РІВНЯНЬ

Нехай G – область, обмежена в $\mathbb{R}^n$, з межею ∂G. Розглянемо задачу

$$A(x,D,q)u(x,q)+L_0u(x,q)=f(x,q), \quad x\in G, q\in Q, \tag{1}$$

$$\left(B_j(x,D,q)u(x,q)+E_ju(x,q)\right)\Big|_{x=x'}=g_j(x',q), \tag{2}$$
$$x'\in\partial G,\ q\in Q,\ j=1,\dots,m,$$

де $A(x,D,q)=\sum\limits_{|\alpha|+\beta\le 2m} a_{\alpha\beta}(x)q^\beta D^\alpha$; $D^\alpha=D_1^{\alpha_1}\cdot\ldots\cdot D_n^{\alpha_n}$;

$D_j=-i\dfrac{\partial}{\partial x_j}$; $\quad L_0: H_\ell(G)\to H_{\ell-2m}(G)$ –
лінійний обмежений оператор; B_j – диференціальні оператори порядку $m_j\le 2m-1$; $E_j: H_\ell(G)\to H_{\ell-m_j-\frac12}(\partial G)$, $j=1,\dots,m$ – лінійні обмежені оператори; $Q=\{q:\alpha_0\le \arg q\le\beta_0\}\subset\mathbb{R}^2$.

Припускаємо, що виконуються умови I, II з праці [1]. Введемо простір

$$H_\ell(G,\partial G)=H_{\ell-2m}(G)\times\prod_{j=1}^m H_{\ell-m_j-\frac12}(\partial G)$$

з нормою

$$\|\omega\|_{\ell,G,\partial G}=\|\omega_0\|_{\ell-2m}+\sum_{j=1}^m |||\omega_j|||'_{\ell-m_j-\frac12},$$

де $\omega=(\omega_0,\omega_1,\dots\omega_m)\in H_\ell(G,\partial G)$. Позначення тут і далі – з праці [1].

Разом з (1), (2) розглянемо задачу

$$A(x,D,q)u(x,q)=\omega_0(x,q),\quad x\in G, q\in Q,$$

$$B_j(x,D,q)u(x,q)\Big|_{x=x'}=\omega_j(x',q),\quad x'\in\partial G,\ q\in Q,$$

$$j=1,\dots,m. \tag{3}$$

Відомо [I], що для всіх $\omega \in H_\ell(G, \partial G)$ $(\ell \geq 2m)$ при $|q| \geq q_0 > 0$, $q \in Q$ (q_0 - достатньо велике число) існує єдиний розв"язок $u(x,q)$ задачі (3) в просторі $H_\ell(G)$ і справедлива оцінка

$$|||u|||_\ell \leq C\|\omega\|_{\ell, G, \partial G}, \tag{4}$$

де стала C визначається лише через коефіцієнти задачі, а також область G. Позначимо

$$E = (L_0, E_1, \ldots, E_m), \ \|E\| = \|L_0\| + \sum_{j=1}^{m} \|E_j\|.$$

Теорема I. Якщо $F = (f, g_1, \ldots, g_m) \in H_\ell(G, \partial G)$, $\|E\| < C^{-1}$, то для $|q| \geq q_0 > 0$ (q_0 - достатньо велике число), $q \in Q$ існує єдиний розв"язок $u(x,q) \in H_\ell(G)$ задачі (I), (2).

Доведення. Оскільки для довільної $\omega \in H_\ell(G, \partial G)$ існує єдиний розв"язок (3), то це визначає лінійний оператор R, який кожній функції з простору $H_\ell(G, \partial G)$ ставить у відповідність функцію з простору $H_\ell(G)$, тобто $u = R\omega$, причому на основі (4) $\|R\| \leq C$. Тоді (I), (2) легко звести до рівняння

$$\omega + ER\omega = F \tag{5}$$

з невідомою функцією ω. Оскільки $ER : H_\ell(G, \partial G) \to H_\ell(G, \partial G)$ і $\|ER\| < 1$, то (5) має єдиний розв"язок у просторі $H_\ell(G, \partial G)$. Теорема доведена.

Розглянемо тепер в $\Omega_T = G \times (0,T)$ параболічну задачу [I]

$$A\left(x, D_x, \frac{\partial}{\partial t}\right)u(x,t) = 0, \ (x,t) \in \Omega_T, \tag{6}$$

$$\left(B_j(x, D_x, \frac{\partial}{\partial t})u(x,t) + E_j u(x,t)\right)\Big|_{x=x'} = g_j(x',t), \quad (x',t) \in \partial G \times (0,T), \ j = 1, \ldots, m, \tag{7}$$

$$\frac{\partial^\kappa u(x,0)}{\partial t^\kappa} = 0, \ \kappa = 0, 1, \ldots, s, \tag{8}$$

$s = \frac{m}{b}$, $2b$ - параболічна вага задачі. Тут B_j - диференціальний оператор порядку $m_j \leq 2m-1$;

$$E_j : P_{\ell, \frac{\ell}{2b}}(e^{-\gamma t}) \to P_{\lambda_j, \frac{\lambda_j}{2b}}(e^{-\gamma t}) -$$

лінійні обмежені оператори для довільного $\gamma>0$, $\lambda_j=\ell-m_j-\frac{1}{2}$. Позначимо $E=(E_1,\dots,E_m)$.

Теорема 2. Нехай задача (6) - (8) параболічна, $\ell>2m$, $\|E\|<C_1$. Тоді існує таке $\gamma>0$, що (6) - (8) має єдиний розв"язок $u(x,t)\in P_{\ell,\frac{\ell}{2b}}(e^{-\gamma t})$ для довільних функцій $g_j\in P_{\lambda_j,\frac{\lambda_j}{2b}}(e^{-\gamma t})$, $j=1,\dots,m$. Тут C_1 - деяке число, взагалі кажучи, мале, що залежить від коефіцієнтів задачі й області G.

Доведення. Застосувавши перетворення Лапласа L до (6) - (8) і прийнявши $p=q^{2b}$, приходимо до задачі виду (I) - (2). Далі, як і при доведенні теореми I, записуємо

$$\omega+ER\omega=\tilde{g},\quad \tilde{g}=(g_1,\dots,g_m),$$

яке розглядається тепер у просторі $E_{\ell,\frac{\ell}{2b}}(\gamma)$. Крім того, $\|R\|\leq C_2$, де стала C_2 визначається коефіцієнтами задачі (6) - (8) і областю G. Отже, якщо $C_1C_2<1$, то рівняння (9) має єдиний розв"язок при деякому $\gamma>0$. Знайшовши розв"язок рівняння (9) ω, можемо записати розв"язок задачі (6) - (8) у вигляді $u=L^{-1}R\omega$. Теорема 2 доведена.

Відзначимо, що нелокальні задачі для еліптичних і параболічних рівнянь розглянуті у працях [2-8].

I. Агранович М.С., Вишик М.И. Эллиптические задачи с параметром и параболические задачи общего вида. - Успехи мат. наук, I964, I9, вып. 3, с. 53-I6I. 2. Бицадзе А.В., Самарский А.А. О некоторых простейших обобщениях линейных эллиптических краевых задач. - Докл. АН СССР, I969, I85, № 4, с. 739-740. 3. Житарашу Н.В., Эйдельман С.Д. Об одной нелокальной параболической задаче. - В кн.: Мат. исслед., I970, 5, вып. 3, с. 83-I00. 4. Ионкин Н.И., Моисеев Е.И. О задаче для уравнения теплопроводности с двухточечным краевым условием. - Дифференциальные уравнения, I979, I5, № 7, с. I284-I295. 5. Камынин Л.И. Об одной краевой задаче теории теплопроводности с неклассическими граничными условиями. - Журн. вычислит. мат. и мат. физики, I964, 4, № 6, с. I006-I024. 6. Панеях Б.П. О некоторых нелокальных краевых задачах для линейных дифференциальных операторов. - Мат. заметки, I984, 35, № 3, с. 425-435. 7. Ройтберг Я.А., Шефтель З.Г. Нелокальные задачи для эллиптических уравнений и систем. - Сиб. мат. журн., I972, I3, № I, с. I65-I8I. 8. Скубачевский А.Л. О спектре некоторых нелокальных эллиптических краевых задач. - Мат. сб., I982, II7, № 4, с. 548-558.

Стаття надійшла до редколегії I8.03.85