УДК 517.946

Я.І.Сідельник

ІСНУВАННЯ УЗАГАЛЬНЕНОГО РОЗВ"ЯЗКУ РІВНЯННЯ КОЛИВАННЯ ПЛАСТИНКИ В ОБЛАСТІ З РУХОМИМИ МЕЖАМИ

Методом Гальоркіна доведено існування узагальненого розв"язку одномірного хвильового рівняння в області з рухомими межами [1].

Розглянемо рівняння

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^4 U}{\partial x^4} = f(x,t), \tag{1}$$

де a – стала; $f(x,t)$ – деяка задана функція.

Доведемо існування узагальненого розв"язку рівняння (1) у випадку, коли розглядуваний процес відбувається в області $Q \subset R^2$, межі якої $x = \ell_1(t)$ і $x = \ell_2(t)$ переміщаються з часом

$$Q = \left\{ \ell_1(t) < x < \ell_2(t), \quad 0 < t < T \right\}.$$

Нехай на цих рухомих межах задані граничні умови

$$\begin{cases} U\big|_{x=\ell_1(t)} = 0, & U\big|_{x=\ell_2(t)} = 0, \\ \dfrac{\partial^2 U}{\partial x^2}\Big|_{x=\ell_1(t)} = 0, & \dfrac{\partial^2 U}{\partial x^2}\Big|_{x=\ell_2(t)} = 0. \end{cases} \tag{2}$$

Разом з цим задані початкові умови

$$U\big|_{t=0} = 0, \quad U_t\big|_{t=0} = 0. \tag{3}$$

Введемо нові координати ξ, τ зв"язані з x, t співвідношеннями

$$\xi = \frac{x - \ell_1(t)}{\ell_2(t) - \ell_1(t)}, \quad \tau = t.$$

При цьому область Q перейде в прямокутник

$$Q_1 = \left\{ 0 < \xi < 1, \ 0 < \tau < T \right\}.$$

У нових координатах (1) має вигляд

$$MU \equiv \frac{\partial^2 U}{\partial \tau^2} + a_1(\tau) \frac{\partial^4 U}{\partial \xi^4} - a_2(\xi,\tau) \frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2} - 2a_3(\xi,\tau) \frac{\partial^2 U}{\partial \xi \partial \tau} -$$

$$- b_1(\xi,\tau) \frac{\partial U}{\partial \xi} = f_1(\xi,\tau) \tag{4}$$

при початкових

$$U\big|_{\tau=0}=0\,, \qquad \frac{\partial U}{\partial \tau}\Big|_{\tau=0}=0 \tag{5}$$

і граничних умовах

$$U\big|_{\xi=0}=0\,, \qquad U\big|_{\xi=1}=0\,,$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2}\Big|_{\xi=0}=0\,, \qquad \frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2}\Big|_{\xi=1}=0\,. \tag{6}$$

Коефіцієнти $a_2(\xi,\tau)$, $a_3(\xi,\tau)$, $b_1(\xi,\tau)$, визначені в прямокутнику Q_1, $a_1(\tau)$ для $\tau\in(0,T)$, мають вигляд

$$a_1(\tau)=\frac{1}{\ell^4}\,, \quad a_2(\xi,\tau)=\frac{a^2}{\ell^2}-\frac{(\ell_1'+\xi\ell')^2}{\ell^2}\,,$$

$$a_3(\xi,\tau)=\frac{\ell_1'+\xi\ell'}{\ell}\,, \quad b_1(\xi,\tau)=\frac{\ell_1''+\xi\ell''}{\ell}-\frac{(\ell_1'+\xi\ell')\ell'}{\ell^2}=\frac{\partial a_3}{\partial \tau}\,. \tag{7}$$

Очевидно, що $a_2+a_3^2=\dfrac{a^2}{\ell^2}>0$. Таким чином, задача (I)-(3) для функції $U(x,t)$ зводиться до задачі (4)-(6).

Розглянемо два класи функцій $H_0^{2,1}(Q_1)$ і $\hat{H}_0^{2,1}(Q_1)$. Позначимо через $C_0^{2,1}(\bar{Q}_1)$ множину функцій із $C^{2,1}(\bar{Q}_1)$, які дорівнюють нулю в околі бічної сторони прямокутника Q_1 , а через $\hat{C}_0^{2,1}(\bar{Q}_1)$ ті функції із $C_0^{2,1}(\bar{Q}_1)$, що дорівнюють нулю в околі верхньої межі прямокутника; $H_0^{2,1}(Q_1)$ і $\hat{H}_0^{2,1}(Q_1)$ – відповідно замикання множин $C_0^{2,1}(\bar{Q}_1)$ і $\hat{C}_0^{2,1}(\bar{Q}_1)$ в нормі простору $H^{2,1}(Q_1)$ [2].

Надалі всюди

$$(k,p)=\int_{Q_1} kp\,d\xi\,d\tau\,, \quad [k,p]=\int_0^1 kp\,d\xi\,.$$

Назвемо функцію $U(\xi,\tau)\in H_0^{2,1}(Q_1)$ узагальненим розв'язком задачі (4)-(6), якщо вона задовольняє інтегральну тотожність

$$-\left(\frac{\partial U}{\partial \tau},\frac{\partial \eta}{\partial \tau}\right)+\left(a_1\frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2},\frac{\partial^2 \eta}{\partial \xi^2}\right)+\left(a_2\frac{\partial U}{\partial \xi},\frac{\partial \eta}{\partial \xi}\right)+\left(\frac{\partial a_2}{\partial \xi}\frac{\partial U}{\partial \xi},\eta\right)+$$

$$+2\left(\frac{\partial a_3}{\partial \xi}\frac{\partial U}{\partial \tau},\eta\right)+2\left(a_3\frac{\partial U}{\partial \tau},\frac{\partial \eta}{\partial \xi}\right)-\left(\frac{\partial a_3}{\partial \tau}\frac{\partial U}{\partial \xi},\eta\right)=(f_1,\eta) \tag{8}$$

для будь-якої функції $\eta(\xi,\tau)\in \hat{H}_0^{2,1}(Q_1)$, а також умову $U|_{\tau=0}=0$.

<u>Теорема</u>. Нехай $a_1(\tau)$ неперервна та має обмежену похідну по $\tau(\tau\in(0,T))$; $a_2(\xi,\tau)$, $a_3(\xi,\tau)$ – неперервні і мають обмежені похідні по ξ і τ в Q_1 ; виконуються також нерівності

$$\left|\frac{\partial a_1}{\partial\tau}\right|\leq\frac{4K}{\ell^4}\,,\ \left|\frac{\partial a_2}{\partial\tau}\right|\leq\frac{2(B+K)a^2}{\ell^2},\ \left|\frac{\partial a_2}{\partial\xi}\right|\leq\frac{2KK_1}{|\ell|}\,,$$

$$\left|\frac{\partial a_3}{\partial\tau}\right|\leq\frac{Ba}{|\ell|}\,,\ \left|\frac{\partial a_3}{\partial\xi}\right|\leq K\,,\ |a_3|\leq\frac{K_1}{|\ell|}\,,\ K_1\leq a\,, \tag{9}$$

де $\ell=\ell_2(\tau)-\ell_1(\tau)$, B,K – додатні сталі. Тоді, якщо $f_1(\xi,\tau)\in L_2(Q_1)$, існує узагальнений розв"язок задачі (4)–(6).

Для доведення існування узагальненого розв"язку застосуємо метод Гальоркіна [2]. Наближений розв"язок шукаємо у вигляді

$$\tilde{U}_N(\xi,\tau)=\sum_{K=1}^{N}C_K(\tau)\varphi_K(\xi)\,,$$

де $\tilde{U}_N$ повинні задовольняти (8) при $\eta=C_K\varphi_K$. Всі $\varphi_K(\xi)$ утворюють повну ортонормовану систему власних функцій, які задовольняють рівняння

$$a^2\frac{d^2\varphi_K}{d\xi^2}-\frac{d^4\varphi_K}{d\xi^4}+\mu_K\varphi_K=0$$

та крайові умови

$$\varphi_K(0)=0,\quad \varphi_K(1)=0\,,$$

$$\frac{d^2\varphi_K(0)}{d\xi^2}=0,\quad \frac{d^2\varphi_K(1)}{d\xi^2}=0.$$

Коефіцієнти $C_K(\tau)$ визначаємо зі системи

$$[M\tilde{U}_N,\varphi_s]=[f_1,\varphi_s] \tag{10}$$

при початкових умовах $C_K(0)=0$, $C_K'(0)=0$, $K=1,\dots,N$. У матричному вигляді (10) запишемо як

$$C''(\tau)+A(\tau)C'(\tau)+B(\tau)C(\tau)=F(\tau), \tag{11}$$

причому початкові умови задаються нульовими матрицями. Використовуючи початкові умови та вводячи позначення

$$C''(\tau)=Z(\tau)\,,\; C'(\tau)=\int\limits_0^{\tau} Z(v)dv\,,\; C(\tau)=\int\limits_0^{\tau}(\tau-v)\,Z(v)\,dv,$$

(II) можна записати у вигляді еквівалентного йому інтегрального рівняння Вольтера другого роду

$$Z(\tau)=F(\tau)-\int\limits_0^{\tau}\left[A(\tau)+(\tau-v)B(\tau)\right]Z(v)dv. \tag{I2}$$

Виходячи з умов, ядро цього рівняння не має особливості. З цього випливає існування обмеженого розв"язку (I2). Отже, (I0) має єдиний неперервний розв"язок.

Проведемо оцінки норм наближеного розв"язку та його похідних рівномірно по N.

Лема. Якщо виконуються умови (9), то наявна оцінка

$$\|\tilde{U}_N\|_{H^{2,1}(Q_1)}\le P\|f_1\|_{L_2(Q_1)}\,. \tag{I3}$$

Доведення. Домножимо обидві частини (I0) на $e^{-\gamma\tau}C'_s(\tau)$, сумуємо по s від 1 до N і далі інтегруємо по τ від 0 до τ_1. Використовуючи початкові та граничні умови для функції $\tilde{U}_N$, одержуємо

$$\frac{1}{2}e^{-\gamma\tau_1}\int\limits_0^1\left[\frac{\partial\tilde{U}_N}{\partial\tau}\right]^2_{\tau=\tau_1}d\xi+\frac{\gamma}{2}\left(e^{-\gamma\tau}\frac{\partial\tilde{U}_N}{\partial\tau},\frac{\partial\tilde{U}_N}{\partial\tau}\right)+$$
$$+\frac{1}{2}e^{-\gamma\tau_1}\int\limits_0^1 a_1\left[\frac{\partial^2\tilde{U}_N}{\partial\xi^2}\right]^2_{\tau=\tau_1}d\xi+\frac{\gamma}{2}\left(a_1e^{-\gamma\tau}\frac{\partial^2\tilde{U}_N}{\partial\xi^2},\frac{\partial^2\tilde{U}_N}{\partial\xi^2}\right)-$$
$$-\frac{1}{2}\left(\frac{\partial a_1}{\partial\tau}e^{-\gamma\tau}\frac{\partial^2\tilde{U}_N}{\partial\xi^2},\frac{\partial^2\tilde{U}_N}{\partial\xi^2}\right)+\frac{1}{2}e^{-\gamma\tau_1}\int\limits_0^1 a_2\left[\frac{\partial\tilde{U}_N}{\partial\xi}\right]^2_{\tau=\tau_1}d\xi+$$
$$+\frac{\gamma}{2}\left(a_2e^{-\gamma\tau}\frac{\partial\tilde{U}_N}{\partial\xi},\frac{\partial\tilde{U}_N}{\partial\xi}\right)-\frac{1}{2}\left(\frac{\partial a_2}{\partial\tau}e^{-\gamma\tau}\frac{\partial\tilde{U}_N}{\partial\xi},\frac{\partial\tilde{U}_N}{\partial\xi}\right)+$$
$$+\left(\frac{\partial a_2}{\partial\xi}e^{-\gamma\tau}\frac{\partial\tilde{U}_N}{\partial\xi},\frac{\partial\tilde{U}_N}{\partial\tau}\right)+\left(\frac{\partial a_3}{\partial\xi}e^{-\gamma\tau}\frac{\partial\tilde{U}_N}{\partial\tau},\frac{\partial\tilde{U}_N}{\partial\tau}\right)-$$
$$-\left(\frac{\partial a_3}{\partial\tau}e^{-\gamma\tau}\frac{\partial\tilde{U}_N}{\partial\xi},\frac{\partial\tilde{U}_N}{\partial\tau}\right)=\left(f_1e^{-\gamma\tau},\frac{\partial\tilde{U}_N}{\partial\tau}\right). \tag{I4}$$

Оцінимо, користуючись нерівністю $|ab| \le \frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2}$ і умовами (9), окремі доданки лівої частини та праву частину (I3). Одержуємо

$$\frac{1}{2} e^{-\gamma \tau_1} \int_0^1 \left[\frac{\partial \tilde{U}_N}{\partial \tau} \right]^2_{\tau=\tau_1} d\xi + \frac{1}{2} e^{-\gamma \tau_1} \frac{1}{\ell^4} \int_0^1 \left[\frac{\partial^2 \tilde{U}_N}{\partial \xi^2} \right]^2_{\tau=\tau_1} d\xi +$$

$$+ \frac{1}{2} e^{-\gamma \tau_1} \left[1 - \frac{K_1^2}{a^2} \right] \int_0^1 \frac{a^2}{\ell^2} \left[\frac{\partial \tilde{U}_N}{\partial \xi} \right]^2_{\tau=\tau_1} d\xi + \left[\frac{\gamma}{2} - \frac{3}{2} - K \right] \left(e^{-\gamma \tau} \frac{\partial \tilde{U}_N}{\partial \tau}, \frac{\partial \tilde{U}_N}{\partial \tau} \right) +$$

$$+ \left[\frac{\gamma}{2} \left[1 - \frac{K_1^2}{a^2} \right] - (B+K) - \frac{B^2}{2} - \frac{2K^2 K_1^2}{a^2} \right] \left(\frac{a^2}{\ell^2} e^{-\gamma \tau} \frac{\partial \tilde{U}_N}{\partial \xi}, \frac{\partial \tilde{U}_N}{\partial \xi} \right) +$$

$$+ \left[\frac{\gamma}{2} - 2K \right] \left(\frac{1}{\ell^4} e^{-\gamma \tau} \frac{\partial^2 \tilde{U}_N}{\partial \xi^2}, \frac{\partial^2 \tilde{U}_N}{\partial \xi^2} \right) \le (f_1, f_1). \tag{I5}$$

Виберемо $\gamma > 0$ достатньо великим. Тоді всі доданки зліва в (I5) будуть невід"ємними, звідки випливає рівномірна по N обмеженість норм

$$\left(\frac{\partial \tilde{U}_N}{\partial \tau}, \frac{\partial \tilde{U}_N}{\partial \tau} \right) \le P^2(f_1, f_1), \quad \left(\frac{a^2}{\ell^2} \frac{\partial \tilde{U}_N}{\partial \xi}, \frac{\partial \tilde{U}_N}{\partial \xi} \right) \le P^2(f_1, f_1),$$

$$\left(\frac{1}{\ell^4} \frac{\partial^2 \tilde{U}_N}{\partial \xi^2}, \frac{\partial^2 \tilde{U}_N}{\partial \xi^2} \right) \le P^2(f_1, f_1). \tag{I6}$$

Із оцінок (I6) на основі теореми про слабу компактність випливає існування підпослідовності індексів N_K такої, що $\partial \tilde{U}_{N_K} / \partial \tau$, $\partial \tilde{U}_{N_K} / \partial \xi$, $\partial^2 \tilde{U}_{N_K} / \partial \xi^2$ слабо збігаються до $\partial U / \partial \tau$, $\partial U / \partial \xi$, $\partial^2 U / \partial \xi^2$. При цьому з огляду на те, що оператор вкладення цілком неперервний, $\tilde{U}_{N_K}$ сильно збігається до U. Для граничної функції справедлива оцінка

$$\| U \|_{H^{2,1}(Q_1)} \le P \| f_1 \|_{L_2(Q_1)}.$$

Функція U – шуканий узагальнений розв"язок змішаної задачі [2].

I. Драгиева Н.А. Применение метода Галеркина к решению волнового уравнения в области с подвижными границами. – Журн. вычислит. математики и мат. физики, 1975, I5, № 4, с. 946-956.
2. Михайлов В.П. Дифференциальные уравнения в частных производных. – М.: Наука, I983. – 424 с.

Стаття надійшла до редколегії 08.03.84