УДК 517.946

В.М.Цимбал

НЕЛОКАЛЬНА ЗАДАЧА ДЛЯ СИНГУЛЯРНО ЗБУРЕНОГО ПАРАБОЛІЧНОГО РІВНЯННЯ

В області $D=\{(x,t):0\leq x\leq \ell, 0\leq t\leq T\}$ розглянемо задачу

$$L_\varepsilon u \equiv \frac{\partial u}{\partial t}-\varepsilon^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+a(x)u=f(x,t), \tag{1}$$

$$u(0,t)=0\,,\; u(\ell,t)=0,\; u(x,0)+\beta u(x,T)=0, \tag{2}$$

де $\varepsilon>0$ – малий параметр.

Нехай виконуються умови:

1) $a(x)$, $f(x,t)$ – достатньо гладкі, що забезпечує можливість проведення подальших викладок;

2) $a(x)>0\ (0\leq x\leq \ell)$, $\beta^2\leq 1$, $f(x,0)+\beta f(x,T)=0$.

Зауважимо, що задача (1), (2) при виконанні умов 1), 2) має і притому єдиний розв"язок, що випливає з результатів праці [1].

Побудуємо асимптотичне розвинення розв"язку задачі (1), (2) за степенями малого параметра ε, при цьому використовуємо метод примежового шару [3]. Відзначимо, що випадки $\beta=0$ досліджено у праці [7], $\beta=-1$ методом примежового шару – у працях [2, 4], а методом регуляризації у праці [6].

Асимптотичне розвинення розв"язку задачі (1), (2) шукаємо у виді

$$u(x,t,\varepsilon)=\sum_{i=0}^{N}\varepsilon^i\big(V_i(x,t)+\Pi_i(\xi,t)+Q_i(\eta,t)\big)+R_N(x,t,\varepsilon), \tag{3}$$

де $\xi=x/\varepsilon$; $\eta=(\ell-x)/\varepsilon$; N – натуральне число – точність асимптотики, функції, що входять у (3), визначені нижче.

Рівняння для знаходження регулярної частини асимптотики одержуємо, застосовуючи стандартну процедуру методу збурень

$$\frac{\partial V_0}{dt}+a(x)V_0=f(x,t),\ \frac{\partial V_i}{\partial t}+a(x)V_i=\frac{\partial^2 V_{i-2}}{\partial x^2}\ \ (i=1,\dots,N). \tag{4}$$

Тут і надалі для скорочення запису вважаємо, що функція з від"ємним індексом тотожно дорівнює нулю.

Опишемо, як одержуються рівняння для визначення функцій $\Pi_i(\xi,t)\ (i=0,\dots,N)$. В операторі L_ε зробимо регуляризуюче перетворення $\xi = x/\varepsilon$ і розвинемо коефіцієнт $b(x)$ у скінченну стрічку Тейлора в околі $x=0$. Одержаний таким чином оператор позначимо M_ε. Зрівнюючи в $M_\varepsilon\left(\sum_{i=0}^{N} \varepsilon^i \Pi_i(\xi,t)\right)=0$ коефіцієнти при однакових степенях ε дістаємо рівняння для визначення $\Pi_i(\xi,t)$

$$\frac{\partial \Pi_i}{\partial t} - \frac{\partial^2 \Pi_i}{\partial \xi^2} + a(0)\ \Pi_i = g_i(\xi,t)\,(\ i=0,\ldots,N), \tag{5}$$

де $g_0(\xi,t)=0$, $g_i(\xi,t)\ (i=1,\ldots,N)$ лінійно виражаються через $\Pi_j(\xi,t)\ (j<i)$.

Рівняння для визначення $Q_i(\eta,t)\,(i=0,\ldots,N)$ одержуємо аналогічно (регуляризуюче перетворення у околі $x=\ell, \eta=(\ell-x)/\varepsilon$)

$$\frac{\partial Q_i}{\partial t} - \frac{\partial^2 Q_i}{\partial \eta^2} + a(\ell)Q_i = h_i(\eta,t), \tag{6}$$

де $h_i(\eta,t)\,(i=0,\ldots,N)$ легко виписати в явному вигляді.

Рекурентні процеси визначення функцій, що входять у (3), зв"язані між собою. Для знаходження цього зв"язку використаємо (3) і умови (2). У результаті записуємо

$$V_i(x,0)+\beta V_i(x,T)=0\ \ (i=0,\ldots,N), \tag{7}$$

$$\Pi_i(0,t)=-V_i(0,t),\ \Pi_i(\xi,0)+\beta\Pi_i(\xi,T)=0\ (i=0,\ldots,N), \tag{8}$$

$$Q_i(0,t)=-V_i(\ell,t),\ Q_i(\eta,0)+\beta Q_i(\eta,T)=0\ (\,i=0,\ldots,N). \tag{9}$$

Отже, функції $V_i(x,t)$ визначаємо з розв"язування граничних задач (4), (7) для звичайних диференціальних рівнянь. Функції $\Pi_i(\xi,t)$ і $Q_i(\eta,t)$ шукаємо як розв"язки відповідно задач (5), (8) і (6), (9) для параболічних рівнянь. Функції визначають рекурентно у такому порядку: $V_0(x,t)$, $\Pi_0(\xi,t)$, $Q_0(\eta,t)$, $V_1(x,t)$ і т.д. Однозначна розв"язальність задач (4), (7) очевидна. Функції $\Pi_i(\xi,t)$ і $Q_i(\eta,t)$ є функціями типу примежового шару в околі меж відповідно $x=0$ та $x=\ell$. Доведення цього проводиться аналогічно [2, 4] (суттєво використовується друга з умов 2)) і тому опускається.

Залишковий член є розв"язком задачі аналогічної задачі (I), (2). Методом інтегралів енергії [5] одержана оцінка

$$\|R_N\|_{L_2(D)} \leq C\varepsilon^{N+1}, \tag{10}$$

де константа C не залежить від ε.

На закінчення сформулюємо результат роботи.

<u>Теорема</u>. Нехай виконуються умови I), 2). Тоді розв"язок задачі (I), (2) допускає асимптотичне розвинення (3), де $U_i(x,t)$, функції типу примежового шару $\Pi_i(\xi,t)$ та $Q_i(\eta,t)$ визначаються рекурентно і є розв"язками відповідно задач (4), (7); (5), (8); (6), (9), залишковий член $R_N(x,t,\varepsilon)$ допускає оцінку (I0).

I. Вабищевич П.Н. Нелокальные параболические задачи и обратная задача теплопроводности. - Дифференциальные уравнения, 1981, 17, № 7, с. 1193-1199. 2. Васильева А.Б., Дворянинов С.В. О периодических решениях сингулярно возмущенных уравнений параболического типа. - Науч. тр. Куйбышевского гос. пед. ин-та, 1979, № 232, с. 145-154. 3. Вишик М.И., Люстерник Л.А. Регулярное вырождение и пограничный слой для линейных дифференциальных уравнений с малым параметром. - Успехи мат. наук, 1957, 12, № 5, с. 3-122. 4. Дворянинов С.В. Об асимптотике периодических решений сингулярно возмущенных уравнений параболического типа. - М., 1978. - 18 с. Рукопись деп. в ВИНИТИ, № 3535. 5. Курант Р. Уравнения с частными производными. - М.: Мир, 1964. - 840 с. 6. Ломов С.А. Введение в общую теорию сингулярных возмущений. - М.: Наука, 1981.- 400 с. 7. Треногин В.А. Об асимптотике решения почти линейных параболических уравнений с параболическим погранслоем. - Успехи мат. наук, 1961, 12, № I, с. 163-170.

Стаття надійшла до редколегії 01.09.82

УДК 517.946

В.М.Флюд

ЗМІШАНА ЗАДАЧА ДЛЯ СИНГУЛЯРНО ЗБУРЕНОГО РІВНЯННЯ ГІПЕРБОЛІЧНОГО ТИПУ

В області $D=\{(x,t): 0\leq x\leq \ell, 0\leq t\leq T, T>0, \ell>0\}$ розглянемо задачу

$$\varepsilon\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)+a(x,t)\frac{\partial u}{\partial t}+b(x,t)\frac{\partial u}{\partial x}+c(x,t)u=f(x,t), \tag{1}$$

$$u(x,0;\varepsilon)=\varphi(x),\ u_t(x,0;\varepsilon)=\psi(x), \tag{2}$$

$$u(0,t;\varepsilon)=\mu_1(t),\ u(\ell,t;\varepsilon)=\mu_2(t), \tag{3}$$

де $0<\varepsilon\ll 1$ - малий параметр.