$$\| R_N \|_{L_2(D)} \leq C\varepsilon^{N+1}, \tag{10}$$

де константа C не залежить від ε.

На закінчення сформулюємо результат роботи.

Теорема. Нехай виконуються умови I), 2). Тоді розв"язок задачі (I), (2) допускає асимптотичне розвинення (3), де $U_i(x,t)$, функції типу примежового шару $\Pi_i(\xi,t)$ та $Q_i(\eta,t)$ визначаються рекурентно і є розв"язками відповідно задач (4), (7); (5), (8); (6), (9), залишковий член $R_N(x,t,\varepsilon)$ допускає оцінку (I0).

I. Вабищевич П.Н. Нелокальные параболические задачи и обратная задача теплопроводности. - Дифференциальные уравнения, 1981, 17, № 7, с. 1193-1199. 2. Васильева А.Б., Дворянинов С.В. О периодических решениях сингулярно возмущенных уравнений параболического типа. - Науч. тр. Куйбышевского гос. пед. ин-та, 1979, № 232, с. 145-154. 3. Вишик М.И., Люстерник Л.А. Регулярное вырождение и пограничный слой для линейных дифференциальных уравнений с малым параметром. - Успехи мат. наук, 1957, 12, № 5, с. 3-122. 4. Дворянинов С.В. Об асимптотике периодических решений сингулярно возмущенных уравнений параболического типа. - М., 1978. - 18 с. Рукопись деп. в ВИНИТИ, № 3535. 5. Курант Р. Уравнения с частными производными. - М.: Мир, 1964. - 840 с. 6. Ломов С.А. Введение в общую теорию сингулярных возмущений. - М.: Наука, 1981.- 400 с. 7. Треногин В.А. Об асимптотике решения почти линейных параболических уравнений с параболическим погранслоем. - Успехи мат. наук, 1961, 12, № I, с. 163-170.

Стаття надійшла до редколегії 01.09.82

УДК 517.946

В.М.Флюд

ЗМІШАНА ЗАДАЧА ДЛЯ СИНГУЛЯРНО ЗБУРЕНОГО РІВНЯННЯ ГІПЕРБОЛІЧНОГО ТИПУ

В області $D=\{(x,t): 0\leq x\leq \ell, 0\leq t\leq T, T>0, \ell>0\}$ розглянемо задачу

$$\varepsilon\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)+a(x,t)\frac{\partial u}{\partial t}+b(x,t)\frac{\partial u}{\partial x}+c(x,t)u=f(x,t), \tag{I}$$

$$u(x,0;\varepsilon)=\varphi(x),\ u_t(x,0;\varepsilon)=\psi(x), \tag{2}$$

$$u(0,t;\varepsilon)=\mu_1(t),\ u(\ell,t;\varepsilon)=\mu_2(t), \tag{3}$$

де $0<\varepsilon\ll 1$ - малий параметр.

Методом примежового шару [2, 3], застосовуючи функції кутового примежового шару, побудуємо асимтотичний до деякого порядку $N>0$ розклад розв"язку задачі (I) - (3).

Нехай виконуються умови:

I) всі дані задачі (I)-(3) достатньо гладкі для справедливості проведених нижче викладок;

2) $a(x,t)>0\ \forall(x,t)\in D,\ b(0,t)<0,\ b(\ell,t)>0\ \forall t\in[0,T]$;

3) справедливі такі умови узгодженості:

$$\varphi(0)=\mu_1(0)\,,\ \Psi(0)=\mu_1'(0)\,,$$

$$\varphi(\ell)=\mu_2(0)\,,\ \Psi(\ell)=\mu_2'(0)\,,$$

$$\varphi''(0)=\mu_1''(0)\,,\ \varphi''(\ell)=\mu_2''(0)\,,$$

$$a(0,0)\Psi(0)+b(0,0)\varphi'(0)+c(0,0)\varphi(0)=f(0,0),$$

$$a(\ell,0)\Psi(\ell)+b(\ell,0)\varphi'(\ell)+c(\ell,0)\varphi(\ell)=f(\ell,0);$$

4) $|b(x,t)|<a(x,t)\ \forall(x,t)\in D$.

Умови 2), 3), 4) відіграють важливу роль при побудові функцій примежових шарів різної природи, які виникають у задачі та під час оцінки залишкового члена.

Змішана задача виду (I)-(3) розглянута М.Г.Джавадовим [4] (у випадку $n>2$ незалежних змінних) і Р.Гілом [6] (у випадку двох незалежних змінних) за умови, що функція $b(x,t)$ одного знака в розглядуваній області. Асимптотику розв"язку порядку $N>0$ вони будували без використання функцій кутового примежового шару, але на дані задачі накладались більш жорсткі умови узгодженості.

Асимптотичний розклад розв"язку задачі (I)-(3) шукаємо у вигляді

$$u(x,t;\varepsilon)=\sum_{i=0}^{N}\varepsilon^i v_i(x,t)+\varepsilon\sum_{i=0}^{N}\varepsilon^i\Pi_i(x,\tau)+\sum_{i=0}^{N}\varepsilon^i Q_i(\xi,t)+$$
$$+\sum_{i=0}^{N}\varepsilon^i Q_i^*(\zeta,t)+\sum_{i=0}^{N}\varepsilon^i P_i(\xi,\tau)+\sum_{i=0}^{N}\varepsilon^i P_i^*(\zeta,\tau)+R_N(x,t;\varepsilon), \tag{4}$$

де $\tau=\dfrac{t}{\varepsilon}$, $\xi=\dfrac{x}{\varepsilon}$; $\zeta=\dfrac{\ell-x}{\varepsilon}$ - регуляризуючі перетворення, функції, що входять у (4), визначимо нижче.

Регулярна частина асимптотики $V(x,t;\varepsilon)=\sum\limits_{i=0}^{N}\varepsilon^i V_i(x,t)$ визначається із задач (тут і надалі для скорочення запису вважаємо, що функція з від"ємним індексом тотожно дорівнює нулеві)

$$\begin{cases} a(x,t)\dfrac{\partial V_k}{\partial t}+b(x,t)\dfrac{\partial V_k}{\partial x}+c(x,t)V_k=f_k(x,t), \\ V_k(x,0)=\varphi_k(x), \qquad (k=\overline{0,N}), \end{cases} \tag{5}$$

де $f_0(x,t)=f(x,t),\ f_k(x,t)=-\dfrac{\partial^2 V_{k-1}}{\partial t^2}+\dfrac{\partial^2 V_{k-1}}{\partial x^2},\ (k\geq 1), \varphi_0(x)=\varphi(x),$

$$\varphi_k(x)=-\Pi_{k-1}(x,0),\ (k\geq 1).$$

Функції $\Pi(x,\tau;\varepsilon)=\varepsilon\sum\limits_{i=0}^{N}\varepsilon^i\Pi_i(x,\tau)$, $Q(\xi,t;\varepsilon)=\sum\limits_{i=0}^{N}\varepsilon^i Q_i(\xi,t)$, $Q^*(\zeta,t;\varepsilon)=\sum\limits_{i=0}^{N}\varepsilon^i Q_i^*(\zeta,t)$ повинні в сумі з регулярною частиною асимптотики $V(x,t;\varepsilon)$ задоволняти відповідно другу початкову умову (2), першу та другу граничні умови (3). Задачі для знаходження $\Pi_i(x,\tau), Q_i(\xi,t), Q_i^*(\zeta,t)$ отримуємо [1] стандартним способом. Вони мають вигляд

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2\Pi_k}{\partial\tau^2}+a(x,0)\dfrac{\partial\Pi_k}{\partial\tau}=\pi_k(x,\tau), \\ \dfrac{\partial\Pi_k}{\partial\tau}(x,0)=\psi_k(x),\ \Pi_k(x,\tau)\xrightarrow[\tau\to\infty]{}0, \end{cases} \tag{6}$$

де $\pi_k(x,\tau)$ – деяка лінійна комбінація $\Pi_s(x,\tau)$ $(s<k)$ і їх похідних, причому $\pi_0(x,\tau)\equiv 0;\ \psi_0(x)=\psi(x)-\dfrac{\partial V_0}{\partial t}(x,0),\ \psi_k(x)=-\dfrac{\partial V_k}{\partial t}(x,0)(k\geq 1);$

$$-\frac{\partial^2 Q_k}{\partial\xi^2}+b(0,t)\frac{\partial Q_k}{\partial\xi}=q_k(\xi,t),$$

$$Q_k(0,t)=\mu_{1k}(t),\ Q_k(\xi,t)\xrightarrow[\xi\to\infty]{}0,\ (k=\overline{0,N}); \tag{7}$$

$$-\frac{\partial^2 Q_k^*}{\partial\zeta^2}-b(\ell,t)\frac{\partial Q_k^*}{\partial\zeta}=q_k^*(\zeta,t),$$

$$Q_k^*(0,t)=\mu_{2k}(t),\ Q_k^*(\zeta,t)\xrightarrow[\zeta\to\infty]{}0,\ (k=\overline{0,N}); \tag{8}$$

$q_k(\xi,t)$ і $q_k^*(\zeta,t)$ певним чином виражаються відповідно через $Q_s(\xi,t)$ і $Q_s^*(\zeta,t)$ $(s<k)$, причому $q_0(\xi,t)\equiv 0$, $q_0^*(\zeta,t)\equiv 0$, $\mu_{10}(t)=\mu_1(t)-V_0(0,t)$, $\mu_{20}=\mu_2(t)-V_0(\ell,t)$, $\mu_{1k}(t)=-V_k(0,t)$, $\mu_{2k}(t)=-V_k(\ell,t)$, $(k\geq 1)$.

Таким чином, функції $\Pi_i(x,\tau), Q_i(\xi,t), Q_i^*(\zeta,t)$ знаходять відповідно з (6) – (8) як розв"язки задач для звичайних диференціальних рівнянь (x і t у відповідних задачах – параметри). Легко переконатись, що при виконанні умови 2) ці функції являються функціями примежового шару.

Функція $\Pi(x,\tau;\varepsilon)$, задовольняючи другу початкову умову з $V(x,t;\varepsilon)$, вносить нев"язку в граничні умови при $x=0$ і $x=\ell$. Аналогічно функції $Q(\xi,t;\varepsilon)$ і $Q^*(\zeta,t;\varepsilon)$ вносять нев"язки в початкові умови. Для їх усунення будують функції кутових примежових шарів $P(\xi,\tau;\varepsilon)=\sum_{i=0}^{N}\varepsilon^i P_i(\xi,\tau)$ і $P^*(\zeta,\tau;\varepsilon)=\sum_{i=0}^{N}\varepsilon^i P_i^*(\zeta,\tau)$ які відіграють роль відповідно в точках $(0,0)$ і $(\ell,0)$.

Розглянемо кутовий примежовий шар $P(\xi,\tau;\varepsilon)$, а $P^*(\zeta,\tau;\varepsilon)$ будуємо аналогічно. Враховуючи сказане, для знаходження $P_k(\xi,\tau)$ записуємо задачі

$$\frac{\partial^2 P_k}{\partial\tau^2}-\frac{\partial^2 P_k}{\partial\xi^2}+a(0,0)\frac{\partial P_k}{\partial\tau}+b(0,0)\frac{\partial P_k}{\partial\xi}=g_k(\xi,\tau),$$

$$P_k(\xi,0)=-Q_k(\xi,0),\ \frac{\partial P_k}{\partial\tau}(\xi,0)=-\frac{\partial Q_{k-1}}{\partial t}(\xi,0),$$

$$P_k(0,\tau)=-\Pi_{k-1}(0,\tau),\ P_k(\xi,\tau)\xrightarrow[\xi,\tau\to\infty]{}0, \qquad (9)$$

де $g_k(\xi,\tau)$ лінійно виражається через $P_s(\xi,\tau)$ $(s<k)$ і їх похідні, причому $g_0(\xi,\tau)\equiv 0$.

Отже, для визначення функцій $P_k(\xi,\tau)$ $(k=\overline{0,N})$ маємо граничну задачу в чверті площини для гіперболічного рівняння другого порядку з постійними коефіцієнтами. Записавши явний вигляд розв"язків задач (6), (7), можна переконатись, що початкові та гранична умови задачі (9) узгоджені в кутовій точці $(0,0)$.

Розв"язок задачі (9) можна записати в явному вигляді за допомогою функції Рімана [5]. Доведемо лему, аналогічну лемі з праці [4], і покажемо, що $P_k(\xi,\tau)$ дійсно функції кутового примежового шару. Для залишкового члена $R_N(x,t;\varepsilon)$ методом інтегралів енергії [5] одержимо оцінку

$$\| R_N(x,t;\varepsilon)\|_{L_2(D)}\leq C\varepsilon^{N+1}. \qquad (10)$$

Сформулюємо цей результат у вигляді теореми.

Теорема. Нехай виконуються умови 1) – 4). Тоді розв"язок задачі (1)-(3) допускає асимптотичне зображення виду (4), де функції $V_i(x,t)$ знаходяться як розв"язки задач (5), звичайні примежові шари $\Pi_i(x,\tau)$, $Q_i(\xi,t)$, $Q_i^*(\zeta,t)$ являються відповідно розв"язками задач (6), (7), (8); $P_i(\xi,\tau)$, $P_i^*(\zeta,\tau)$ – функції кутового примежового шару, залишковий член задовольняє (10).

Висловлюємо вдячність В.М.Цимбалу за керівництво роботою.

1. Бутузов В.Ф. Угловой погранслой в смешанных сингулярно возмущенных задачах для гиперболических уравнений. – Мат. сб., 1977, 104, № 3, с. 460-485. 2. Васильева А.Б., Бутузов В.Ф. Асимптотические разложения решений сингулярно возмущенных уравнений. – М.: Наука, 1973. – 278 с. 3. Вишик М.И., Люстерник Л.А. Регулярное вырождение и пограничный слой для линейных дифференциальных уравнений с малым параметром. – Успехи мат. наук, 1957, 12, № 5, с. 3-122. 4. Джавадов М.Г. Смешанная задача для гиперболического уравнения с малым параметром при старших производных. – Докл. АН СССР, 1963, 152, № 4, с. 790-793. 5. Курант Р. Уравнения с частными производными. – М.: Мир, 1964. – 830 с. 6. Geel R. On Initial-Boundary Value Problems of Hyperbolic Type in Singular Perturbation Theory.– In.: Report of the Mat. Institute of Amsterdam, 1975, p.1-30.

Стаття надійшла до редколегії 18.02.85

УДК 517.946

Г.П.Лопушанська

РОЗВ"ЯЗОК ДРУГОЇ КРАЙОВОЇ ЗАДАЧІ ДЛЯ ПАРАБОЛІЧНОГО РІВНЯННЯ ДРУГОГО ПОРЯДКУ У ПРОСТОРІ УЗАГАЛЬНЕНИХ ФУНКЦІЙ

У ряді праць [3 – 5] доведено існування розв"язку загальної параболічної крайової задачі в різних функціональних просторах, у деяких просторах узагальнених функцій. За допомогою функції Гріна і фундаментальної функції побудуємо розв"язок другої крайової задачі для параболічного рівняння другого порядку у просторі узагальнених функцій D'.

Нехай Ω_0 – область в R^n, обмежена замкненою $n-1$-вимірною поверхнею Ω_1, класу C^∞; $Q_i=[0,T]\times\Omega_i$, $i=0,1$; $D(\bar{\Omega}_0)$, $D(\bar{Q}_0)$, $D(Q_1)$ – простори нескінченно диференційованих