функції $V_i(x,t)$ знаходяться як розв"язки задач (5), звичайні примежові шари $\Pi_i(x,\tau)$, $Q_i(\xi,t)$, $Q_i^*(\zeta,t)$ являються відповідно розв"язками задач (6), (7), (8); $P_i(\xi,\tau)$, $P_i^*(\zeta,\tau)$ - функції кутового примежового шару, залишковий член задовольняє (I0).

Висловлюємо вдячність В.М.Цимбалу за керівництво роботою.

I. Бутузов В.Ф. Угловой погранслой в смешанных сингулярно возмущенных задачах для гиперболических уравнений. - Мат. сб., 1977, I04, № 3, с. 460-485. 2. Васильева А.Б., Бутузов В.Ф. Асимптотические разложения решений сингулярно возмущенных уравнений. - М.: Наука, 1973. - 278 с. 3. Вишик М.И., Люстерник Л.А. Регулярное вырождение и пограничный слой для линейных дифференциальных уравнений с малым параметром. - Успехи мат. наук, 1957, I2, № 5, с. 3-I22. 4. Джавадов М.Г. Смешанная задача для гиперболического уравнения с малым параметром при старших производных. - Докл. АН СССР, 1963, I52, № 4, с. 790-793. 5. Курант Р. Уравнения с частными производными. - М.: Мир, 1964. - 830 с. 6. Geel R. On Initial-Boundary Value Problems of Hyperbolic Type in Singular Perturbation Theory. - In.: Report of the Mat. Institute of Amsterdam, 1975, p.1-30.

Стаття надійшла до редколегії I8.02.85

УДК 5I7.946

Г.П.Лопушанська

РОЗВ"ЯЗОК ДРУГОЇ КРАЙОВОЇ ЗАДАЧІ ДЛЯ ПАРАБОЛІЧНОГО РІВНЯННЯ ДРУГОГО ПОРЯДКУ У ПРОСТОРІ УЗАГАЛЬНЕНИХ ФУНКЦІЙ

У ряді праць [3 - 5] доведено існування розв"язку загальної параболічної крайової задачі в різних функціональних просторах, у деяких просторах узагальнених функцій. За допомогою функції Гріна і фундаментальної функції побудуємо розв"язок другої крайової задачі для параболічного рівняння другого порядку у просторі узагальнених функцій D'.

Нехай Ω_0 - область в R^n, обмежена замкненою $n-1$ -вимірною поверхнею Ω_1, класу C^∞; $Q_i=[0,T]\times\Omega_i$, $i=0,1$; $D(\bar{\Omega}_0)$, $D(\bar{Q}_0)$, $D(Q_1)$ - простори нескінченно диференційованих функцій відповідно у $\bar{\Omega}_0 = \Omega_0 \cup \Omega_1$, $\bar{Q}_0$, Q_1 . В $\bar{Q}_0$ розглядаємо рівномірно параболічний оператор

$$L\left(t,x,\frac{\partial}{\partial t},\frac{\partial}{\partial x}\right) \equiv \frac{\partial}{\partial t} - \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(t,x)\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} a_i(t,x)\frac{\partial}{\partial x_i} + a_0(t,x)$$

з коефіцієнтами $a_{ij}(t,x)$, $a_i(t,x)$, $a_0(t,x)$ із простору $D(\bar{Q}_0)$.

Для довільних $u, v \in D(\bar{Q}_0)$ наявна формула Гріна

$$\int_{Q_0} vLu\,dt\,dx - \int_{Q_1} Cv\,u\,dt\,dx + \int_{\Omega_0} v(0,x)u(0,x)\,dx =$$

$$= \int_{Q_0} L^* v\,u\,dt\,dx - \int_{Q_1} v \cdot Bu\,dt\,dx + \int_{\Omega_0} v(T,x)u(T,x)\,dx ,$$

де L^* – оператор, формально спряжений до оператора L ;

$$B\left(t,x,\frac{\partial}{\partial x}\right)u = a(t,x)\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(t,x)n_i(x)\frac{\partial u}{\partial x_j} + \beta(t,x)u ;$$

$$C\left(t,x,\frac{\partial}{\partial x}\right)u = a(t,x)\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(t,x)n_i(x)\frac{\partial u}{\partial x_j} + \left[\beta(t,x) + b(t,x)\right]u ;$$

$$a(t,x) = \left[\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n} a_{ij}(t,x)n_i(x)\right)^2\right]^{1/2} ;$$

$$b(t,x) = \sum_{i=1}^{n}\left[a_i(t,x) + \sum_{j=1}^{n}\frac{\partial a_{ij}(t,x)}{\partial x_j}\right]n_i(x) ;$$

$\beta(t,x) \in D(Q_1)$, $\beta|_{Q_1} > 0$, $n_i(x)$ – напрямні косинуси зовнішньої нормалі $n(x)$ до Ω_1 у точці x .

Нехай $\mathring{D}(\bar{Q}_i) = \left\{\varphi(t,x) \in D(\bar{Q}_i) : \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^k \varphi(t,x)\Big|_{t=T} = 0,\ k = 0,1,\ldots\right\}$,

$i = 0,1$; $X_2(\bar{Q}_0) = \left\{\varphi(t,x) \in \mathring{D}(\bar{Q}_0) : C\varphi\,\big|_{Q_1} = 0\right\}$, $Z(\bar{Q}_0)$ – простір функцій, який задовольняє умову $X_2(\bar{Q}_0) \subset Z(\bar{Q}_0) \subset \mathring{D}(\bar{Q}_0)$; $D'(\bar{Q}_i)$, $\mathring{D}'(\bar{Q}_i)$, $D'(\bar{\Omega}_0)$, $Z'(\bar{Q}_0)$ – простори лінійних неперервних функціоналів (узагальнених функцій [1] на відповідних просторах функцій; $(\varphi, F)_0$ – дія узагальненої функції $F \in \mathring{D}'(\bar{Q}_0)$ на основну функцію $\varphi \in \mathring{D}(\bar{Q}_0)$, а також дія $F \in Z'(\bar{Q}_0)$ на $\varphi \in Z(\bar{Q}_0)$, $(\varphi, F)_1$ – дія $F \in \mathring{D}'(Q_1)$ на $\varphi \in \mathring{D}(Q_1)$, $[\varphi, F]_0$ – дія $F \in D'(\bar{\Omega}_0)$ на $\varphi \in D(\bar{\Omega}_0)$.

Здійснимо постановку узагальненої другої крайової задачі.

Нехай $F\in Z'(\bar{Q}_0)$, $F_1\in \overset{\circ}{D}'(Q_1)$, $F_2\in D'(\bar{\Omega}_0)$. Знайти в Q_0 розв"язок задачі

$$Lu=F\ ,\quad Bu\big|_{Q_1}=F_1\ ,\quad u\big|_{t=0}=F_2\ . \tag{I}$$

Узагальнену функцію $u\in \overset{\circ}{D}'(\bar{Q}_0)$ вважаємо розв"язком задачі (I), якщо для довільної $\psi\in X_2(\bar{Q}_0)$

$$(L^*\psi,u)_0=(\psi,F)_0+(\psi,F_1)_1+[\psi(0,x),F_2]\,. \tag{2}$$

Теорема I. Розв"язок другої узагальненої крайової задачі єдиний у просторі $\overset{\circ}{D}'(\bar{Q}_0)$.

Теорема 2. Нехай $F\in Z'(\bar{Q}_0)$, $F_1\in \overset{\circ}{D}'(Q_1)$, $F_2\in D'(\bar{\Omega}_0)$. Функція $u\in \overset{\circ}{D}'(\bar{Q}_0)$ визначена за формулою

$$(\varphi,u)_0=\Big(\int_\tau^T dt\int_{\Omega_0}\varphi(t,x)G(t,x;\tau,y)dx,F\Big)_0+ \tag{3}$$

$$+\Big(\int_\tau^T dt\int_{\Omega_0}\varphi(t,x)G(t,x;\tau,y)\,dx,F_1\Big)_1+\Big[\int_0^T dt\int_{\Omega_0}\varphi(t,x)G(t,x;0,y)dx,F_2\Big],$$
$$\varphi(t,x)\in \overset{\circ}{D}(\bar{Q}_0),$$

де $G(t,x;\tau,y)$ – функція Гріна другої крайової задачі для оператора L є розв"язком узагальненої другої крайової задачі.

Теореми доводяться так само, як і відповідні теореми для узагальнених еліптичних граничних задач [2]. При цьому використовують лему й основні властивості функції Гріна [3, 4].

Теорема 3. Нехай $F=F_2=0$, $F_1\in \overset{\circ}{D}'(Q_1)$. Функція u є розв"язком узагальненої другої крайової задачі в сенсі (2) тоді і тільки тоді, коли

$$Lu(t,x)=0\,,\ (t,x)\in Q_0\,,\ u\big|_{t=0}=0\,, \tag{4}$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{Q_{1\varepsilon}}\varphi(t,x_\varepsilon)\,B\Big(t,x_\varepsilon,\frac{\partial}{\partial x_\varepsilon}\Big)u(t,x_\varepsilon)dt\,dx_\varepsilon=(\varphi,F_1)_1 \tag{5}$$

для довільної $\varphi(t,x)\in \overset{\circ}{D}(Q_1)$ (тут $Q_{1\varepsilon}=[\varepsilon,T]\times\Omega_{1\varepsilon}$, $\Omega_{1\varepsilon}$ – паралельна до Ω_1 поверхня в Ω_0 ; $x_\varepsilon=x-\varepsilon\nu(x)$, якщо $x_\varepsilon\in\Omega_{1\varepsilon}$, $x\in\Omega_1$; $\nu(x)$ – орт нормалі $n(x)$; $\varphi(t,x_\varepsilon)\in D(Q_{1\varepsilon})$ – продовження функції $\varphi(t,x)$).

Доведення. Приймаючи у (2) $\psi(t,x)\in D(Q_0)$, дістаємо $Lu=0$ в Q_0, а тоді, як відомо, $u\in D(Q_0)$. Для довільної $\psi\in X_2(\bar{Q}_0)$ записуємо ліву частину (2) як $\int_{Q_0}L^*\psi u\,dt\,dx=$ $=\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\int_{Q_{0\varepsilon}}L^*\psi u\,dt\,dx$ і перетворюємо з допомогою формули Гріна.

Отримуємо $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{\Omega_{0\varepsilon}}\psi(\varepsilon,x)u(\varepsilon,x)dx=0 \ \ \forall\psi(0,x)=\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\psi(\varepsilon,x)\in D(\bar\Omega_0)$ (це означає, що $\lim\limits_{t\to 0}u(t,x)=0$) і

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{Q_{1\varepsilon}}[C\psi(t,x_\varepsilon)u(t,x_\varepsilon)-\psi(t,x_\varepsilon)Bu(t,x_\varepsilon)]dtdx_\varepsilon=(\psi,F_1)_1 \ \ \forall\psi\in X_2(\bar Q_0).$$

Для кожної $\varphi(t,x_\varepsilon)\in\mathring{D}(Q_{1\varepsilon})$ при досить малих значеннях ε існує $\psi(t,x)\in X_2(Q_{0\varepsilon})$, така що $\psi(t,x_\varepsilon)=\varphi(t,x_\varepsilon)$ і $C\psi(t,x_\varepsilon)=0$ на $Q_{1\varepsilon}$. Вважаючи, що $\varphi(t,x)=\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\varphi(t,x_\varepsilon)$, із останньої рівності дістаємо (5). Для доведення оберненого твердження досить перевірити, що функція $u(t,x)=(\theta(t-\tau)G(t,x;\tau,y),F_1)_1$ є розв"язком розглядуваної задачі в обох визначеннях. Тут $\theta(t-\tau)=\theta(t)\theta(\tau)\times\theta(t-\tau)\theta(T-t)$, так що $(\varphi(\tau),\theta(t-\tau))=\int_0^t\varphi(\tau)d\tau$, $(\varphi(t),\theta(t-\tau))=\int_\tau^T\varphi(t)dt$ для довільної $\varphi(t)\in D([0,T])$.

<u>Теорема 4</u>. Нехай $F\in Z'(\bar Q_0), F_1\in\mathring{D}'(Q_1),\ F_2\in D'(\bar\Omega_0)$. Узагальнена функція $u\in\mathring{D}'(\bar Q_0)$, визначена формулою

$$(\varphi,u)_0=\Big(\int_\tau^T dt\int\limits_{\Omega_0}\varphi(t,x)\Gamma(t,x;\tau,y)dx,F\Big)_0+ \tag{6}$$

$$+\Big[\int_0^T dt\int\limits_{\Omega_0}\varphi(t,x)\Gamma(t,x;0,y)dx,F_2\Big]+\Big(\int_\tau^T dt\int\limits_{\Omega_0}\varphi(t,x)\Gamma(t,x;\tau,y)dx,R\Big)_1,$$
$$\varphi(t,x)\in\mathring{D}(\bar Q_0),$$

де $\Gamma(t,x;\tau,y)$ – фундаментальна функція оператора L;

$$(g,R)_1=(\varphi_g,F_1)_1-\Big(\int_\tau^T dt\int\limits_{\Omega_1}\varphi(t,x)\Gamma(t,x;\tau,y)dx,F\Big)_0-$$
$$-\Big[\int_0^T dt\int\limits_{\Omega_1}\varphi(t,x)\Gamma(t,x;0,y)dx,F_2\Big]; \tag{7}$$

$g\in\mathring{D}(Q_1),\ \varphi_g\in\mathring{D}(Q_1)$ – розв"язок інтегрального рівняння

$$\frac{1}{2}\varphi(\tau,y)+\int_\tau^T dt\int\limits_{\Omega_1}\varphi(t,x)H(t,x;\tau,y)dx=g(\tau,y), \tag{8}$$

$H(t,x;\tau,y)=B(t,x,\frac{\partial}{\partial x})\Gamma(t,x;\tau,y)$ є розв"язком узагальненої другої крайової задачі.

<u>Доведення</u>. Застосовуючи лему до функцій $u=\theta(t-\tau)\Gamma(t,x;\tau,y)$, $u=\Gamma(t,x;0,y)$, дістаємо $\int_\tau^T dt\int\limits_{\Omega_0}L^*\psi(t,x)\Gamma(t,x;\tau,y)dx-\psi(\tau,y)=$
$=\int_\tau^T dt\int\limits_{\Omega_1}\psi(t,x)B(t,x,\frac{\partial}{\partial x})\Gamma(t,x;\tau,y)dx,\ (\tau,y)\in Q_0,\tau>0$ для кожної $\psi\in X_2(\bar Q_0)$.
Використовуючи (2) і отриману тотожність, можна показати, що узагальнена функція $v\in\mathring{D}'(\bar Q_0)$ така, що для кожної $\varphi\in\mathring{D}(\bar Q_0)$

$(\varphi, v)_0$ дорівнює сумі двох перших доданків у (6), є розв"язком задачі: $Lv = F$, $v|_{t=0} = F_2$, $Bv|_{Q_1} = \widetilde{F}_1$, де $\widetilde{F}_1 \in \overset{\circ}{D}'(Q_1)$ однозначно визначається узагальненими функціями F і F_2. Розв"язок $w(t,x)$ задачі $Lw=0$, $w|_{t=0}=0$, $Bw|_{Q_1} = F_1 - \widetilde{F}_1$ шукаємо у вигляді

$$w(t,x) = (\Theta(t-\tau)\Gamma(t,x;\tau,y), R)_1, \ (t,x) \in Q_0 \qquad (9)$$

з невідомою $R \in \overset{\circ}{D}'(Q_1)$. За теоремою 3 R можна шукати з умови (5), у якій u замінено на w, а F_1 – на $F_1 - \widetilde{F}_1$. Приходимо до (7), (8). Розв"язок вихідної задачі $u = v + w$ має вигляд (6).

I. В л а д и м и р о в В.С. Уравнения математической физики. – М.: Наука, I98I. – 5I2 с. 2. Г у п а л о А.С., Л о п у ш а н с к а я Г.П. Об одном представлении решения обобщенной граничной задачи для эллиптической по Петровскому системы дифференциальных уравнений. – Укр. мат. журн., I985, 37, № I, с. I28–I3I. 3. И в а с и ш е н С.Д. Сопряженные операторы Грина и корректная разрешимость параболических граничных задач в негативных пространствах Гельдера. – Дифференциальные уравнения, I984, № 4, с. 470–48I. 4. Л а д ы ж е н с к а я О.А., С о л о н н и к о в В.А., У р а л ь ц е в а Н.Н. Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. – М.: Наука, I967. – 736 с. 5. Л и о н с Ж.-Л., М а д ж е н е с Э. Неоднородные граничные задачи и их приложения. – М.: Мир, I97I. – 37I с. 6. Ф р и д м а н А. Уравнения с частными производными параболического типа. – М.: Мир, I968. – 427 с.

Стаття надійшла до редколегії I8.02.85

УДК 5I7.946

Г.-В.С.Гупало

ПРО ОДНУ ЗАДАЧУ КОШІ В ПРОСТОРІ УЗАГАЛЬНЕНИХ ФУНКЦІЙ

Нехай x і t – одновимірні дійсні змінні, $-\infty < x < +\infty$, $0 < t < +\infty$. Розглянемо диференціальне рівняння в частинних похідних зі сталими коефіцієнтами:

$$D_t^2 u = a^2 D_x^2 u + c^2 u, \ a > 0. \qquad (I)$$

Замість (I) можна розглядати рівняння, в яке входять похідні першого порядку по x і t зі сталими коефіцієнтами, але воно заміною змінних $u(x,t) = e^{\lambda x + \mu t} v(x,t)$ зводиться до вигляду (I).

Шукаємо розв"язок (I) у вигляді $u = u_t(x)$, де $u_t(x)$ – узагальнена функція на $-\infty < x < +\infty$, яка залежить від параметра t (індекс t в u_t не означає диференціювання по t).