$(\varphi, v)_0$ дорівнює сумі двох перших доданків у (6), є розв"язком задачі: $Lv=F$, $v|_{t=0}=F_2$, $Bv|_{Q_1}=\widetilde{F}_1$, де $\widetilde{F}_1 \in \overset{\circ}{D}'(Q_1)$ однозначно визначається узагальненими функціями F і F_2.
Розв"язок $w(t,x)$ задачі $Lw=0$, $w|_{t=0}=0$, $Bw|_{Q_1}=F_1-\widetilde{F}_1$ шукаємо у вигляді

$$w(t,x)=(\Theta(t-\tau)\Gamma(t,x;\tau,y),R)_1,\ (t,x)\in Q_0 \tag{9}$$

з невідомою $R\in \overset{\circ}{D}'(Q_1)$. За теоремою 3 R можна шукати з умови (5), у якій u замінено на w, а F_1 – на $F_1-\widetilde{F}_1$. Приходимо до (7), (8). Розв"язок вихідної задачі $u=v+w$ має вигляд (6).

I. Владимиров В.С. Уравнения математической физики. – М.: Наука, I98I. – 5I2 с. 2. Гупало А.С., Лопушанская Г.П. Об одном представлении решения обобщенной граничной задачи для эллиптической по Петровскому системы дифференциальных уравнений. – Укр. мат. журн., I985, 37, № I, с. I28–I3I. 3. Ивасишен С.Д. Сопряженные операторы Грина и корректная разрешимость параболических граничных задач в негативных пространствах Гельдера. – Дифференциальные уравнения, I984, № 4, с. 470–48I. 4. Ладыженская О.А., Солонников В.А., Уральцева Н.Н. Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. – М.: Наука, I967. – 736 с. 5. Лионс Ж.-Л., Мадженес Э. Неоднородные граничные задачи и их приложения. – М.: Мир, I97I. – 37I с. 6. Фридман А. Уравнения с частными производными параболического типа. – М.: Мир, I968. – 427 с.

Стаття надійшла до редколегії I8.02.85

УДК 5I7.946

Г.-В.С.Гупало

ПРО ОДНУ ЗАДАЧУ КОШІ В ПРОСТОРІ УЗАГАЛЬНЕНИХ ФУНКЦІЙ

Нехай x і t – одновимірні дійсні змінні, $-\infty<x<+\infty$, $0<t<+\infty$. Розглянемо диференціальне рівняння в частинних похідних зі сталими коефіцієнтами:

$$D_t^2 u=a^2 D_x^2 u+c^2 u,\ a>0. \tag{I}$$

Замість (I) можна розглядати рівняння, в яке входять похідні першого порядку по x і t зі сталими коефіцієнтами, але воно заміною змінних $u(x,t)=e^{\lambda x+\mu t}v(x,t)$ зводиться до вигляду (I).

Шукаємо розв"язок (I) у вигляді $u=u_t(x)$, де $u_t(x)$ – узагальнена функція на $-\infty<x<+\infty$, яка залежить від параметра t (індекс t в u_t не означає диференціювання по t).

В (I) D_x^2 – оператор узагальненого диференціювання, D_t^2 – оператор диференціювання по параметру. Крім того, вимагаємо виконання (I) тільки в сенсі рівності в $\mathcal{D}'$. Задаємо початкові умови: при $t \to +0$ узагальнена функція $u_t(x)$ збігається в $\mathcal{D}'$ до $f(x)$, а $D_t u_t(x)$ збігається в $\mathcal{D}'$ до $g(x)$, де f і g – задані елементи з $\mathcal{D}'$.

Припустивши, що f і g – перетворювані за Лапласом узагальнені функції [5] зі смугами збіжності, що перетинаються, формально одержимо розв"язок за допомогою перетворення Лапласа. Потім покажемо, що цей формальний розв"язок дійсно задоволняє диференціальне рівняння (I) і початкові умови.

При застосуванні перетворення Лапласа розглядаємо t як параметр і x як незалежну змінну. У зв"язку з цим використаємо позначення $L[u_t(x)] = U_t(s)$. Функція $U_t(s)$ – звичайна по t і s, де $0<t<+\infty$ і s змінюється в деякій смузі збіжності $\Omega_u \neq \emptyset$.

Вважаючи, що операції L і D_t комутують, за допомогою перетворення Лапласа і його властивостей (I) перетворимо в

$$D_t^2 U_t(s) = (a^2 s^2 + c^2) U_t(s), \tag{2}$$

загальний розв"язок якого

$$U_t(s) = A(s) e^{-\sqrt{a^2 s^2 + c^2}\, t} + B(s) e^{\sqrt{a^2 s^2 + c^2}\, t}. \tag{3}$$

Нехай $L[f] = F(s)$, якщо $s \in \Omega_f$ і $L[g] = G(s)$, коли $s \in \Omega_g$. Вважаючи, що операція переходу до границі при $t \to +0$ і L переставні, з початкових умов дістаємо при $s \in \Omega_f \cap \Omega_g$ співвідношення

$$F(s) = U_t(s)\Big|_{t\to+0} = A(s) + B(s), \tag{4}$$

$$G(s) = D_t U_t(s)\Big|_{t\to+0} = -\sqrt{a^2 s^2 + c^2}\, A(s) + \sqrt{a^2 s^2 + c^2}\, B(s),$$

з яких визначаємо $A(s)$ і $B(s)$. Підставивши їх в (3), одержимо

$$U_t(s) = \frac{1}{2}\left[F(s) - \frac{G(s)}{\sqrt{a^2 s^2 + c^2}}\right] e^{-\sqrt{a^2 s^2 + c^2}\, t} +$$

$$+ \frac{1}{2}\left[F(s) + \frac{G(s)}{\sqrt{a^2 s^2 + c^2}}\right] e^{\sqrt{a^2 s^2 + c^2}\, t}. \tag{5}$$

Використовуючи властивості, а також таблиці перетворення Лапласа [1, 2, 4, 5, 6], повертаємось від зображень до оригіналів, і бачимо, що розв"язок розглядуваної задачі Коші набуває вигляду (детальних викладок не проводимо внаслідок їх громіздкості)

$$u_t(x)=\frac{1}{2}\left[f(x-at)+f(x+at)\right]+$$

$$+\frac{ct}{a}\left[h(x+at)-h(x-at)\right]+\frac{1}{a}\left[p(x+at)-p(x-at)\right], \tag{6}$$

де

$$h(x)=\frac{I_1\left(c\sqrt{t^2-\frac{x^2}{a^2}}\right)}{\sqrt{t^2-\frac{x^2}{a^2}}}*f(x);$$

$$p(x)=I_0\left(c\sqrt{t^2-\frac{x^2}{a^2}}\right)*g(x);$$

$I_0(z), I_1(z)$ – модифіковані функції Бесселя нульового та першого порядків; $I_0(z)=J_0(iz)$, $I_1(z)=-iJ_1(iz)$, причому $I_0'(z)=I_1(z)$.

Отримавши формально розв"язок (6), безпосередньою перевіркою показуємо, що він задовольняє рівняння (1) в сенсі D' і накладеним початковим умовам. Причому під час перевірки ніде не використовується той факт, що розв"язок і початкові умови належать класові узагальнених функцій перетворюваних за Лапласом (тут також не пишемо викладок, внаслідок їх громіздкості).

Отже, формула (6) дає представлення розв"язку задачі Коші для рівняння (1) і тоді, коли узагальнені функції f і g не є перетворюваними за Лапласом. Якщо f і g – звичайні функції, то формула (6) збігається з відповідним класичним розв"язком [3].

Таким чином, метод перетворення Лапласа при розв"язуванні диференціальних рівнянь у частинних похідних можна використовувати для знаходження вигляду розв"язку навіть у тому випадку, коли задані функції не належать до класу функцій, які допускають перетворення.

1. Бейтмен Г., Эрдейи А. Таблицы интегральных преобразований. – М.: Наука, 1969. – 318 с. 2. Брычков Ю.А., Прудников А.П. Интегральные преобразования обобщенных функций. – М.: Наука, 1977. – 286 с. 3. Будак Б.М., Самарский А.А., Тихонов А.Н. Сборник задач по математической физике. – М.: Наука, 1972. – 687 с. 4. Дёч Г. Руководство к практическому применению преобразования Лапласа и Z – преобразования. – М.: Наука, 1971. – 288 с. 5. Земанян А.Г.

Интегральные преобразования обобщенных функций. - М.: Наука, 1974. - 398 с. 6. Я н к е Е., Э м д е Ф., Л е ш Ф. Специальные функции. - М.: Наука, 1977. - 342 с.

Стаття надійшла до редколегії 27.02.85

УДК 517.946

Т.О.Мельник, В.М.Кирилич

ПРО ОДНУ ЗАДАЧУ ТИПУ СТЕФАНА ДЛЯ СЛАБОЛІНІЙНОЇ ГІПЕРБОЛІЧНОЇ СИСТЕМИ

Розглянемо слаболінійну гіперболічну систему першого порядку у півплощині $t>0$

$$\frac{\partial u_i}{\partial t}+\lambda_i(x,t)\frac{\partial u_i}{\partial x}=F_i(x,t,u),\ i=\overline{1,n},$$
$$u=(u_1(x,t),\ldots,u_n(x,t)). \tag{I}$$

Нехай ℓ_1, ℓ_2 - гладкі криві, задані відповідно рівняннями $x=a(t)$ і $x=b(t)$ $(a(0)=a,\ b(0)=b,$ $a,b - const,\ a(t)<b(t)$ для всіх $t>0)$, а T - задане число.

Припускаємо, що перші k із величин $\lambda_i(a(t),t)-a'(t)$ $(i=\overline{1,n})$ - додатні, решта $n-k$ від"ємні при всіх $t\in[0,T]$. Аналогічні припущення вважаються виконаними і відносно величин $\lambda_i(b(t),t)-b'(t)\ (i=\overline{1,n})$. При цьому $0<k<n$. Випадки $k=0$ і $k=n$ - тривіальні.

Розглянемо таку задачу: в області $G_T=\{(x,t)\in\mathbb{R}^2:$ $a(t)<x<b(t),\ 0<t\le T\}$ знайти розв"язки $u_1(x,t),\ldots,$ $u_n(x,t)$ системи (I) і функції $a(t)$, $b(t)$ на інтервалі $]0,T]$ так, щоб задовольнялись початкові

$$u_i(x,0)=g_i(x)\ (x\in[a,b],\ i=\overline{1,n}), \tag{2}$$

граничні

$$\int\limits_{a(t)}^{b(t)}\sum_{i=1}^{n}\alpha_{si}(x,t)u_i(x,t)dx=h_s(\rho(t),t),\quad s=\overline{1,n} \tag{3}$$

та додаткові умови на ℓ_1 і ℓ_2

$$H_i(\rho(t),t,\rho'(t),u(\rho(t),t))=0,\ i=1,2, \tag{4}$$