Интегральные преобразования обобщенных функций. – М.: Наука, 1974. – 398 с. 6. Я н к е Е., Э м д е Ф., Л е ш Ф. Специальные функции. – М.: Наука, 1977. – 342 с.

Стаття надійшла до редколегії 27.02.85

УДК 517.946

Т.О.Мельник, В.М.Кирилич

ПРО ОДНУ ЗАДАЧУ ТИПУ СТЕФАНА ДЛЯ СЛАБОЛІНІЙНОЇ ГІПЕРБОЛІЧНОЇ СИСТЕМИ

Розглянемо слаболінійну гіперболічну систему першого порядку у півплощині $t>0$

$$\frac{\partial u_i}{\partial t}+\lambda_i(x,t)\frac{\partial u_i}{\partial x}=F_i(x,t,u),\ i=\overline{1,n},$$
$$u=(u_1(x,t),\dots,u_n(x,t)). \tag{I}$$

Нехай ℓ_1, ℓ_2 – гладкі криві, задані відповідно рівняннями $x=a(t)$ і $x=b(t)$ ($a(0)=a$, $b(0)=b$, $a,b-const$, $a(t)<b(t)$ для всіх $t>0$), а T – задане число.

Припускаємо, що перші k із величин $\lambda_i(a(t),t)-a'(t)$ ($i=\overline{1,n}$) – додатні, решта $n-k$ від"ємні при всіх $t\in[0,T]$. Аналогічні припущення вважаються виконаними і відносно величин $\lambda_i(b(t),t)-b'(t)$ ($i=\overline{1,n}$). При цьому $0<k<n$. Випадки $k=0$ і $k=n$ – тривіальні.

Розглянемо таку задачу: в області $G_T=\{(x,t)\in\mathbb{R}^2: a(t)<x<b(t),\ 0<t\le T\}$ знайти розв"язки $u_1(x,t),\dots,u_n(x,t)$ системи (I) і функції $a(t)$, $b(t)$ на інтервалі $]0,T]$ так, щоб задовольнялись початкові

$$u_i(x,0)=g_i(x)\ (x\in[a,b],\ i=\overline{1,n}), \tag{2}$$

граничні

$$\int\limits_{a(t)}^{b(t)}\sum_{i=1}^{n}\alpha_{si}(x,t)u_i(x,t)dx=h_s(p(t),t),\quad s=\overline{1,n} \tag{3}$$

та додаткові умови на ℓ_1 і ℓ_2

$$H_i(p(t),t,p'(t),u(p(t),t))=0,\ i=1,2, \tag{4}$$

де $p(t)=(a(t),b(t))$. Всі задані функції в (I)-(4) - дійсно-значні.

Ця задача є варіантом однофазної двосторонньої задачі типу Стефана для системи (I). Задачі типу Стефана для гіперболічних рівнянь і систем вивчались у працях [2, 3, 5-7, 9-I0]. Нелокальні граничні задачі для системи (I) розглянуті в працях [1, 4, 8].

Задачі типу Стефана для гіперболічних рівнянь і систем з нелокальними інтегральними умовами в літературі не вивчались.

Припустимо додатково, що задані $a'(0)$, $b'(0)$, виконується умова

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11}(a,0)\ldots\alpha_{1k}(a,0)\alpha_{1,k+1}(b,0)\ldots\alpha_{1n}(b,0) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \alpha_{n1}(a,0)\ldots\alpha_{nk}(a,0)\alpha_{n,k+1}(b,0)\ldots\alpha_{nn}(b,0) \end{vmatrix}\neq 0 \tag{5}$$

і умови узгодження рівняння (I), початкових умов (2) і умов (3)-(4):

$$\int_a^b\sum_{i=1}^n\alpha_{si}(x,0)g_i(x)dx=h_s(p,0),\ s=\overline{1,n}\ , \tag{6}$$

$$\sum_{i=1}^n\Big\{\alpha_{si}(b,0)g_i(b)b'(0)-\alpha_{si}(a,0)g_i(a)a'(0)+$$
$$+\int_a^b\Big[\frac{\partial\alpha_{si}(x,0)}{\partial t}g_i(x)+\alpha_{si}(x,0)(-\lambda_i(x,0)g_i'(x)+$$
$$+F_i(x,0,g(x)))\Big]dx\Big\}=$$
$$=(a'(0)+b'(0))\frac{\partial h_s(p,0)}{\partial x}+\frac{\partial h_s(p,0)}{\partial t},\ s=\overline{1,n}\ , \tag{7}$$

$$H_i(p,0,p'(0),g(p))=0,\ i=1,2, \tag{8}$$
$$p=(a,b),\ g=(g_1(x),\ldots,g_n(x)).$$

Теорема. Нехай:
I) коефіцієнти $\lambda_i\in C^1(\overline{G}_{\varepsilon_0}),\ i=\overline{1,n}$, $\overline{G}_{\varepsilon_0}=\{(x,t):a(t)<x<b(t),\ t\in[0,\varepsilon_0]\}$ для деякого $\varepsilon_0>0$;
2) функції $F_i(x,t,u)\in C(\overline{G}_{\varepsilon_0}\times R^n)$, $i=\overline{1,n}$ задовольняють по u локальну умову Ліпшиця:

$\forall \varepsilon > 0, \forall U > 0, \exists L > 0: |F(x,t,\bar{u}) - F(x,t,\bar{\bar{u}})| \leq$
$\leq L|\bar{u} - \bar{\bar{u}}|, \ t \in [0,\varepsilon], \ a \leq x \leq b, \ |\bar{u}|, |\bar{\bar{u}}| \in U, \ \varepsilon \leq \varepsilon_0$;

3) функції $g_i(x) \in C^1[a,b]$, $i = \overline{1,n}$;

4) коефіцієнти $\alpha_{si} \in C^1(\bar{G}_{\varepsilon_0})$, $i = \overline{1,n}$,

$$h_s \in C^1([a,b]^2 \times [0,\varepsilon_0]), \ s = \overline{1,n} ;$$

5) функції $H_i \in C^1([a,b]^2 \times [0,\varepsilon_0] \times [a'(0), b'(0)]^2 \times \mathbb{R}^{2n})$,

$$H'_{ip'(t)}\big|_{t=0} \neq 0, \ i = 1,2 ;$$

6) виконуються умови (5)-(8).

Тоді існує $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0 = T]$ таке, що задача (I)-(4) має в $\bar{G}_\varepsilon$ єдиний неперервний узагальнений розв"язок, визначений для всіх $t \in [0,\varepsilon]$.

Доведення. Задамо $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$, $h > 0$ і позначимо через D^h_ε множину функцій $p = (a,b) \in [C^1[0,\varepsilon]]^2$, для яких

$$|p(t)| < \varepsilon, \ |p'(t) - p'(0)| \leq h, \ 0 \leq t \leq \varepsilon .$$

ε і h вважатимемо настільки малими, щоб виконувались припущення відносно знаків величин $\lambda_i(p(0),0) - p'(0)$ ($i = \overline{1,n}$).

Використовуючи результати праць [I, 4, 6] і умову 2) даної теореми, кожній функції $p \in D^h_\varepsilon$ відповідає неперервний узагальнений розв"язок задачі (I)-(3) в $\bar{G}_\varepsilon$; цей розв"язок позначаємо через $U(x,t;p)$, причому

$$|U(x,t;p)| \leq U_0 = const,$$
$$(x,t) \in \bar{G}_\varepsilon, \ p \in D^h_\varepsilon .$$

Легко довести, що залежність $U(p(t),t;p)$ задовольняє умову Ліпшиця $\exists L \geq 0, \forall p^1, p^2 \in D^h_\varepsilon$:

$$\max_{0 \leq t \leq \varepsilon} |U(p^1(t),t;p^1) - U(p^2(t),t;p^2)| \leq$$

$$\leq L\left[\max_{0 \leq t \leq \varepsilon} |p^1(t) - p^2(t)| + \max_{0 \leq t \leq \varepsilon} |p^{1\prime}(t) - p^{2\prime}(t)|\right].$$

Підставивши $U(x,t;p)$ в (4), згідно з умовою 5) одержимо

$$p'(t) = \bar{H}(p(t),t,U(p(t),t;p)).$$

Розглянемо оператор $B: p \to Bp$, який діє за формулою

$$(Bp)(t) = \int_0^t \bar{H}(\tau, p(\tau), U(p(\tau), \tau; p))d\tau, \; t \in [0, \varepsilon].$$

Шуканий розв"язок оператора B є його нерухомою точкою. З умови узгодження (8) випливає, що коли при фіксованому h, достатньо зменшити ε , то оператор B відображає D_ε^h в себе і в метриці $[C^1[0,\varepsilon]]^2$ – стискуючий. Звідси за теоремою Банаха випливає існування і єдиність шуканого розв"язку, який можна знайти методом ітерацій. Теорема доведена.

1. Мельник З.О., Кирилич В.М. Задачи без начальных условий с интегральными ограничениями для гиперболических уравнений и систем на прямой. – Укр. мат. журн., 1983, 35, № 6, с. 721-727. 2. Мельник З.О. Задача с неизвестными границами для гиперболической системы первого порядка. – В кн.: Уравнения в частных производных и задачи со свободной границей. К.: Наук. думка, 1983, с. 77-79. 3. Мельник З.О. Смешанная задача с неизвестной границей для общего двумерного гиперболического уравнения второго порядка. – Докл. АН УССР. Сер. А, 1983, № 8, с. 13-15. 4. Мельник З.О. Задача с интегральными ограничениями для общих двумерных гиперболических уравнений и систем. – Дифференциальные уравнения, 1985, 21, № 2, с. 246-253. 5. Мельник Т.Е. Сопряжение решений гиперболического уравнения второго порядка вдоль неизвестной границы. – Докл. АН УССР. Сер. А, 1980, № 12, с. 10-12. 6. Мельник Т.Е. Задача типа Стефана для гиперболической системы первого порядка. – Укр. мат. журн., 1982, 34, с. 380-384. 7. Мельник Т.Е. Двухфазная задача типа Стефана для общего двумерного гиперболического уравнения второго порядка. – В кн.: Уравнения в частных производных и задачи со свободной границей. К.: Наук. думка, 1983, с. 77-79. 8. Нахушев А.М. Нагруженные уравнения и их приложения. – Дифференциальные уравнения, 1983, 19, № 1, с. 86-94. 9. Hill C. Denson A hyperbolic free boundary problem.– J. Math. Anal. and Appl., 1970, 31, N1, p. 117-119. 10. Socio L.M., Gualtieri G. A hyperbolic Stefan problem.– Quart. Appl. Math., 1983, 41, N2, p. 253-259.

Стаття надійшла до редколегії 04.03.85