УДК 517.946

В.Г.Костенко, Л.О.Губаль

НАБЛИЖЕНИЙ РОЗВ"ЯЗОК ЗМІШАНОЇ ЗАДАЧІ ДЛЯ ПАРАБОЛІЧНОЇ СИСТЕМИ РІВНЯНЬ

На прикладі задачі для системи двох рівнянь зі сталими коефіцієнтами

$$\frac{\partial u}{\partial t} = A\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + Du - f(x,t) \tag{1}$$

у півсмузі $\Pi\left\{0<x<x_0, t>0\right\}$ з початковими

$$u\big|_{t=0} = \psi(x) \tag{2}$$

та крайовими

$$A\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=0} = \mu(t),\ u\big|_{x=x_0} = \nu(t) \tag{3}$$

умовами пропонуємо ефективний алгоритм її розв"язування з допомогою ЕОМ, який базується на застосуванні методу прямих з наступною побудовою матриці Гріна.

Тут $A=\|a_{ij}\|$, $D=\|d_{ij}\|_{i,j=1,2}$ – сталі матриці; $f(x,t)$ $\psi(x)$, $\mu(t)$, $\nu(t)$ – задані; $u(x,t)$ – шукана вектор-функція.

Розв"язок задачі (1)-(3) шукаємо у вигляді

$$u(x,t) = v(x,t) + W(x,t), \tag{4}$$

де $W(x,t) = (x-x_0)A^{-1}\mu(t) + \nu(t)$. Тоді $v(x,t)$ має бути розв"язком задачі

$$\frac{\partial v}{\partial t} = A\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + Dv - F(x,t) \quad \text{в} \quad \Pi, \tag{5}$$

$$v\big|_{t=0} = \varphi(x), \tag{6}$$

$$A\frac{\partial v}{\partial x}\Big|_{x=0} = 0,\ v\big|_{x=x_0} = 0, \tag{7}$$

де $F(x,t) = f(x,t) + \frac{\partial W}{\partial t} - DW$; $\varphi(x) = \psi(x) - W(x,0)$.

Прямими $t=k\tau$ / $k=1,2,\ldots$ (розсікаємо півсмугу Π на частини, вводимо позначення $v(x,k\tau) = v_k(x)$ / $k=0,1,2,\ldots$) і замінюємо в (5)-(7) $\frac{\partial v}{\partial t}\Big|_{t=k\tau}$ кінцево-різницевим відношенням $\frac{v_k(x)-v_{k-1}(x)}{\tau}$.

Після цього (5)-(7) перетворюється в крайову задачу для системи звичайних диференціальних рівнянь

$$A\frac{d^2 v_k}{dx^2} + \left(D - \frac{1}{\tau}E\right)v_k = \Phi_k(x),\quad k=1,2,\ldots \tag{8}$$

$$v_0(x) = \varphi(x), \tag{9}$$

$$A\frac{dv_k}{dx}\Big|_{x=0} = 0\,, \quad v_k(x)\Big|_{x=x_0} = 0\,, \tag{10}$$

де $\Phi_k(x) = F_k(x) - \frac{v_{k-1}(x)}{\tau}$.

Нехай α_i – дійсні прості корені характеристичного рівняння

$$\alpha^4 + \frac{1}{\det A}\left\{\left[a_{11}\left(d_{22}-\frac{1}{\tau}\right)+a_{22}\left(d_{11}-\frac{1}{\tau}\right)-a_{12}d_{21}-a_{21}d_{12}\right]\alpha^2+\left(d_{11}-\frac{1}{\tau}\right)\left(d_{12}-\frac{1}{\tau}\right)-d_{12}d_{21}\right\}=0 \tag{11}$$

для відповідної однорідної системи (8) і

$$\gamma_{2i} = -\frac{a_{11}\alpha_i^2 + d_{11} - \frac{1}{\tau}}{a_{12}\alpha_i^2 + d_{12}}\,, \quad i = \overline{1,4}\,. \tag{12}$$

Тоді $\left\| \begin{pmatrix} 1 \\ \gamma_{21} \end{pmatrix} e^{\alpha_1 x}, \begin{pmatrix} 1 \\ \gamma_{22} \end{pmatrix} e^{\alpha_2 x}, \begin{pmatrix} 1 \\ \gamma_{23} \end{pmatrix} e^{\alpha_3 x}, \begin{pmatrix} 1 \\ \gamma_{24} \end{pmatrix} e^{\alpha_4 x} \right\|$ – фундаментальна матриця розв"язків відповідної однорідної системи (8). Остання дає змогу знайти в явному вигляді матрицю Гріна $G(x,\xi)$, яка визначається умовами:

а) $G(x,\xi)$ два рази неперервно диференційовна по x для $x \neq \xi$,

б) $G(x,\xi)$ задовольняє рівняння $A\frac{\partial^2 G}{\partial x^2} + \left(D - \frac{1}{\tau}E\right)G = 0$ для $x \neq \xi$ і крайові умови $A\frac{\partial G}{\partial x}\Big|_{x=0} = 0$, $G\Big|_{x=x_0} = 0$,

в) $G(x,\xi)$ неперервна, включаючи і $x = \xi$,

г) $\frac{\partial G(\xi+0,\xi)}{\partial x} - \frac{\partial G(\xi-0,\xi)}{\partial x} = A^{-1}$.

Перший стовпчик матриці $G(x,\xi)$ шукаємо у вигляді

$$\begin{pmatrix} G_{11}(x,\xi) \\ \\ G_{21}(x,\xi) \end{pmatrix} = \begin{matrix} \sum_{i=1}^{4}(a_i + b_i)\begin{pmatrix} 1 \\ \gamma_{2i} \end{pmatrix} e^{\alpha_i x}, & 0 \leq x \leq \xi, \\ \sum_{i=1}^{4}(a_i - b_i)\begin{pmatrix} 1 \\ \gamma_{2i} \end{pmatrix} e^{\alpha_i x}, & \xi \leq x \leq x_0. \end{matrix} \tag{13}$$

Задовольняючи спочатку умови в) і г) означення матриці $G(x,\xi)$, знаходимо однозначно b_1, b_2, b_3, b_4 як розв"язок системи алгебраїчних рівнянь

$$\sum_{i=1}^{4} b_i e^{\alpha_i \xi} = 0, \quad \sum_{i=1}^{4} b_i \gamma_{2i} e^{\alpha_i \xi} = 0,$$

$$\sum_{i=1}^{4} b_i \alpha_i e^{\alpha_i \xi} = -\frac{a_{22}}{2\det A}\,, \quad \sum_{i=1}^{4} b_i \gamma_{2i}\alpha_i e^{\alpha_i \xi} = \frac{a_{21}}{2\det A}\,. \tag{14}$$

Після цього умови а) і б) означення $G(x,\xi)$ також дають змогу знайти однозначно a_1, a_2, a_3, a_4 із системи рівнянь

$$
\begin{gathered}
\sum_{i=1}^{4}\alpha_i(a_{11}+a_{12}\gamma_{2i})a_i=-\sum_{i=1}^{4}\alpha_i(a_{11}+a_{12}\gamma_{2i})b_i\,,\\
\sum_{i=1}^{4}\alpha_i(a_{21}+a_{22}\gamma_{2i})a_i=-\sum_{i=1}^{4}\alpha_i(a_{21}+a_{22}\gamma_{2i})b_i\,,\\
\sum_{i=1}^{4}e^{\alpha_i x_0}a_i=\sum_{i=1}^{4}e^{\alpha_i x_0}b_i\,,\\
\sum_{i=1}^{4}\gamma_{2i}e^{\alpha_i x_0}a_i=\sum_{i=1}^{4}\gamma_{2i}e^{\alpha_i x_0}b_i\,.
\end{gathered}
\tag{15}
$$

Тому що (11) біквадратне, то можемо прийняти $\alpha_1=-\alpha_2=\lambda$, $\alpha_3=-\alpha_4=\beta$ і тоді з формул (12) маємо $\gamma_{21}=\gamma_{22}$, $\gamma_{23}=\gamma_{24}$. З врахуванням останнього розв"язки систем (14) і (15) зображаються формулами

$$
b_1=\frac{(a_{22}\gamma_{23}+a_{21})e^{-\lambda\xi}}{4\lambda(\gamma_{21}-\gamma_{23})\det A}\,,\quad b_2=-\frac{(a_{22}\gamma_{23}+a_{21})e^{\lambda\xi}}{4\lambda(\gamma_{21}-\gamma_{23})\det A}\,,
$$

$$
b_3=-\frac{(a_{22}\gamma_{21}+a_{21})e^{-\beta\xi}}{4\beta(\gamma_{21}-\gamma_{23})\det A}\,,\quad b_4=\frac{(a_{22}\gamma_{21}+a_{21})e^{\beta\xi}}{4\beta(\gamma_{21}-\gamma_{23})\det A}\,;
$$

$$
a_1=\frac{(a_{22}\gamma_{23}+a_{21})[\operatorname{sh}\lambda(x_0-\xi)-e^{-\lambda x_0}\operatorname{ch}\lambda\xi]}{4\lambda(\gamma_{21}-\gamma_{23})\operatorname{ch}\lambda x_0\det A}\,,
$$

$$
a_2=\frac{(a_{22}\gamma_{23}+a_{21})[\operatorname{sh}\lambda(x_0-\xi)+e^{\lambda x_0}\operatorname{ch}\lambda\xi]}{4\lambda(\gamma_{21}-\gamma_{23})\operatorname{ch}\lambda x_0\det A}\,,
$$

$$
a_3=\frac{(a_{22}\gamma_{21}+a_{21})[e^{-\beta x_0}\operatorname{ch}\beta\xi-\operatorname{sh}\beta(x_0-\xi)]}{4\beta(\gamma_{21}-\gamma_{23})\operatorname{ch}\beta x_0\det A}\,,
$$

$$
a_4=-\frac{(a_{22}\gamma_{21}+a_{21})[e^{\beta x_0}\operatorname{ch}\beta\xi+\operatorname{sh}\beta(x_0-\xi)]}{4\beta(\gamma_{21}-\gamma_{23})\operatorname{ch}\beta x_0\det A}\,,
$$

а перший стовпчик матриці $G(x,\xi)$ (I3) набуває вигляду

$$(\gamma_{21}-\gamma_{23})\det A\begin{pmatrix}G_{11}(x,\xi)\\ G_{21}(x,\xi)\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{cases}\dfrac{(a_{22}\gamma_{23}+a_{21})sh\lambda(x_0-\xi)}{\lambda ch\lambda x_0}\begin{pmatrix}1\\ \gamma_{21}\end{pmatrix}ch\lambda x-\dfrac{(a_{22}\gamma_{21}+a_{21})sh\beta(x_0-\xi)}{\beta ch\beta x_0}\begin{pmatrix}1\\ \gamma_{23}\end{pmatrix}ch\beta x, & 0\le x\le\xi\\[2ex] \dfrac{(a_{22}\gamma_{23}+a_{21})ch\lambda\xi}{\lambda ch\lambda x_0}\begin{pmatrix}1\\ \gamma_{21}\end{pmatrix}sh\lambda(x_0-x)-\dfrac{(a_{22}\gamma_{21}+a_{21})ch\beta\xi}{\beta ch\beta x_0}\begin{pmatrix}1\\ \gamma_{23}\end{pmatrix}sh\beta(x_0-x), & \xi\le x\le x_0.\end{cases}\quad (I6)$$

Аналогічно знаходимо і другий стовпчик матриці $G(x,\xi)$:

$$(\gamma_{21}-\gamma_{23})\det A\begin{pmatrix}G_{12}(x,\xi)\\ G_{22}(x,\xi)\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{cases}-\dfrac{(a_{12}\gamma_{23}+a_{11})sh\lambda(x_0-\xi)}{\lambda ch\lambda x_0}\begin{pmatrix}1\\ \gamma_{21}\end{pmatrix}ch\lambda x+\dfrac{(a_{12}\gamma_{21}+a_{11})sh\beta(x_0-\xi)}{\beta ch\beta x_0}\begin{pmatrix}1\\ \gamma_{23}\end{pmatrix}ch\beta x, & 0\le x\le\xi\\[2ex] -\dfrac{(a_{12}\gamma_{23}+a_{11})ch\lambda\xi}{\lambda ch\lambda x_0}\begin{pmatrix}1\\ \gamma_{21}\end{pmatrix}sh\lambda(x_0-x)+\dfrac{(a_{12}\gamma_{21}+a_{11})ch\beta\xi}{\beta ch\beta x_0}\begin{pmatrix}1\\ \gamma_{23}\end{pmatrix}sh\beta(x_0-x), & \xi\le x\le x_0.\end{cases}\quad (I7)$$

Наближений розв"язок задачі (I)-(3) на відрізках прямих $0\le x\le x_0$, $t=\kappa\tau$ зображається формулами

$$U(x,\kappa\tau)=\int_0^{x_0}G(x,\xi)\Phi_\kappa(\xi)d\xi+(x-x_0)A^{-1}\mu(\kappa\tau)+\nu(\kappa\tau), \quad (I8)$$

$\kappa=1,2,\ldots$. Тут $G(x,\xi)$ - матриця Гріна (I6), (I7):

$$\Phi_\kappa(\xi)=F_\kappa(\xi)-\frac{v_{\kappa-1}(\xi)}{\tau}=f(\xi,\kappa\tau)+(\xi-x_0)A^{-1}\mu'(\kappa\tau)+$$

$$+\nu'(\kappa\tau)-D\left[(\xi-x_0)A^{-1}\mu(\kappa\tau)+\nu(\kappa\tau)\right]-\frac{v_{\kappa-1}(\xi)}{\tau},$$

причому $v_0(\xi)=\varphi(\xi)=\psi(\xi)-(\xi-x_0)A^{-1}\mu(0)-\nu(0)$.

Формула (I8) ефективно реалізується на ЕОМ і дає наближений розв"язок цієї задачі з похибкою, яка не перевищує 0,I% при використанні кроку за часом $\tau<0{,}3$.

<u>Зауваження</u>. Ця методика поширюється на різні змішані задачі для більш загальних систем рівнянь параболічного типу, для яких практично можна знайти відповідні матриці Гріна.

Стаття надійшла до редколегії 30.03.85