УДК 517.984

Г.І.Чуйко

ПРО ОДНУ НЕСАМОСПРЯЖЕНУ ЕВОЛЮЦІЙНУ ЗАДАЧУ

Розглядаємо оператор A, породжений у просторі $L^2(\mathbb{R}^2_+)$ $\left(\mathbb{R}^2_+ \overset{def}{=}]0,\infty[\times]0,\infty[\right)$ диференціальним виразом

$$\ell[y] = -\Delta y + (p_1(x_1) + p_2(x_2))y \qquad (1)$$

і крайовою умовою

$$y\big|_{\partial \mathbb{R}^2_+} = 0, \qquad (2)$$

де Δ – оператор Лапласа; комплекснозначні функції $p_j(x_j)$ задоволняють умову

$$|p_j(x_j)| \le const \cdot exp(-2\varepsilon x_j), \ \varepsilon > 0, \ j = 1,2.$$

Область визначення $D(A)$ оператора A – це множина тих функцій з простору Соболєва $H^2(\mathbb{R}^2_+)$, які задовольняють (2), і $Af = \ell[f]$ при $f \in D(A)$.

Припущення, що потенціал в (1) допускає відокремлення змінних, дає змогу використати оператори A_j, $j = 1, 2$, породжені в просторі $L^2(\mathbb{R}_+)$ диференціальними виразами

$$\ell_j[y] = -y'' + p_j(x)y, \ j = 1,2$$

і крайовою умовою $y(0) = 0$. Тоді оператор A можна записати у вигляді

$$A = A_1 \bar{\otimes} \mathbb{1} + \mathbb{1} \bar{\otimes} A_2 .$$

У праці [3] розглянуто спектральні властивості оператора A, зокрема побудовано A – перетворення Фур"є для функцій $f \in L^2(\mathbb{R}^2_+)$ і розвинення таких функцій за головними функціями оператора A. Оскільки таке розвинення містить добутки головних функцій спектральних особливостей операторів A_1, A_2, які не належать до простору $L^2(\mathbb{R}^2_+)$, природно поширити A – перетворення Фур"є на більш широкі класи функцій, ніж $L^2(\mathbb{R}^2_+)$. A –перетворення Фур"є досить легко поширити [1] на клас помірно зростаючих функцій. Не вдаючись в деталі відзначимо, що, як і в одновимірному випадку, продовжене A –перетворення Фур"є має дефектний підпростір. Він породжений добутками головних функцій операторів A_1, A_2; з яких хоча б одна відповідає спектральним особливостям цих операторів.

Наша мета - показати, що наявність дефектного підпростору не впливає на існування розв"язків деяких еволюційних задач.

Для кожної пари цілих чисел ν_1, ν_2 позначимо через $L^2_{\nu_1,\nu_2}(\mathbb{R}^2_+)$ гільбертів простір, що відповідає нормі

$$\|f\|_{\nu_1,\nu_2}=\Big(\int\limits_{\mathbb{R}^2_+}|(1+x_1)^{\nu_1}(1+x_2)^{\nu_2}f(x_1,x_2)|^2dx_1dx_2\Big)^{1/2}.$$

Тоді простір помірно зростаючих функцій

$$\mathbb{F}=\bigcup_{\nu_1,\nu_2\geq 0}L^2_{-\nu_1,-\nu_2}(\mathbb{R}^2_+).$$

Позначимо через Ψ_0 підпростір простору $\bigcap\limits_{\nu_1,\nu_2\geq 0}L^2_{\nu_1,\nu_2}(\mathbb{R}^2_+)$ функцій, що ортогональні до добутків головних функцій операторів A_1, A_2, з яких хоча б одна відповідає спектральним особливостям цих операторів. Кожна функція $f\in\mathbb{F}$ визначає на Ψ_0 лінійний і неперервний функціонал, який позначаємо тією ж буквою, за формулою

$$\langle\varphi,f\rangle=\int\limits_{\mathbb{R}^2_+}\varphi(x_1,x_2)f(x_1,x_2)dx_1dx_2.$$

Шукаємо тепер оператори, породжені диференціальним виразом (I) і крайовою умовою (2), у просторах Ψ_0 і $\mathbb{F}$. Позначимо через $D_{\nu_1,\nu_2}(A)$ множину функцій h, які разом із узагальненими похідними до другого порядку включно належать до простору $L^2_{\nu_1,\nu_2}(\mathbb{R}^2_+)$, задовольняють крайову умову (2) і такі, що $\ell[h]\in L^2_{\nu_1,\nu_2}(\mathbb{R}^2_+)$.

Приймемо

$$D_{\mathbb{F}}(A)=\bigcup_{\nu_1,\nu_2\geq 0}D_{-\nu_1,-\nu_2}(A),$$

$$D_{\Psi_0}(A)=\Psi_0\cap\Big(\bigcap_{\nu_1,\nu_2\geq 0}D_{\nu_1,\nu_2}(A)\Big).$$

<u>Лема I</u>. Нехай $f,g\in\mathbb{F}$. Для того, щоб $f\in D_{\mathbb{F}}(A)$ і $Af=g$, необхідно і достатньо для всіх $\varphi\in D_{\Psi_0}(A)$ виконування співвідношення

$$\langle A\varphi,f\rangle=\langle\varphi,g\rangle.$$

Позначимо через (A) клас функцій $F:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$, аналітичних у деякому (залежному від F) околі P-спектра оператора A і таких, що задовольняють умову

$$\sup_{z\in\mathbb{R}} \frac{|F(z^2)|}{1+|z|^{2k}} < \infty \tag{3}$$

при деякому невід"ємному k.

Тоді, як випливає з теореми 2.2.II [2], замкнений щільно заданий у $L^2(\mathbb{R}^2_+)$ оператор $F(A)$ є узагальненим спектральним оператором.

Лема 2. Якщо $F\in(A)$ і $k=0$, то оператор $F(A)$ визначений на всьому просторі $\mathbb{F}$ і здійснює неперервне відображення простору $L^2_{-\nu_1,\nu_2}(\mathbb{R}^2_+)$ в себе.

Лема 3. Відповідність $F\longmapsto F(A)$ має таку властивість неперервності. Нехай $\{F_t\}$ – сім"я функцій $F_t\in(A)$, що

1) $\sup_{z\in\mathbb{R}}|F_t(z^2)|<C<\infty$,

де C не залежить від t;

2) $F_t(z)\to 0$ при $t\to 0$ рівномірно у кожній компактній підмножині P -спектра оператора A. Тоді

$$\langle\varphi, F_t(A)f\rangle \xrightarrow[t\to 0]{} 0 \qquad \text{для всіх } \varphi\in\Psi_{\gamma 0},\ f\in D_{\mathbb{F}}(A).$$

Відповідність $F\longmapsto F(A)$ використовується при побудові розв"язків еволюційних задач в області $\{x=(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2_+,\ t>0\}$.

Теорема. Нехай еволюційна задача визначається співвідношеннями

$$\frac{\partial u}{\partial t}=-Au, \quad u\Big|_{t=+0}=f. \tag{4}$$

Тоді для кожної функції $f\in L^2_{-\nu_1,-\nu_2}(\mathbb{R}^2_+)$ задача (4) має єдиний розв"язок $u(x,t)\in\mathbb{F}$; при $t>0$ функція $u(x,t)\in D_{-\nu_1,\nu_2}(A)$ задовольняє рівняння $\frac{\partial u}{\partial t}=-Au$ і для кожного $\varphi\in\Psi_{\gamma 0}$

$$\lim_{t\to+0}\langle\varphi, u(x,t)\rangle=\langle\varphi,f\rangle. \tag{5}$$

Доведення. Зауважимо, що функція $F_t(z)=e^{-zt}$ належить до класу (A), причому $\sup_{z\in\mathbb{R}}|z^2e^{-z^2t}|<\infty$. З огляду на леми 2, 3, функція $u(x,t)=F_t(A)f\in D_{-\nu_1,-\nu_2}(A)$ диференційовна по t в сенсі норми $\|\cdot\|_{-\nu_1,-\nu_2}$, задовольняє рівняння $\frac{\partial u}{\partial t}=-Au$ і має місце (5).

Для доведення єдиності зауважимо, що коли $\varphi\in\Psi_{\gamma 0}$, то функція $e^{-tA}\varphi$ є розв"язком задачі (4) з початковою функцією φ.

Нехай тепер $u(x,t)$ – розв"язок задачі (4), який задовольняє початкову умову $u(x,+0)=0$. Доведемо, що коли $u(x,t)\in \mathbb{F}$, то $u(x,t)\equiv 0$. Приймемо $\alpha(\tau)=\langle\varphi(x,t-\tau),u(x,\tau)\rangle$, де $\varphi(x,t)$ – розв"язок задачі (4) з початковою функцією $\varphi\in\xi_0$. Тоді

$$\alpha'(\tau)=-\langle\varphi_t'(x,t-\tau),u(x,\tau)\rangle+\langle\varphi(x,t-\tau),u_t'(x,\tau)\rangle=$$
$$=\langle A\varphi(x,t-\tau),u(x,\tau)\rangle-\langle\varphi(x,t-\tau),Au(x,\tau)\rangle=0,$$

з огляду на лему I. Оскільки $\alpha(+0)=\langle\varphi(x,t),0\rangle=0$, то $\alpha(\tau)=0$ при $0\leq\tau\leq t$. Таким чином, для довільної функції $\varphi\in\xi_0$ $\langle\varphi,u(x,t)\rangle=0$, тобто $u(x,t)$ належить до дефектного підпростору A -перетворення Фур"є. Тому $u(x,t)$ є лінійною комбінацією (з коефіцієнтами, що залежать від t) добутків головних функцій операторів A_1, A_2, в яких хоча б одна функція відповідає спектральним особливостям цих операторів. Використовуючи те, що $u_t'(x,t)+\ell[u]=0$ і $\ell[s_1(x_1,\lambda_1)s_2(x_2,\lambda_2)]=(\lambda_1+\lambda_2)s_1(x_1,\lambda_1)\times s_2(x_2,\lambda_2)/s_j(x_j,\lambda_j)$ – головна функція оператора A_j, $j=1,2$, а також початкову умову $u(x,+0)=0$, доводимо, що коефіцієнти цієї лінійної комбінації тотожно дорівнюють нулю.

Таким чином, відсутність взаємної однозначності A -перетворення Фур"є після виходу з простору $L^2(\mathbb{R}_+^2)$ не впливає на обгрунтування методу Фур"є.

I. Л я н ц е В.Е. Добавление I. – В кн.: Линейные дифференциальные операторы. М.: Наука, 1969, с. 443–498. 2. Л я н ц е В.Е., Ч у й к о Г.И. К теории спектральных операторов. – Львов, 1980. – 14 с. – Рукопись деп. в ВИНИТИ, № 4744-80 деп. 3. Ч у й к о Г.I. Розклад за власними елементами одного несамоспряженого оператора. – Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат., 1981, вип. 28, с. 57–61.

Стаття надійшла до редколегії 18.02.85