УДК 517.98

М.М.Федик

ПРО ОДНУ ВЛАСТИВІСТЬ ОСНАЩЕНИХ ГІЛЬБЕРТОВИХ ПРОСТОРІВ

Нехай (H_+, H, H_-) - оснащений гільбертів простір [1, 4]. Норму та скалярний добуток у просторі H_α позначаємо відповідно через $\|\cdot\|_\alpha$ і $(\cdot|\cdot)_\alpha$. Вираз $(u|v)$ застосовуємо як скалярний добуток елементів u і v з H, а також значення функціоналу $v \in H_-$ на елементі $u \in H_+$. Всі простори вважаємо сепарабельними. Під підпростором розуміємо лінійний многовид, замкнений у даному гільбертовому просторі. Через $\mathcal{B}(H_1, H_2)$ позначаємо простір лінійних неперервних операторів $H_1 \to H_2$, через $\mathcal{C}(H)$ - множину замкнених лінійних операторів $H \to H$ з щільною в H областю визначення. Знаки $\oplus$ і $\ominus$ - це відповідно ортогональна сума й ортогональне доповнення в тому гільбертовому просторі, до якого вони застосовані в конкретній ситуації. Через $\hat{\Lambda} \in \mathcal{B}(H_+, H_-)$ позначаємо оператор, такий що $\forall u, v \in H_+ \ (u/v)_+ = (\hat{\Lambda} u/v) = (u/\hat{\Lambda} v)$ і $\Lambda \subset \hat{\Lambda}, D(\Lambda) = \{u \in H_+ \mid \hat{\Lambda} u \in H\}$. Властивості оператора $\hat{\Lambda}$ описані в праці [4], зауважимо лише, що множина $D(\Lambda)$ щільна в H і H_+. Якщо $T \in \mathcal{C}(H)$, то $D(T)$ зі скалярним добутком $(\cdot|\cdot)_T$, де $\forall u, v \in D(T) \ (u/v)_T \overset{df}{=} (u/v) + (Tu/Tv)$ - гільбертів простір, який позначаємо через $D[T]$.

<u>Лема</u>. Нехай X - лінійний многовид в H_+. X щільний в H тоді і тільки тоді, коли $(H_+ \ominus X) \cap D(\Lambda) = \{0\}$.

Вказана лема є деяким узагальненням аналогічного твердження з праці [4]. Доведення аналогічне.

<u>Наслідок 1</u>. Нехай X - підпростір в $H_+, \overline{X} = H$ і $\dim(H_+ \ominus X) < \infty$. Тоді $X \cap D(\Lambda) \neq \{0\}$.

<u>Наслідок 2</u>. Нехай $T \in \mathcal{C}(H)$ і $T_0 \subset T$. Оператор $T_0 \in \mathcal{C}(H)$ тоді і тільки тоді, коли існує такий підпростір $V \subset (D[T])'$, що $V \cap H = \{0\}$ і $\forall u \in D(T_0) \ \forall v \in V \ (u/v) = 0$.

<u>Теорема 1</u>. Нехай X - підпростір в $H_+, \overline{X} = H, \dim(H_+ \ominus X) = 1$ і $U \overset{df}{=} X \cap D(\Lambda)$. Тоді множина U щільна в H і є підпростором в $D[\Lambda]$.

<u>Доведення</u>. Покажемо щільність множини U в H. Нехай $Y \overset{df}{=} H_+ \ominus X, y \in Y$, причому $\|y\|_+ = 1$. Далі $(h_n)_{n=1}^\infty \subset D(\Lambda)$ - повна ортонормована система в H_+. Оскільки $H_+ = X \oplus Y$, то

$$\forall n\in N\ \exists\lambda_n\in\mathbb{C}\ \exists x_n\in X\ \ h_n=x_n+\lambda_n y, \tag{I}$$

причому система $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ лінійно незалежна, бо $Y\cap D(\Lambda)=\{0\}$. Випадок, коли всі $\lambda_n=0$, тривіальний, тому, не втрачаючи загальності, вважаємо, що $\lambda_1\neq 0$. З (I) отримуємо $\forall k,\ell\in N\ V_{k\ell}\overset{df}{=}\lambda_\ell h_k-\lambda_k h_\ell\in U$, тому що $V_{k\ell}=\lambda_\ell x_k-\lambda_k x_\ell$.

Нехай $W\overset{df}{=}H_+\ominus U$. Покажемо, що $W\cap D(\Lambda)=\{0\}$. Оскільки $\{h_n\}$ повна ортонормована система в H_+, а множина W ортогональна в H_+ до $\{V_{k\ell}\}$, то (для $\sum_{i=1}^{\infty}\alpha_i h_i\in W$) необхідно, щоб $\forall k,\ell\ \alpha_k\bar\lambda_\ell-\alpha_\ell\bar\lambda_k=0$. Легко бачити, що для цього досить виконання умови

$$\forall k\in N\ \ \alpha_k\bar\lambda_1-\alpha_1\bar\lambda_k=0. \tag{2}$$

З (2) отримуємо, що елементи з W мають вигляд $c\sum_{i=1}^{\infty}\bar\lambda_i h_i$, де $c\in\mathbb{C}$, а λ_i з (I). Не втрачаючи загальності, візьмемо $W\ni w=\sum_{i=1}^{\infty}\bar\lambda_i h_i$ і припустимо, що $w\in D(\Lambda)$. Враховуючи (I), маємо $w=\sum_{i=1}^{\infty}\bar\lambda_i h_i=y\sum_{i=1}^{\infty}|\lambda_i|^2+\sum_{i=1}^{\infty}\bar\lambda_i x_i$. Приймемо $a\overset{df}{=}\sum_{i=1}^{\infty}|\lambda_i|^2$, $v\overset{df}{=}\sum_{i=1}^{\infty}\bar\lambda_i x_i$, тобто $w=ay+v$. При цьому $a\neq 0$, а $v\in X$, оскільки множина X замкнена в H_+. Тому що за припущенням $w\in D(\Lambda)$, то $\forall k\ w-\frac{a}{\lambda_k}h_k\in D(\Lambda)$. З іншого боку, $v-\frac{a}{\lambda_k}x_k\in X$, отже, $\forall k\ w-\frac{a}{\lambda_k}h_k\in U$. Оскільки $w\in W=H_+\ominus U$, то $0=(w|w-\frac{a}{\lambda_k}h_k)_+=\|w\|_+^2-(\sum_{i=1}^{\infty}\bar\lambda_i h_i|\frac{a}{\lambda_k}h_k)_+=\|w\|_+^2-a$. Оскільки $w=ay+v$, $(v/y)_+=0$ і $\|y\|_+=1$, то $\|w\|_+^2=a^2+\|v\|_+^2$. Отже справедлива рівність $a=a^2+\|v\|_+^2$, яка можлива лише при $a\leq 1$. Але коли $a=1$, то $\|v\|_+^2=0$, тобто $ay\in D(\Lambda)$, що суперечить умові теореми. Візьмемо $a<1$ і розглянемо системи $\{h_i\}$ і $\{x_i\}$. Тому що $\|y\|_+=1$, то $\|h_i-x_i\|_+^2=|\lambda_i|^2$ і $\sum_{i=1}^{\infty}\|h_i-x_i\|_+^2=\sum_{i=1}^{\infty}|\lambda_i|^2=a<1$. Згідно з теоремою про збурення ортонормованих систем [3] це означає, що $\{x_i\}$ є базисом в H_+. Разом з тим $\forall i\,(y/x_i)_+=0$. Таким чином, $w\notin D(\Lambda)$, тобто $W\cap D(\Lambda)=\{0\}$ і згідно з лемою множина $U=X\cap D(\Lambda)$ щільна в H.

Для доведення другої частини твердження зауважимо, що оператори $(1+\Lambda^2)^{-1}$, $\Lambda(1+\Lambda^2)^{-1}$ належать $B(H)$ [5], причому $(1+\Lambda^2)^{-1}H=D(\Lambda^2)$, $\Lambda(1+\Lambda^2)^{-1}H=D(\Lambda)$. Тоді $\forall g\in H_+\ \forall h\in D(\Lambda)\ (\Lambda(1+\Lambda^2)^{-1}g|$ $\times g|h)_\Lambda=(\Lambda(1+\Lambda^2)^{-1}g|h)+(\Lambda^2(1+\Lambda^2)^{-1}g|\Lambda h)=(g|\Lambda h)=(g|h)_+$. Тому $\forall w\in H_+\ominus U\ \forall u\in U\ (\Lambda(1+\Lambda^2)^{-1}w/u)_\Lambda=0$, тобто $U=X\cap D(\Lambda)$ підпростір в $D[\Lambda]$.

Зауваження. Щільність U в H можна показати і по-іншому. Розглянемо множину $V=\{u\in D(\Lambda)\,|\,\forall y\in Y\ (\Lambda(1+\Lambda^2)^{-1}y/u)_\Lambda=0\}$. Проводячи ті ж перетворення, що й при доведенні другої частини теореми I, маємо $V \subset X \cap D(\Lambda) = U$. При цьому $\dim V = \infty$, тому що $\dim \Lambda(1+\Lambda^2)^{-1} Y = 1$ і $V = D[\Lambda] \ominus \Lambda(1+\Lambda^2)^{-1} Y$. Оскільки $(\Lambda^2(1+\Lambda^2)^{-1} Y) \cap$ $\cap D(\Lambda) = \{x / x = y - (1+\Lambda^2)^{-1} y,\ y \in Y\} \cap D(\Lambda) = \{0\}$, то $\Lambda(1+\Lambda^2)^{-1} Y \cap D(1+\Lambda^2) = \{0\}$, а тоді, згідно з лемою, множина V щільна в H.

З доведення теореми випливає також, що замиканням множини U в H_+ є множина X.

Теорема 2. Нехай X – підпростір в H_+, $\overline{X} = H$ і $\dim(H_+ \ominus X) = 1$; $(\tilde{H}_+, H, \tilde{H}_-)$ – інший оснащений гільбертів простір, такий що $\tilde{H}_+ \subset H_+$, причому вкладення неперервне і щільне. Тоді множина $X \cap \tilde{H}_+$ щільна в H і є підпростором в $\tilde{H}_+$.

Доведення теореми подібне до доведення теореми I.

Наслідок I. Нехай $T_0, T \in \mathcal{C}(H)$, $T_0 \subset T$ і $\dim D(T)/D(T_0) = 1$. Тоді $\overline{D(T_0) \cap D(T^*T)} = H$.

Наслідок 2. Якщо $T_0, T \in \mathcal{C}(H)$ такі ж, як вище, і $\rho(T) \neq \emptyset$, то

$$\forall n \in N \quad \overline{D(T_0) \cap D(T^n)} = H. \tag{3}$$

Справедливість (3) випливає з того, що $\forall n\ T^n \in \mathcal{C}(H)$ [2].

Подібним твердженням у більш загальних ситуаціях присвячена наша інша стаття.

Автор вдячний В.Е.Лянце за обговорення результатів праці.

I. Березанский Ю.М. Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов. – К.: Наук. думка, 1965. – 798 с. 2. Данфорд Е., Шварц Дж. Т. Линейные операторы. – М.: Изд-во иностр. лит., 1962. – 896 с. 3. Като Т. Теория возмущений линейных операторов. – М.: Мир, 1972. – 740 с. 4. Лянце В.Э., Сторож О.Г. Методы теории неограниченных операторов. – К.: Наук. думка, 1983. – 212 с. 5. Рисс Ф., Секефальви-Надь Б. Лекции по функциональному анализу. – М.: Мир, 1979. – 592 с.

Стаття надійшла до редколегії 18.02.85