УДК 513.88

Я.В.Микитюк

ПРО ВЛАСТИВОСТІ ОДНОГО УНІТАРНОГО ОПЕРАТОРА

Нехай Γ – борелівська множина в $\mathbb{R}^n$, $n\in\mathbb{N}\setminus\{1\}$, яка задовольняє такі умови: І) відображення $\Gamma\times]0;\infty[\ni(\omega,t)\mapsto t\omega\in\mathbb{R}^n\setminus\{0\}$ є бієкцією; 2) на Γ існує зліченно адитивна міра μ задана на всіх борелівських підмножинах Γ і така, що $t^{n-1}dt\,d\mu=dx$, де $dt(dx)$ елемент об"єму на $]0;\infty[\,(\mathbb{R}^n)$; 3) $\gamma\overset{def}{=}\sup_{\omega\in\Gamma}|\omega|<\infty$, ($|\cdot|$ – евклідова норма в $\mathbb{R}^n$).

Розглянемо унітарний оператор $V:L_2(\mathbb{R}^n)\to L_2(\mathbb{R}_+;G)$, де $\mathbb{R}_+\overset{def}{=}]0;\infty[$, $G\overset{def}{=}L_2(\Gamma;\mu)$ заданий формулою

$$Vf(t)=t^{(n-1)/2}f(t\omega)\,,\ \ t\in\mathbb{R}_+\ . \tag{I}$$

Оператори V виду (I) зустрічаються при вивченні спектральних властивостей деяких псевдодиференціальних операторів. При цьому важливо знати, як діє оператор V на гладкі функції, зокрема на функції з простору Соболева $H_2^s(\mathbb{R}^n)$, $s\in\mathbb{R}_+$.

<u>Теорема</u>. Нехай $n=2m+1$, $m\in\mathbb{N}$, $s\in\mathbb{R}_+$. Тоді оператор V неперервно відображає $H_2^s(\mathbb{R}^n)$ в $H_2^s(\mathbb{R}_+;G)$.

<u>Доведення</u>. Розглянемо ізометричний оператор $\widetilde{V}:L_2(\mathbb{R}^n)\to L_2(\mathbb{R};G)$, заданий формулою $\widetilde{V}f(t)=\frac{1}{\sqrt{2}}t^m f(t\omega)$, $t\in\mathbb{R}$. Покажемо, що $\widetilde{V}$ неперервно відображає $H_2^s(\mathbb{R}^n)$ в $H_2^s(\mathbb{R};G)$. Для цього розглянемо допоміжний оператор $U=F_1^{-1}\widetilde{V}F$, де $F\,(F_1)$ – оператор Фур"є – Планшереля в $L_2(\mathbb{R}^n)(L_2(\mathbb{R};G))$. Нехай $f\in C_0(\mathbb{R}^n)$ і $f(x)=0$ при $|x|>c>0$. Покажемо, що функція Uf дорівнює нулю майже скрізь при $|t|>\gamma c$. Справді, розглянемо перетворення Радона [2] функції f , тобто

$$\widetilde{f}(\xi,\omega)=(2\pi)^{-n/2}\int\limits_{X_{\xi,\omega}}f(x')dx',$$

де $X_{\xi,\omega}=\{x\in\mathbb{R}^n:(x,\omega)=\xi\}$, $(x,\omega)=x_1\omega_1+\ldots+x_n\omega_n$, $\xi\in\mathbb{R}$, $\omega\in\Gamma$; dx' – елемент об"єму на $X_{\xi,\omega}$. Функція $\widetilde{f}$ неперервна за змінними ξ,ω і дорівнює нулю при $|\xi|>\gamma c$. Оскільки

$$t^m\hat{f}(t\omega)=t^m\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{-i\xi t}\,\widetilde{f}(\xi,\omega)d\xi\,,$$

де $\hat{f}=Ff$, то при будь-якому $\omega\in\Gamma$ функція $t\mapsto t^m\hat{f}(t\omega)$ є цілою функцією експоненціального типу γc [1]. Враховуючи рівність

$$\int\limits_{\mathbb{R}}\int\limits_{\Gamma}|t^m\hat{f}(t\omega)|^2d\mu\,dt=\int\limits_{\mathbb{R}^n}|\hat{f}(x)|^2dx\,,$$

6-2748

на основі теореми Фубіні робимо висновок, що майже для всіх $\omega \in \Gamma$ функція $t \to t^m \hat{f}(t\omega)$ належить $L_2(\mathbb{R})$. Звідси, беручи до уваги теорему Пелі – Вінера, дістаємо, що при $|t| > \gamma c$ функція Uf дорівнює нулю майже скрізь. З огляду на ізометричність оператора U маємо, що для всіх $f \in C_0(\mathbb{R}^n)$, $\xi \in \mathbb{R}_+$

$$\int_{|t| \geq \gamma \xi} \|Uf(t)\|_G^2 dt \leq \int_{|x| \geq \xi} |f(x)|^2 dx .$$

Нехай $q : [0;\infty[\to [0;\infty[$ – неперервна, монотонно зростаюча функція. З попередньої нерівності випливає

$$\int_0^\infty q'(\xi) \int_{|t| \geq \gamma \xi} \|Uf(t)\|_G^2 dt \leq \int_0^\infty q'(\xi) \int_{|x| \geq \xi} |f(x)|^2 dx .$$

Змінюючи порядок інтегрування, зазначаємо

$$\int_{\mathbb{R}} \|Uf(t)\|_G^2 \, q(\gamma^{-1}|t|) dt \leq \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^2 q(|x|) dx .$$

Звідси легко отримуємо, що $\widetilde{V}$ неперервно відображає $H_2^s(\mathbb{R}^n)$ в $H_2^s(\mathbb{R}, G)$, а отже V неперервно відображає $H_2^s(\mathbb{R}^n)$ в $H_2^s(\mathbb{R}_+; G)$. Теорема доведена.

Зауваження. Вірогідно, що теорема справедлива і для парних n. Але довести цього не вдалося.

1. Стейн И., Вейс Г. Введение в гармонический анализ на эвклидовых пространствах. – М.: Мир, 1974. – 333 с.
2. Хелгасон С. Преобразование Радона. – М.: Мир, 1983. – 148 с.

Стаття надійшла до редколегії 18.02.85