УДК 539.377

В.З.Дідик, Б.В.Ковальчук

ТЕМПЕРАТУРНЕ ПОЛЕ В ПЛАСТИНЦІ ПРИ ЗАЛЕЖНОМУ ВІД КООРДИНАТИ КОЕФІЦІЄНТІ ТЕПЛОВІДДАЧІ

Розглянемо однорідну ізотропну півбезмежну пластинку товщини 2δ, яка нагрівається зовнішнім середовищем температури $t_0 = const$ по області $d \leq x \leq c$, $z = \pm\delta$ на деякій відстані d від її краю. Через бічні поверхні $z = \pm\delta$ пластинки здійснюється конвективний теплообмін із зовнішнім середовищем температури $t_c = t_0 N(x)$, причому коефіцієнт тепловіддачі з поверхонь області нагріву дорівнює α_0, а поза ними $- \alpha_1$, де $c = d + 2b$, $N(x) = S_-(x-d) - S_+(x-c)$; $S_\pm(\xi)$ – асиметричні одиничні функції.

Стаціонарне температурне поле у пластинці визначаємо з рівняння теплопровідності [1]

$$\frac{d^2T}{dx^2} - \left[\varkappa_1^2 + \varkappa N(x)\right] T = -\varkappa_0^2 t_0 N(x) \tag{I}$$

при граничних умовах

$$T\Big|_{x=0} = 0, \quad T\Big|_{x\to\infty} = 0, \tag{2}$$

де $\varkappa = \varkappa_0^2 - \varkappa_1^2$; $\varkappa_i = \alpha_i/\lambda\delta$, $i = 0,1$; λ – коефіцієнт теплопровідності.

Розв"язок (I) знаходимо таким чином. Помноживши рівняння (I) на $N(x)$, ввівши заміну [1]

$$U = T(x)N(x) \tag{3}$$

та використавши співвідношення [3]

$$S_\pm(x-x_i)S_\pm(x-x_j) = S_\pm(x - x_{max\, i,j}), \tag{4}$$

$$f(x-x_0)\delta_\pm'(x-x_0) = f(x_0)\delta_\pm'(x-x_0) - f'(x_0)\delta_\pm(x-x_0), \tag{5}$$

прийдемо до рівняння відносно функції U

$$U'' - \varkappa_0^2 U = T(2d-x)\delta_-'(x-d) - \\ -T(2c-x)\delta_+'(x-c) - \varkappa_0^2 t_0 N(x), \tag{6}$$

де $\delta_\pm(\xi) = \dfrac{dS_\pm(\xi)}{d\xi}$ – дельта-функції Дірака.

Загальний розв"язок рівняння (6) має вигляд

$$U=Ae^{-\varkappa_0 x}+Be^{\varkappa_0 x}+\varphi(x,d)S_-(x-d)-$$
$$-\varphi(x,c)S_+(x-c), \tag{7}$$

де $\varphi(x,x_0)=T(x_0)ch\,\varkappa_0(x-x_0)+$
$$+\frac{1}{\varkappa_0}T'(x_0)sh\,\varkappa_0(x-x_0)+t_0[1-ch\,\varkappa_0(x-x_0)].$$

З рівності (3) випливає, що $U\equiv 0$ при $x<d$. Отже, у виразі (7) $A=B=0$.

На підставі (3) і (7) рівняння (I) зводиться до вигляду

$$T''-\varkappa_1^2T=\varkappa[\varphi(x,d)S_-(x-d)-\varphi(x,c)S_+(x-c)]-$$
$$-\varkappa_0^2t_0N(x). \tag{8}$$

Загальний розв"язок (8), який є загальним розв"язком (I), шукаємо як

$$T=c_1ch\,\varkappa_1x+c_2sh\,\varkappa_1x+\varphi_1(x,d)S_-(x-d)-$$
$$-\varphi_2(x,c)S_+(x-c), \tag{9}$$

де $\varphi_1(x,x_0)=T(x_0)[ch\,\varkappa_0(x-x_0)-ch\,\varkappa_1(x-x_0)]+$
$$+T'(x_0)[\frac{1}{\varkappa_0}sh\,\varkappa_0(x-x_0)-\frac{1}{\varkappa_1}sh\,\varkappa_1(x-x_0)]+t_0[1-ch\,\varkappa_0(x-x_0)].$$

З допомогою (9) знаходимо значення $T(d), T(c), T'(d), T'(c)$, підставляємо їх у (9), після чого записуємо

$$T=c_1\Big\{ch\,\varkappa_1x+[-ch\,\varkappa_1x+\frac{\varkappa_1}{\varkappa_0}sh\,\varkappa_1d\,sh\,\varkappa_0(x-d)+$$
$$+ch\,\varkappa_1d\,ch\,\varkappa_0(x-d)]S_-(x-d)+[ch2\varkappa_0b\,ch\,\varkappa_1(x-2b)-$$
$$-\frac{\varkappa_1}{\varkappa_0}sh\,\varkappa_1d\,sh\,\varkappa_0(x-d)-ch\,\varkappa_1d\,ch\,\varkappa_0(x-d)+$$
$$+sh2\varkappa_0b\Big(\frac{\varkappa_0}{\varkappa_1}ch\,\varkappa_1d\,sh\,\varkappa_1(x-c)+\frac{\varkappa_1}{\varkappa_0}sh\,\varkappa_1d\,ch\,\varkappa_1(x-c)\Big)]S_+(x-c)\Big\}+$$
$$+c_2\Big\{sh\,\varkappa_1x+[-sh\,\varkappa_1x+\frac{\varkappa_1}{\varkappa_0}ch\,\varkappa_1d\,sh\,\varkappa_0(x-d)+$$
$$+sh\,\varkappa_1d\,ch\,\varkappa_0(x-d)]S_-(x-d)+[ch2\varkappa_0b\,sh\,\varkappa_1(x-2b)-$$
$$-\frac{\varkappa_1}{\varkappa_0}ch\,\varkappa_1d\,sh\,\varkappa_0(x-d)-sh\,\varkappa_1d\,ch\,\varkappa_0(x-d)+$$

$$+\operatorname{sh}2\varkappa_0 b\left(\frac{\varkappa_0}{\varkappa_1}\operatorname{sh}\varkappa_1 d\operatorname{sh}\varkappa_1(x-c)+\frac{\varkappa_1}{\varkappa_0}\operatorname{ch}\varkappa_1 d\operatorname{ch}\varkappa_1(x-c)\right)\Big]S_+(x-c)\Big\}+$$

$$+t_0\Big\{[1-\operatorname{ch}\varkappa_0(x-d)]S_-(x-d)-\big[1-\operatorname{ch}\varkappa_0(x-c)+$$

$$+(1-\operatorname{ch}2\varkappa_0 b)(\operatorname{ch}\varkappa_0(x-c)-\operatorname{ch}\varkappa_1(x-c))-$$

$$-\varkappa_0\operatorname{sh}2\varkappa_0 b\left(\frac{1}{\varkappa_0}\operatorname{sh}\varkappa_0(x-c)-\frac{1}{\varkappa_1}\operatorname{sh}\varkappa_1(x-c)\right)\big]S_+(x-c)\Big\}. \qquad (10)$$

Задовольнивши граничні умови (2), знаходимо

$$C_1=0,\quad C_2=\frac{t_0\left(\frac{\varkappa_0}{\varkappa_1}\operatorname{sh}2\varkappa_0 b+\operatorname{ch}2\varkappa_0 b-1\right)}{\operatorname{sh}2\varkappa_0 b\left(\frac{\varkappa_0}{\varkappa_1}\operatorname{sh}\varkappa_1 d+\frac{\varkappa_0}{\varkappa_1}\operatorname{ch}\varkappa_1 d\right)+e^{\varkappa_1 d}\operatorname{ch}2\varkappa_0 b}. \qquad (11)$$

Підставивши вирази (11) в формулу (10), одержимо такий загальний розв"язок задачі теплопровідності для розглядуваної пластинки:

$$T=t_0\Big\{\left(\frac{\varkappa_0}{\varkappa_1}\operatorname{sh}2\varkappa_0 b+\operatorname{ch}2\varkappa_0 b-1\right)\operatorname{sh}\varkappa_1 x\,S_+(d-x)+$$

$$+\Big[\operatorname{sh}2\varkappa_0 b\left(\frac{\varkappa_0}{\varkappa_1}\operatorname{sh}\varkappa_1 d+\frac{\varkappa_1}{\varkappa_0}\operatorname{ch}\varkappa_1 d\right)+e^{\varkappa_1 d}\operatorname{ch}2\varkappa_0 b-$$

$$-\operatorname{sh}\varkappa_1 d\operatorname{ch}\varkappa_0(x-d)-\operatorname{ch}\varkappa_1 d\operatorname{ch}\varkappa_0(x-c)-$$

$$-\frac{\varkappa_1}{\varkappa_0}\operatorname{ch}\varkappa_1 d(\operatorname{sh}\varkappa_0(x-d)-\operatorname{sh}\varkappa_0(x-c))\Big]N(x)+$$

$$+\Big[\operatorname{ch}2\varkappa_0 b(\operatorname{ch}2\varkappa_0 b-1)(\operatorname{sh}\varkappa_1(x-2b)-e^{\varkappa_1 d}\operatorname{ch}\varkappa_1(x-c))+$$

$$+\operatorname{sh}2\varkappa_0 b\left(\operatorname{sh}2\varkappa_0 b\operatorname{ch}\varkappa_1 d+\frac{\varkappa_0}{\varkappa_1}\operatorname{sh}\varkappa_1 d\right)e^{-\varkappa_1(x-c)}\Big]S_+(x-c)\Big\}\times$$

$$\times\left[\operatorname{sh}2\varkappa_0 b\left(\frac{\varkappa_0}{\varkappa_1}\operatorname{sh}\varkappa_1 d+\frac{\varkappa_1}{\varkappa_0}\operatorname{ch}\varkappa_1 d\right)+e^{\varkappa_1 d}\operatorname{ch}2\varkappa_0 b\right]^{-1}. \qquad (12)$$

При $d=0$ температурне поле (12) набуває вигляду

$$T=t_0\Big\{\Big[\frac{\varkappa_1}{\varkappa_0}(\operatorname{sh}2\varkappa_0 b-\operatorname{sh}\varkappa_0 x+\operatorname{sh}\varkappa_0(x-2b))+$$

$$+\operatorname{ch}2\varkappa_0 b-\operatorname{ch}\varkappa_0(x-2b)\Big]S_-(2b-x)-$$

$$-(1-\mathrm{ch}\,2\varkappa_0 b)\,e^{-\varkappa_1(x-2b)}S_+(x-2b)\Big\}\times$$
$$\times\Big(\frac{\varkappa_1}{\varkappa_0}\mathrm{sh}\,2\varkappa_0 b+\mathrm{ch}\,2\varkappa_0 b\Big)^{-1}. \qquad (13)$$

Виконавши в (12) заміну $x_1 = x-d-b$ і спрямувавши після того $d\to\infty$, одержимо розв"язок задачі для безмежної пластинки

$$T=t_0\Big\{\varkappa_0[\varkappa_0\,\mathrm{sh}\,2\varkappa_0 b-\varkappa_1(1-\mathrm{ch}\,2\varkappa_0 b)]\times$$
$$\times\big[e^{\varkappa_1(x_1+b)}S_+(-x_1-b)+e^{-\varkappa_1(x_1-b)}S_+(x_1-b)\big]+$$
$$+\big[(\varkappa_0^2+\varkappa_1^2)\,\mathrm{sh}\,2\varkappa_0 b+2\varkappa_0\varkappa_1\,\mathrm{ch}\,2\varkappa_0 b-$$
$$-2\varkappa_1(\varkappa_1\,\mathrm{sh}\,\varkappa_0 b+\varkappa_0\,\mathrm{ch}\,\varkappa_0 b)\,\mathrm{ch}\,\varkappa_0 x_1\big]\big[S_-(x_1+b)-S_+(x_1-b)\big]\Big\}\times$$
$$\times\big[(\varkappa_0^2+\varkappa_1^2)\,\mathrm{sh}\,2\varkappa_0 b+2\varkappa_1\varkappa_0\,\mathrm{ch}\,2\varkappa_0 b\big]^{-1}, \qquad (14)$$

який збігається з відповідним результатом праці [2].

Після заміни $x'=x_1+b$ і переходу до границі при $b\to\infty$ у виразі (14) знаходимо температурне поле у безмежній пластинці, яка нагрівається зовнішнім середовищем по області $x'\geq 0,\ z=\pm\delta$

$$T=\frac{t_0}{\varkappa_0+\varkappa_1}\Big\{\varkappa_0 e^{\varkappa_1 x'}+\big[(\varkappa_0+\varkappa_1)-(\varkappa_0 e^{\varkappa_1 x'}+\varkappa_1 e^{-\varkappa_0 x'})\big]S_-(x')\Big\}. \qquad (15)$$

Якщо у наведених виразах для температурних полів замінити $\alpha_0 t_0/\delta$ на q_0 , то матимемо результати, що відповідають нагріву пластинок внутрішніми джерелами тепла потужністю q_0.

1. Коляно Ю.М., Дидык В.З., Кордуба Б.М. Температурные напряжения в полубесконечной цилиндрической оболочке, локально нагреваемой путем конвективного теплообмена. - Пробл. прочности, 1983, № 4, с. 10-13. 2. Коляно Ю.М., Дідик В.З., Кордуба Б.М. Температурні напруження в пластинках при залежних від координати коефіцієнтах тепловіддачі. - Доп.. АН УРСР. Сер. А, 1976, № 6, с. 516-519. 3. Образцов И.Ф., Онанов Г.Г. Строительная механика скошенных тонкостенных систем. - М.: Машиностроение, 1973. - 659 с. 4. Подстригач Я.С., Ломакин В.А., Коляно Ю.М. Термоупругость тел неоднородной структуры. - М.: Наука, 1984. - 368 с.

Стаття надійшла до редколегії 04.03.85