$$A=0\ ,\quad D=0\ ,\quad R_1L-R_2N=0\ .$$

Коли ж $a=0$, то умови набирають вигляду

$$R_1K-R_2M=0\ ,$$
$$R_1L-R_2N=0\ .$$

У першому випадку маємо всі еліптичні конуси та еліптичні циліндри. Для еліптичного конуса кола Γ_1, Γ_2 належать одній і тій же сім"ї кругових перерізів, а для еліптичного циліндра – одній або різним сім"ям кругових перерізів.

У другому випадку матимемо всі еліптичні циліндри. Причому кола Γ_1, Γ_2 належать різним круговим перерізам.

Стаття надійшла до редколегії 18.03.85

УДК 512.553

О.Д.Артемович, О.Л.Горбачук

ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ $\dot{I}$ - РАДИКАЛИ

Всі розглядувані кільця – асоціативні, а всі модулі – праві й унітарні. Крім того, надалі користуватимемося термінологією з праць [2, 3]. Категорію всіх правих диференціальних модулів над диференціальним кільцем R позначимо через $D\,mod-R$.

Кожному правому диференціальному ідеалу I диференціального кільця R зіставимо диференціальний радикал σ_I [3], який називається диференціальним I-радикалом, причому такий, що клас $T_I=\{M\in D\,mod\text{-}R/MI=M\}$ радикальний для σ_I .

Зауваження 1. Кожний диференціальний I-радикал задається також двостороннім диференціальним ідеалом $S=RI$.

Перенесемо деякі результати статті [2] на диференціальний випадок. Для цього введемо декілька понять і доведемо необхідні твердження.

Означення 1. Диференціальним радикалом Джекобсона $J^{\alpha}(M)$ правого диференціального R-модуля M називається перетин його максимальних диференціальних підмодулів.

Означення 2. Диференціальний підмодуль K диференціального модуля M називається диференціально косуттєвим, якщо з умови

$K+S=M$, де S – деякий диференціальний підмодуль, випливає $S=M$.

Лема I. Якщо M – диференціальний модуль, в якого кожний власний диференціальний підмодуль N міститься у максимальному диференціальному підмодулі S , то $J^{\alpha}(M)$ диференціально косуттєвий в M .

Доведення випливає з того, що $S \supseteq N+J^{\alpha}(M)$.

Лема 2. Якщо L – правий диференціальний ніль-ідеал диференціального кільця R , то $L \subseteq J^{\alpha}(R)$.

Доведення ведемо від супротивного. Нехай S – такий максимальний правий диференціальний ідеал кільця R , що $S \not\supseteq L$. Тоді $S+L=R$ і, як наслідок, $s+\ell=1$ для деяких елементів $s\in S, \ell \in L$. З огляду на те, що L – правий ніль-ідеал, отримуємо зворотний $s=1-\ell$. Отже, $S=R$, що неможливо. Це свідчить, що $L \subseteq J^{\alpha}(R)$. Лема доведена.

Теорема I. Нехай I – правий диференціальний ідеал диференціального кільця R . Якщо для довільного ненульового скінченно породженого диференціального модуля M $MI \neq M$, то $I \subseteq J^{\alpha}(R)$.

Доведення. Покажемо, що MI – диференціально косуттєвий диференціальний підмодуль в M . Якщо K – деякий диференціальний підмодуль і $M=K+MI$, то $G=M/K$ – скінченно породжений диференціальний модуль і $GI=G$. Тоді з умови теореми випливає $G=0$, тобто $M=K$, і, таким чином, MI – диференціально косуттєвий диференціальний підмодуль.

Нехай $M=R$. Тоді $RI \supseteq I$ і RI – диференціально косуттєвий диференціальний ідеал кільця R , і тому $I \subseteq J^{\alpha}(R)$. Справді, якщо I – диференціально косуттєвий правий диференціальний ідеал і S максимальний правий диференціальний ідеал кільця R , то $I+S \neq R$. Отже, $I \subseteq S$ і $I \subseteq J^{\alpha}(R)$. Теорема доведена.

Лема 3. T -нільпотентного справа правого диференціального ідеала I наступні твердження рівносильні:

$$MI=M, \tag{I}$$

де $M\in Dmod\text{-}R$;

$$M=0 . \tag{2}$$

Доведення. Якщо $MI=M$, то кожний елемент $m\in M$ зображається у вигляді $m=\sum_j m_j i_j$ для деяких $m_j \in M, i_j \in I$. Тоді з того, що $m_j=\sum_k m_{kj} i_{kj}$ з деякими $m_{kj} \in M, i_{kj} \in I$, випливає

$$m = \sum_{j,k} m_{kj} i_{kj} i_j \; . \tag{3}$$

Розписуючи подібно елементи модуля M в зображенні (I), з огляду на T-нільпотентність правого диференціального ідеала отримуємо $M=0$. Лема доведена.

Лема 4. Якщо I - радикал, що задається правим диференціальним ідеалом I диференціального кільця R, тривіальний, то $I \subseteq \mathcal{J}^{\alpha}(R)$.

Доведення. Оскільки диференціальний I-радикал σ_I тривіальний, то клас $T_I = \{0\}$ радикальний. Це рівносильно тому, що $MI = M$ тоді і лише тоді, коли $M=0$ для $M \in \mathcal{D}mod\text{-}R$. За теоремою I $I \subseteq \mathcal{J}^{\alpha}(R)$. Лема доведена.

Теорема 2. Якщо над диференціальним кільцем R всі диференціальні I-радикали тривіальні, то кільце $R/\mathcal{J}^{\alpha}(R)$ - диференціально просте.

Доведення. Справді, за лемою 4 всі праві диференціальні ідеали лежать в $\mathcal{J}^{\alpha}(R)$.

Теорема 3. Якщо фактор-кільце $R/\mathcal{J}^{\alpha}(R)$ диференціального кільця R диференціально просте, а $\mathcal{J}^{\alpha}(R)$ - T-нільпотентний справа, тоді всі диференціальні I-радикали тривіальні.

Доведення. З диференціальної простоти кільця $R/\mathcal{J}^{\alpha}(R)$ випливає, що всі праві диференціальні ідеали лежать в $\mathcal{J}^{\alpha}(R)$, і отже, будуть T-нільпотентними справа. Тоді за лемою 3 диференціальний I-радикал тривіальний для кожного правого диференціального ідеала I диференціального кільця R. Теорема доведена.

I. Горбачук О.Л., Комарницький М.Я. Про диференціальні кручення. - В кн.: Теоретичні і прикладні питання алгебри і диференціальних рівнянь. К., 1977, с. 16-22.
2. Горбачук Е.Л., Комарницкий Н.Я. I-радикалы и их свойства. - Укр. мат. журн., 1978. 30, № 2. с. 212-217.
3. Кашу А.И. Радикалы и кручения в модулях. - Кишинев: Штиинца, 1983. - 152 с.

Стаття надійшла до редколегії 16.05.83