УДК 513.83

М.М.Зарічний

КАТЕГОРІЯ НОРМАЛЬНИХ ФУНКТОРІВ

Останнім часом зросла кількість праць, присвячених дослідженню поняття нормального функтора, що діє на категорії $\mathcal{B}omp$ компактів та їх неперервних відображень в себе [1, 2, 4]. Розглянемо деякі категорні властивості нормальних функторів. Наведені в п. I результати дають змогу будувати нові приклади нормальних функторів; одне застосування дано в п. III, де розв"язано (негативно) три проблеми, поставлені Є.В.Щепіном в [4]. В п. II побудована внутрішня категорія категорії Top, що є в якомусь сенсі неперервним аналогом категорії метризовних компактів. Виявляється, що нормальні функтори можна інтерпретувати як внутрішні ендофунктори цієї внутрішньої категорії. Поряд з теоремою Щепіна про те, що нормальні функтори неперервні на морфізмах [4], побудови п. II свідчать, що нормальні функтори "неперервні на об"єктах".

Всі необхідні означення можна знайти в працях [4, 5].

I. Означимо категорію NF, об"єктами якої є нормальні функтори, що діють на категорії $\mathcal{B}omp$, а морфізмами - природні перетворення таких функторів. Коректність цього означення випливає з такого факту.

<u>Твердження I</u>. Нехай $\varphi_1, \varphi_2 : F \to G$ - природні перетворення нормальних функторів. Тоді $\varphi_1 = \varphi_2$, коли і тільки коли $\varphi_{1Q} = \varphi_{2Q}$ ($Q \cong I^\omega$ - гільбертовий куб).

Доведення нетривіальної частини. Для кожного кардинала τ розглянемо обернену систему $\varphi = \{Q^A, p^A_B \; ; \; P_\omega(\tau)\}$ з границею (Q^τ, p_A) (де $P_\omega(\tau)$ - множина зліченних підмножин множини τ, частково впорядкована відношенням $\subset$;

$p^A_B : Q^A \to Q^B$, $B \subset A$ і $p_A : Q^\tau \to Q^A$ - проектування). З комутативності діаграми

$$\begin{array}{ccc} F(Q^A) & \xrightarrow{\varphi_{iQ^A}} & G(Q^A) \\ {\scriptstyle F(p^A_B)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle G(p^A_B)} \\ F(Q^B) & \xrightarrow{\varphi_{iQ^B}} & G(Q^B) \end{array}$$

для всіх $A, B \in P_\omega(\tau)$, $A \supset B$ і неперервності функторів F, G одержуємо $\varphi_{1Q^\tau} = \varprojlim \{\varphi_{1Q^A}\} = \varprojlim \{\varphi_{2Q^A}\} = \varphi_{2Q^\tau}$.

Нехай X – довільний компакт, $i: X \to Q^{\tau}$ – вкладення для деякого τ. Тоді $G(i)\varphi_{1X} = \varphi_{1Q^{\tau}} F(i) = \varphi_{2Q^{\tau}} F(i) = G(i)\varphi_{2X}$. Оскільки $G(i)$ – вкладення, то $\varphi_{1X} = \varphi_{2X}$.

<u>Твердження 2</u>. У категорії NF існують добутки непорожніх сімей потужності $\leqslant \omega$, а також еквілізатори довільних сімей морфізмів.

<u>Доведення</u>. Добутки й еквілізатори визначаються поаргументно: $(\Pi\{F_\alpha \mid \alpha \in \mathfrak{A}\})(X) = \Pi\{F_\alpha(X) \mid \alpha \in \mathfrak{A}\}$, $Ker\{\varphi_\alpha : F \to G, \alpha \in \mathfrak{A}\} = (F', i)$, де $i_X : F'(X) = \{x \in F(X) \mid \varphi_\alpha(x) = \varphi_\beta(x), \alpha, \beta \in \mathfrak{A}\} \hookrightarrow F(X)$. Нескладно перевірити, що ці операції не виводять за межі класу нормальних функторів.

<u>Наслідок I</u>. В категорії NF існують границі діаграм потужності $\leqslant \omega$.

II. Для кожного компакта X позначимо через $exp'(X)$ простір $exp(X) \sqcup \{\varnothing\}$. Означимо внутрішню категорію $\mathbb{C} = \langle C_0, C_1, u, s, b, c \rangle$ [5], прийнявши $C_0 = exp'(Q)$, $C_1 = \{\langle x, y, z \rangle \in exp'(Q) \times exp'(Q) \times exp'(Q \times Q) \mid$ z – графік неперервного відображення з x в $y\} \subset exp'(Q) \times exp'(Q) \times exp'(Q \times Q)$. Відображення $u: C_0 \to C_1$, $s, b: C_1 \to C_0$, $c: C_2 \to C_1$ визначаються такими формулами (C_2 знаходять з універсального квадрата

$$\begin{tikzcd} C_2 = C_1 \times_{C_0} C_1 \arrow[r] \arrow[d] & C_1 \arrow[d, "b"] \\ C_1 \arrow[r, "s"] & C_0 \end{tikzcd}$$

$C_2 = \{\langle\langle x, y, z\rangle, \langle x', y', z'\rangle\rangle \mid x' = y\} \subset C_1 \times C_2)$: $u(x) = \langle x, x, 1_x \rangle \in C_1$, $s\langle x, y, z\rangle = x$, $b\langle x, y, z \rangle = y$, $c(\langle x, y, z\rangle, \langle x', y', z'\rangle) = \langle x, y', t \rangle$,

де $t = \{\langle a, b\rangle \mid$ існує $d \in Q$ т. , що $\langle a, d \rangle \in z, \langle d, b \rangle \in z'\} \subset Q \times Q$.

Нескладно перевірити, що тим самим задається внутрішня категорія категорії Top.

Нехай тепер F – нормальний функтор. Вважатимемо, що $F(Q) \subset Q$. Побудуємо внутрішній функтор $F^* = \langle F_0, F_1 \rangle : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, прийнявши $F_0(x) = F(x) \subset F(Q) \subset Q$, $F_1(\langle x, y, z\rangle) = \langle F(x), F(y), F(z) \rangle$, де вкладення $F(z)$. в $F(x)\times F(y)$ задається морфізмом $\langle F(p_1)$, $F(p_2)\rangle (p_1 : x\times y \to x,\ p_2 : x\times y \to y$ – проекції).

Неперервність відображень F_0 і F_1 випливає з наступного твердження.

<u>Твердження 3</u>. Для кожного нормального функтора F відображення $\gamma : exp(X) \to exp(F(X))$, $\gamma(A) = F(A) \subset F(X)$ – неперервне.

На жаль, зіставлення $F \mapsto F^*$ не канонічне, воно залежить від вибору вкладення $F(Q) \subset Q$. Зафіксуємо такі вкладення для всіх нормальних функторів.

<u>Твердження 4</u>. Відображення $F \longmapsto F^*$ – ін"єктивне.

<u>Теорема I</u>. $|Ob\ NF| = c$.

<u>Доведення</u>. Нерівність $|Ob\ NF| \leq c$ випливає з твердження 4. Обернена нерівність випливає з такого факту.

<u>Твердження 5</u>. Для кожного $n \geq 1$ категорія $S_n - MComp$ метризовних S_n – компактів (S_n – симетрична група) вкладається як повна підкатегорія категорії NF. Можна додатково вимагати, що образ категорії $S_n - MComp$ при цьому вкладенні складається з функторів степеня $\leq n$ з неперервними носіями.

Ш. Нехай $\{F_\alpha \mid \alpha \in \mathfrak{A}\}$ – непорожна сім"я нормальних функторів, $|\mathfrak{A}| \leq \omega$ і $F = \Pi\{F_\alpha \mid \alpha \in \mathfrak{A}\}$.

<u>Лема I</u>. Нехай $x \in F(X)$ і $x = \langle x_\alpha \rangle$, де $x_\alpha \in F(X_\alpha), \alpha \in \mathfrak{A}$. Тоді $sup\,p_F(x) = Cl(\cup\{supp_{F_\alpha}(x_\alpha) \mid \alpha \in \mathfrak{A}\})$.

Безпосередньо з цієї леми випливає таке твердження.

<u>Твердження 6</u>. Для довільної сім"ї нормальних функторів $\{F_i \mid i < \omega\}$ виконується:

а) $deg(F_0 \times \ldots \times F_k) = deg\,F_0 + \ldots + deg\,F_k$,

б) $deg(\Pi\{F_i \mid i < \omega\}) = \infty$.

Як відомо [3], суперпозиція $G \circ F$ нормальних функторів F і G є нормальним функтором.

<u>Лема 2</u>. Для кожного компакта X, нормальних функторів F, G і точки $x \in (G \circ F)(X)$

$$supp_{G\circ F}(x) = \cup\{supp_F(y) \mid y \in supp_G(x)\}.$$

<u>Доведення</u>. Приймемо $\cup\{supp_F(y) \mid y \in supp_G(x)\} = A$. Нехай $y_0 \in supp_G(x)$. Тоді $supp_F(y_0) \subset A$ і отже, $y_0 \in F(A)$. Звідси одержуємо, що $supp_G(x) \subset F(A)$, а тому $x \in G(F(A)) = (G \circ F)(A)$ і $supp_{G\circ F}(x) \subset A$.

Навпаки, нехай $A \setminus B \neq \emptyset$ для замкнутої множини $B \subset X$. Тоді існує точка $y_0 \in supp_G(x)$, для якої $supp_F(y_0) \setminus B \neq \emptyset$.

Отже, $y_0 \notin F(B)$ і $x \notin G(F(B)) = (G \circ F)(B)$, а тому $supp_{G \circ F}(x) \supset A$. З леми 2 випливає наступне твердження.

Твердження 7. Для довільних нормальних функторів F, G
$$deg(G \circ F) = deg F deg G.$$

Говоримо [4], що функтор F ділиться справа на степінь, якщо $F = F' \circ (-)^k$ для деякого функтора F' і $k > 1$. З твердження 7 випливає, що в цьому випадку $deg F$ ділиться на k.

Є.В.Щепін сформулював наступні питання.

Чи для кожного гомеоморфізму $h : F(K^\tau) \longrightarrow F(K^\tau)$, де K – метризовний компакт, $\tau > \omega_1$; F – нормальний функтор, що не ділиться справа на степінь, виконується $deg h(x) = deg(x)$ проблема I2, а також загальніша проблема I3 [4].

Нехай функтори F_1, F_2 не діляться справа на степінь. Чи випливає з гомеоморфності просторів $F_1(K_1^\tau)$ і $F_2(K_2^\tau)$, де K_1, K_2 – метризовні компакти і $\tau > \omega_1$, гомеоморфізм просторів K_1^τ, K_2^τ та ізоморфізм функторів F_1, F_2 проблема I4 [4].

Наведені нижче приклади дають негативні відповіді на ці запитання.

Приклад I. Приймемо $F = exp_2 \times Id$. Тоді за твердженням 6 $deg F = 3$ і, отже, F не ділиться справа на степінь, оскільки $F \not\cong (-)^3$. Розглянемо точку $x \in F(I^{\omega_2})$ таку, що $x = \langle \{x_1, x_2\}, x_3 \rangle$, де x_1, x_2, x_3 – різні точки тихоновського куба I^{ω_2}. За лемою I $deg(x) = |\{x_1, x_2, x_3\}| = 3$. Нехай $g : I^{\omega_2} \longrightarrow I^{\omega_2}$ – такий гомеоморфізм, що $g(x_3) = x_2$, а також $h = id_{exp_2 I^{\omega_2}} \times g$. Тоді $h(x) = \langle \{x_1, x_2\}, x_2 \rangle$ і $deg h(x) = |\{x_1, x_2\}| = 2 \neq deg(x)$.

Приклад 2. Приймемо $F_1 = exp_2 \times Id$, $F_2 = exp_2 \times (-)^3$. Тоді $deg F_1 = 3$, $deg F_2 = 5$ і, отже, F_1, F_2 – неізоморфні нормальні функтори, що не діляться справа на степінь. Але $F_1(I^{\omega_2}) = exp_2(I^{\omega_2}) \times I^{\omega_2} \cong exp_2(I^{\omega_2}) \times (I^{\omega_2})^3 = F_2(I^{\omega_2})$.

I. Федорчук В.В. Ковариантные функторы в категории компактов, абсолютные ретракты и Q -многообразия. – Успехи мат. наук, I98I, 36,#3, с. I77–I95. 2. Федорчук В.В. О некоторых геометрических свойствах ковариантных функторов. – Успехи мат. наук, I984, 39,#5, с. I69–208. 3. Щепин Е.В. О некоторых свойствах функторов экспоненциального типа. – В кн.: IУ Тираспольский симпозиум по общей топологии и ее применениям. Кишинев: Штиинца, I979, с. I63–I64. 4. Щепин Е.В. Функторы и несчетные степени компактов. – Успехи мат. наук, 1981, 36, №3, с. 3–62. 5. Radu A. Gh. Teoria toposurilor. – Editura Akademiei Republici Socialista Romania, 1976, vol. 2, p. 12–21.

Стаття надійшла до редколегії 11.02.85

УДК 513.88+83

І.Й. Гуран, І.Я. Пукач

ВКЛАДЕННЯ ТОПОЛОГІЧНИХ ВЕКТОРНИХ ПРОСТОРІВ І МІНІМАЛЬНІ ВЕКТОРНІ ТОПОЛОГІЇ

У теорії топологічних векторних просторів (ТВП) важливими є теореми про зображення простору з широкого класу у вигляді проективної границі більш простих. Наведемо одну з найбільш відомих [4]. Будь-який повний локально випуклий ТВП є проективною границею банахових просторів (проективною границею називаємо, як звичайно, границю оберненого спектра [9], що дещо відрізняється від термінології, прийнятої у праці [4]. Такі теореми природно розглядати як апроксимаційні, що дають змогу редукувати вивчення складних просторів до більш простих.

Дамо внутрішнє описання проективних границь повних сепарабельних метризовних ТВП (далі польських ТВП) і повних метризовних ТВП (далі F – просторів) [5]. Ці результати отримані як наслідки відповідних теорем вкладення. На завершення доведемо збігання характеру та псевдохарактеру в мінімальних топологічних векторних просторах [1, 7].

Надалі скрізь ω – перший нескінченний кардинал. Незначною модифікацією методу Какутані- Біркгофа [8, 10] доводяться наступні дві леми.

<u>Лема 1</u>. Нехай $\{U_i \mid i \in N\}$ – спадна послідовність відкритих підмножин ТВП X така, що 1) $0 \in U_i$; 2) $U_i = -U_i$; 3) $U_{i+1} + U_{i+1} \subset U_i$; 4) U_i – врівноважені для всіх $i \in \omega$.

Тоді в просторі X існує така неперервна, невід"ємна функція M, що

а) $\{x \in X \mid M(x) < \frac{1}{2i}\} \subset U_i \subset \{x \in X \mid M(x) \leq \frac{1}{2^{i-1}}\}$

для всіх $i \in \omega$,

б) $M(x+y) \leq M(x) + M(y)$;

в) $|M(x) - M(y)| \leq M(x-y)$;