и несчетные степени компактов. – Успехи мат. наук, 1981, 36, 3, с. 3–62. 5. Radu A.Gh. Teoria toposurilor. – Editura Akademiei Republici Socialista Romania, 1976, vol. 2, p. 12–21.

Стаття надійшла до редколегії 11.02.85

УДК 513.88+83

І.Й. Гуран, І.Я. Пукач

ВКЛАДЕННЯ ТОПОЛОГІЧНИХ ВЕКТОРНИХ ПРОСТОРІВ І МІНІМАЛЬНІ ВЕКТОРНІ ТОПОЛОГІЇ

У теорії топологічних векторних просторів (ТВП) важливими є теореми про зображення простору з широкого класу у вигляді проективної границі більш простих. Наведемо одну з найбільш відомих [4]. Будь-який повний локально випуклий ТВП є проективною границею банахових просторів (проективною границею називаємо, як звичайно, границю оберненого спектра [9], що дещо відрізняється від термінології, прийнятої у праці [4]. Такі теореми природно розглядати як апроксимаційні, що дають змогу редукувати вивчення складних просторів до більш простих.

Дамо внутрішнє описання проективних границь повних сепарабельних метризовних ТВП (далі польських ТВП) і повних метризовних ТВП (далі F – просторів) [5]. Ці результати отримані як наслідки відповідних теорем вкладення. На завершення доведемо збігання характеру та псевдохарактеру в мінімальних топологічних векторних просторах [1, 7].

Надалі скрізь ω – перший нескінченний кардинал. Незначною модифікацією методу Какутані- Біркгофа [8, 10] доводяться наступні дві леми.

<u>Лема 1</u>. Нехай $\{U_i \mid i\in N\}$ – спадна послідовність відкритих підмножин ТВП X така, що 1) $0\in U_i$; 2) $U_i=-U_i$; 3) $U_{i+1}+U_{i+1}\subset U_i$; 4) U_i – врівноважені для всіх $i\in\omega$.

Тоді в просторі X існує така неперервна, невід"ємна функція M, що

а) $\{x\in X \mid M(x)<\frac{1}{2^i}\}\subset U_i\subset\{x\in X\mid M(x)\leq\frac{1}{2^{i-1}}\}$

для всіх $i\in\omega$,

б) $M(x+y)\leq M(x)+M(y)$;

в) $|M(x)-M(y)|\leq M(x-y)$;

Лема 2. Нехай $\{U_i \mid i \in \omega\}$ – сім"я відкритих підмножин у ТВП X, які задовольняють умови леми I; $Q=\{2^n M \mid M$ – функція, що задовольняє висновки леми I; $n \in N\}$ – сім"я функцій на ТВП X.

Тоді множини $\{x \in X \mid f(x)<1\}$, де $f \in Q$, утворюють базу околів нуля ТВП.

Зауваження. Топологія ТВП, породжена сім"єю $\{x\in X \mid f<1, f\in Q\}$, взагалі кажучи, нехаусдорфова і нелокально випукла.

Теорема I. Будь-який ТВП X топологічно ізоморфний підпростору прямого добутку метризованих ТВП.

Доведення. Зафіксуємо деяку базу $B=\{V_\alpha \mid \alpha \in A\}$ околів нуля ТВП X. Для кожного $\alpha \in A$ рекурсією до ω будуємо послідовність $\{V_i^\alpha \mid i<\omega\}$ околів нуля в X, яка задовольняє умови

а) $V^\alpha \supset V_1^\alpha \supset V_2^\alpha \supset \dots$;

б) V_i^α – симетричні та врівноважені множини;

в) $V_{i+1}^\alpha + V_{i+1}^\alpha \subset V_i^\alpha$ для кожного $i \in \omega$.

З умов а) – в) випливає, що при будь-якому $\alpha \in N$ до системи $\{V_i^\alpha \mid i \in \omega\}$ можна застосувати лему I. Нехай M_α – функція, що існує з огляду на лему для цієї системи. Позначимо через $F_\alpha=\{x\in X \mid M_\alpha(x)=0\}$ множину нулів цієї функції. Очевидно, $F_\alpha=\bigcap\{V_i^\alpha \mid i<\omega\}$ – замкнутий підпростір в X. Дійсно,

I) нехай $x,y \in F_\alpha$. Тоді $M_\alpha(x)=0$ і $M_\alpha(y)=0$. Враховуючи висновок б) леми I, $M_\alpha(x+y)\leq M_\alpha(x)+M_\alpha(y)=0$;

2) нехай $x\in F_\alpha$ і λ – скаляр. Оскільки з $x \in F_\alpha$ випливає, що $x \in \bigcap\{V_i^\alpha\}$ і $x\in V_i^\alpha \subset V_k^\alpha$ для $k=i-[|\lambda|]$, то

$$\lambda x=\left(\frac{\lambda}{|\lambda|}\cdot|\lambda|\right)x=|\lambda|\left(\frac{\lambda}{|\lambda|}x\right)\in|\lambda|\,V_i^\alpha=(|\lambda|+\{\lambda\})\,V_i^\alpha\subseteq$$
$$\subseteq[|\lambda|]\,V_i^\alpha+\{|\lambda|\}V_i^\alpha\subseteq V_{i-[|\lambda|]}^\alpha+V_i^\alpha\subseteq V_k^\alpha+V_i^\alpha\subseteq$$
$$\subseteq V_k^\alpha+V_k^\alpha\subseteq V_{k+1}^\alpha$$

для всіх $k\in\omega$. Тобто $\lambda x\in F_\alpha$.

Отже, F_α – замкнутий підпростір в X. Розглянемо тепер фактор-простір $X_\alpha=X/F_\alpha=X_\alpha$. Визначимо на X_α функцію M_α^*, прийнявши $M_\alpha^*(x_\alpha)=M_\alpha(x)$, де x -й елемент простору X, що належить суміжному класу x_α по замкнутому підпростору F_α. Покажемо, що таким чином коректно визначено функцію M_α^*. Нехай x і y – довільні різні елементи простору X, які належать одному і тому ж суміжному класу x_α. Припустимо $M_\alpha(x)\neq M_\alpha(y)$. Згідно з висновком в) леми I $0\leq|M_\alpha(x)-M_\alpha(y)|\leq 0$. Таким чином, $M_\alpha(x)=M_\alpha(y)$ для всіх $x, y \in x_\alpha$ і функція M_α^* визначена коректно. За лемою 2 сім"я функцій $Q=\{2^n M_\alpha^* \mid n \in N\}$ визначає хаусдорфову τ_α топологію ТВП, база околів нуля якої злічення і складається з множин $\{x_\alpha \in X_\alpha \mid 2^n M_\alpha^*(x_\alpha)<1\}$. Отже, X_α у цій топології метризовний ТВП. Позначимо через π_α природну проекцію π_α : $X \to X/F_\alpha$, а через $Y=\Pi\{X_\alpha \mid \alpha \in A\}$ – тихоновський добуток просторів (X_α, τ_α). Діагональне відображення $\Delta: X \to Y$, $\Delta: x \to \{\pi_\alpha(x)\}$ є вкладенням. Покажемо, що відображення $\Delta^{-1}: \Delta(X) \to X$ неперервне.

Нехай U – окіл нуля в X. Тоді існує $\alpha \in A$, для якого $V^\alpha \subset U$. Виберемо W_α – окіл нуля в X_α такий, що $\pi_\alpha^{-1}(W_\alpha) \subset U$ і розглянемо $\tilde{W}_\alpha$ – циліндр над W_α в Y. Очевидно, $\Delta^{-1}(\tilde{W}_\alpha \cap \Delta(X)) \subset U$. Отже, Δ^{-1} – неперервне відображення і Δ – топологічний ізоморфізм. Теорема доведена.

Означення I. ТВП X називається τ – обмеженим (де $\tau \geq \omega$), якщо для будь-якого околу нуля U простору X існує така підмножина $A \subset X$, що $|A| \leq \tau$ і $U + A = X$.

Аналогічно, як у категорії топологічних груп [2], доводяться наступні теореми.

Теорема 2. Для кожного кардинала τ клас τ – обмежених ТВП замкнутий відносно добутків, образів непервних гомоморфізмів, підпросторів, поповнень.

Теорема 3. Топологічний векторний простір τ – обмежений тоді і тільки тоді, коли він топологічно ізоморфний підпростору прямого добутку топологічних векторних просторів, вага яких не перевищує τ.

Доведення. Достатність безпосередньо випливає з теореми 2 і того факту, що метризовна топологічна група ваги $\leq \tau$ τ - обмежена [2].

Необхідність. Нехай X τ – обмежений ТВП. Тоді X топологічно ізоморфний підпростору добутку $Y=\Pi\{X_\alpha \mid \alpha \in A\}$ сім"ї метризовних просторів. Але $X \subset \Pi\{\pi_\alpha(X)\}$. З теореми 2 випливає, що для кожного $\alpha \in A$, $\pi_\alpha(X)$ – метризовний ТВП ваги $\leq \tau$.

Наслідок I. ТВП X ω – обмежений тоді і тільки тоді, коли X топологічно ізоморфний підпростору добутку сепарабельних метризовних ТВП.

Наслідок 2. Топологічний векторний простір повний тоді і тільки тоді, коли він є проективною границею F -просторів.

Наслідок 3. Повний топологічний векторний простір ω - обмежений тоді і тільки тоді, коли він є проективною границею польських ТВП.

Доведення наслідків 2 і 3 безпосередньо випливає з теорем I, 2, 3 і теореми 2.5.8 з праці [9].

Зауваження. У задачі 312 праці [3] вимагається довести, що будь-який локально випуклий простір допускає неперервне вкладення у добуток прямих $\mathbb{R}$. Відзначено, що воно не зобов"язане бути топологічним ізоморфізмом з огляду на наслідок I, оскільки метризовний не ω - обмежений, тобто сепарабельний неметризовний (такі існують [6]) простір не допускає вкладення в добуток прямих.

У ТВП характер, взагалі кажучи, не збігається з псевдохарактером [I]. Наприклад, якщо X - строга індуктивна границя [4] прямих. Але в мінімальних ТВП [7] характер і псевдохарактер збігаються.

Означення 3. Хаусдорфовий ТВП називається мінімальним, якщо його топологію не можна послабити до хаусдорфової векторної топології.

Теорема 4. Нехай X - ТВП і $\psi = \psi(X) \leq \chi(X)$. Тоді існує на X векторна топологія Γ , для якої $\chi(X, \Gamma) \leq \psi$.

Доведення . Нехай B - сім"я околів нуля, де $|B| \leq \psi$. Для кожного $U \in B$ по рекурсії до ω побудуємо сім"ю околів нуля, що задовольняють умови леми I. Відповідну функцію, яка існує за цією лемою, позначимо через M_U . Безпосередньо перевіряється, що сім"я $L = \{x \in X \mid f(x) < 1, f \in F\}$, де $F = \{2^n M_U \mid U \in B\}$, утворює базу околів нуля ТВП і

$$|L| = \omega \cdot |B| \cdot \omega = |B| = \psi(X).$$

Теорема доведена.

Наслідок 4. Для мінімальних топологічних векторних просторів характер збігається з псевдохарактером.

Наслідок 5. Мінімальний ТВП зліченного псевдохарактера метризовний.

I. А р х а н г е л ь с к и й А.В. Кардинальные инварианты топологических групп. Вложения и уплотнения. - Докл. АН СССР, 1979, 247, № 4, с. 779-782. 2. Г у р а н И.И. О топологических группах близких к финально компактным. - Докл. АН СССР, 1981, 256, № 6, с. 1305-1307. 3. К и р и л л о в А.А., Г в и ш и а н и А.Д. Теоремы и задачи функционального анализа. М.: Наука, 1979. - 381 с. 4. Р о б е р т с о н А.П., Р о б е р т с о н В.Дж. Топологические векторные пространства. М.: Мир, 1967. - 257 с.

5. Р у д и н У. Функциональный анализ. – М.: Мир, 1975. – 443 с. 6. Ш е ф е р Х. Топологические векторные пространства.–М.: Мир, 1971. – 352 с. 7. Banaschewski B. Minimal topological algebras.– Math. Ann., 1974, N211, p.107–114. 8. Birkhoff Garrett. A note on topological groups.– Com. Math., 1936, N3, p.427–430. 9. Engelking R. General Topology. Warszawa, 1977. 10. Kakutani Sizuo. Über die Metrisation der topologischen Gruppen.– Proc. Imp. Acad. Tokyo, 1936, N12, p.82–84.

Стаття надійшла до редколегії 25.04.84

УДК 517.564.3:530.145

П.І.Тацуняк

ФОРМУЛИ МНОЖЕННЯ ФУНКЦІЇ МАКДОНАЛЬДА В АКСІОМАТИЧНІЙ КВАНТОВІЙ ТЕОРІЇ ПОЛЯ

Для вільної скалярної теорії поля одержано [2] інтегральне представлення функцій Вайтмана W_{2n} вигляду

$$W_{2n}(x_1, x_2, \dots, x_{2n}) = i^n \sum_{P'} \Delta_2^+(x_1 - x_2)\Delta_2^+(x_3 - x_4)\dots\Delta_2^+(x_{2n-1} - x_{2n}) =$$
$$= \int_0^\infty \prod_{s<\ell=1,3,\dots,2n-1} da_{s\ell} \sum_{P'} \Delta_{n+1}^+(x_1 - x_2, x_3 - x_4, \dots, x_{2n-1} - x_{2n}; a_{s\ell}), \qquad (1)$$

де $\sum\limits_{P'}$ сума по всіх перестановках $(x_1, x_2, \dots x_i, \dots x_j, \dots x_{2n})$ за умови $\{i-j<0 \mid x_i - x_j\}$, а Δ_{n+1}^+ – сингулярні функції Челлена – Вільгельмсона [2];

$$\Delta_{n+1}^+(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n; a_{s\ell}) = \frac{(-i)^n}{(2\pi)^{3n}} \int \prod_{s\leq\ell=1} dk_s \theta(k_{s0}) \delta(k_s k_\ell + a_{s\ell}) \exp\left(i\sum_{r=1}^{n} k_r \xi_r\right); \qquad (2)$$

$\delta(k_s, k_\ell)$ – функція Дірака; $\theta(k_{s0})$ – функція стрибка Хевісайда; $x_i - x_{i+1} = \xi_i$ – вектори координат у метриці Мінковського з квадратом $\xi_i^2 = \xi_{i1}^2 + \xi_{i2}^2 + \xi_{i3}^2 - \xi_{i0}^2$ та їх фур"є-координати $k_i(k_{i1}, k_{i2}, k_{i3}, k_{i0})$; $k_i^2 < 0$; $k_{i0} > 0$, скалярні добутки яких $k_s k_\ell = -a_{s\ell} < 0$ – "масові" параметри представлення. Для вільного поля $k_s^2 = -m^2$; $(s = 1, 2, \dots, n)$.

Сингулярні функції Δ_2^+, Δ_3^+, а також для вільного поля Δ_4^+ обмежені явно [2, 3] і виражаються через функцію Макдональда